для которой лебегов интеграл

$$\int_0^1 |f - f_k| \, dx \to 0, \quad k \to \infty,$$

стремится к нулю, φ должна равняться одной из функций f_1, эквивалентных f, и мы пришли к противоречию, потому что $f_1 \notin L'(0, 1)$.

Этим доказано, что *пространство* $L'(0, 1)$ *не полно*. Применяя ту же функцию f, читатель, аналогично рассуждая, докажет, что и *пространство* $L'_p(0, 1)$ *не полно*.

§ 19.8. Обобщение меры Жордана

Мы будем рассматривать полуоткрытые (ограниченные) прямоугольники

$$\Delta = \{c_j \leqslant \xi_j < d_j;\ j = 1, \ldots, n\}$$

и фигуры (полуоткрытые)

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} \Delta^j$$

— конечные суммы попарно непересекающихся полуоткрытых прямоугольников.

Иногда будем говорить просто о фигурах σ, подразумевая, что они полуоткрыты. Если же появится необходимость говорить о замкнутой или открытой фигуре (прямоугольнике), то это будет всякий раз оговариваться.

Пусть $G = \{a_j \leqslant \xi_j < b_j;\ j = 1, \ldots, n\}$ — фиксированный прямоугольник и каждому $\Delta \subset G$, в том числе и G, приведено в соответствие неотрицательное число $\alpha(\Delta)$ такое, что $\alpha(\Delta)$ есть аддитивная функция от Δ, т. е. если $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \Delta^j$, где Δ^j — попарно непересекающиеся прямоугольники, то

$$\alpha(\Delta) = \sum_{j=1}^{N} \alpha(\Delta^j). \tag{1}$$

Функцию $\alpha(\Delta)$ будем считать продолженной на произвольные $\Delta \subset R_n$, положив

$$\alpha(\Delta) = \alpha(G\Delta).$$

Мы считаем $\alpha(\Delta) = 0$ для любого прямоугольника Δ не пересекающегося с G. Продолженная функция, очевидно, неотрицательна и аддитивна.

Распространим $\alpha(\Delta)$ на все фигуры $\sigma \subset G$, положив

$$\alpha(\sigma) = \sum_{j=1}^{N} \alpha(\Delta^j), \quad \sigma = \sum_{j=1}^{n} \Delta^j,$$

где Δ^j — попарно непересекающиеся прямоугольники.

Легко видеть, что $\alpha(\sigma)$ есть аддитивная неотрицательная функция от $\sigma \subset G$. Таким образом,

$$\alpha(\sigma') + \alpha(\sigma'') = \alpha(\sigma' + \sigma'')$$

для непересекающихся $\sigma', \sigma'' \subset G$.

Пустое множество $\varnothing$ мы тоже называем фигурой и полагаем $\alpha(\varnothing) = 0$. Тогда для любой $\sigma \subset G$

$$\alpha(\sigma + \varnothing) = \alpha(\sigma) = \alpha(\sigma) + \alpha(\varnothing).$$

Очевидно, $\sigma' - \sigma$ есть фигура вместе с σ и σ', и если $\sigma \subset \sigma'$, то

$$0 \leqslant \alpha(\sigma' - \sigma) = \alpha(\sigma') - \alpha(\sigma),$$

откуда $\alpha(\sigma) \leqslant \alpha(\sigma')$.

Условимся, что $A \subset\subset B$ обозначает, что $\bar{A} \subset \tilde{B}$, где $\tilde{B}$ — открытое ядро B, т. е. совокупность внутренних точек B. Таким образом, границы A и B не пересекаются.

Пусть $\Omega \subset G$ — произвольное множество.

По определению его *внутренняя мера* (*относительно* $\alpha(\Delta)$ *в духе Жордана*) есть верхняя грань

$$m_i\Omega = \sup_{\sigma \subset\subset \Omega} \alpha(\sigma).$$

Отметим, что в случае меры Жордана ($\alpha(\Delta) = |\Delta|$) справедливо равенство

$$\sup_{\sigma \subset \Omega} |\sigma| = \sup_{\sigma \subset\subset \Omega} |\sigma|,$$

которое не изменится, если под σ понимать замкнутые фигуры вместо полуоткрытых, как это считалось при определении внутренней меры Жордана (см. § 12.5). Для произвольной меры $\alpha(\Delta)$ это равенство вообще неверно (см. ниже примеры 1, 2).

Так как $0 \leqslant \alpha(\sigma) \leqslant \alpha(G)$ для всех $\sigma \subset\subset \Omega$, то (конечное) число $m_i\Omega$ существует и неотрицательно.

Конечно, если Ω, кроме пустого множества, не содержит в себе ни одного прямоугольника, то $m_i\Omega = 0$.

По определению *внешняя мера* (*относительно* $\alpha(\Delta)$ *в духе Жордана*) есть нижняя грань

$$m_e\Omega = \inf_{\sigma \supset\supset \Omega} \alpha(\sigma).$$

Если замыкание $\bar{\Omega}$ имеет общие точки с границей $\dot{G}$, то для того, чтобы это определение было корректным, мы считаем, что $\alpha(\Delta)$ продолжена на все $\Delta \subset R_n$.

Так как $\alpha(\sigma) \geqslant 0$ для любой σ, то число $m_e\Omega$ существует для любого $\Omega \subset G$ и не отрицательно.

Очевидно, что $m_i\Omega \leqslant m_e\Omega$. В случае равенства мы будем говорить, что множество Ω *измеримо* (*относительно* $\alpha(\Delta)$ *в духе Жордана*) и его мера есть

$$m\Omega = m_i\Omega = m_e\Omega.$$

Рассматриваемая здесь мера превращается в меру Жордана, если $\alpha(\Delta)$ равна $|\Delta|$ — n-мерному объему Δ. Да и основные ее свойства аналогичны и доказываются аналогично (см. § 12.5). Ниже мы их перечисляем.

Вместе с Ω_1 и Ω_2 измеримы также множества $\Omega_1 \pm \Omega_2$ и $\Omega_1\Omega_2$, а если Ω_1 и Ω_2 не пересекаются, то $m(\Omega_1 + \Omega_2) = m\Omega_1 + m\Omega_2$; таким образом, если $\Omega_1 \supset \Omega_2$, то $m(\Omega_1 - \Omega_2) = m\Omega_1 - m\Omega_2$.

Множество Ω измеримо тогда и только тогда, когда его граница имеет меру (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана) нуль.

Мы видим, что, так же как в случае меры Жордана, чтобы распознать измеримое множество, достаточно установить, что его граница Γ имеет меру нуль в смысле $\alpha(\Delta)$. В случае жордановой меры этот вопрос всецело зависит от геометрических свойств Γ. В общем же случае это не всегда так.

Пример 1. Пусть масса, равная 2, распределена на отрезке $[0, 1]$ следующим образом. Половина ее, равная 1, распределена на $[0, 1]$ равномерно, а другая половина сконцентрирована в точке $x = 1/2$. Функция $\alpha(\Delta)$, где $\Delta \subset [0, 1]$ — произвольный полуинтервал, равна массе Δ. Иначе говоря,

$$\alpha(\Delta) = \begin{cases} |\Delta|, & \text{если } \frac{1}{2} \overline{\in} \Delta, \\ |\Delta| + 1, & \text{если } \frac{1}{2} \in \Delta, \end{cases}$$

где $|\Delta|$ — длина Δ.

Легко видеть, что, исключая точку $x = 1/2$, любая точка, рассматриваемая как множество, имеет меру в смысле $\alpha(\Delta)$, равную нулю. Множество же e, состоящее из исключительной точки $x = 1/2$, неизмеримо в смысле $\alpha(\Delta)$, ведь $m_ie = 0$, $m_ee = 1$. Очевидно, внутренняя мера отрезка $[1/2, 1]$ равна $m_i[1/2, 1] = \sup\limits_{\Delta \subset\subset [1/2, 1]} |\Delta| = 1/2$, между тем $\sup\limits_{\Delta \subset [1/2, 1]} \alpha(\Delta) = \alpha[1/2, 1] = 3/2$.

Пример 2. Пусть масса, равная 3, распределена на квадрате $G = \{0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ следующим образом. Единица распределена на G равномерно, другая единица равномерно распределена на наибольшем принадлежащем G полуинтервале γ прямой $x = 1/2$, наконец, третья единица сконцентрирована в точке $(1/2, 1/2)$. Функция $\alpha(\Delta)$ равна по определению массе Δ. Иначе говоря,

$$\alpha(\Delta) = \begin{cases} |\Delta|, & \text{если } \Delta\gamma = 0, \\ |\Delta| + |\Delta'|, & \text{если } \Delta \text{ пересекается с } \gamma, \text{ но не с точкой } (1/2, 1/2), \\ |\Delta| + |\Delta'| + 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $|\Delta|$ — площадь Δ, а $|\Delta'|$ — длина проекции Δ на ось y.

В этом примере, если не считать точку $(1/2, 1/2)$ каждая точка G, рассматриваемая как множество, имеет меру нуль (относительно $\alpha(\Delta)$). Любой принадлежащий интервалу γ отрезок неизмерим. С другой стороны, непрерывная кривая Γ, $y=\varphi(x)$ $0\leqslant x\leqslant 1$, удовлетворяющая условию $0\leqslant\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$, $\varphi(1/2)\neq 1/2$, как нетрудно видеть, имеет меру нуль относительно $\alpha(\Delta)$, несмотря на то что она пересекает γ.

Приведенные примеры показывают, что неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$ может быть такой, что в G будут существовать отдельные точки и отрезки, представляющие собой неизмеримые относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана множества.

Введем прямоугольник (для данного $i=1,\ldots,n$)

$$\Delta_t^i=\{\xi: a_i\leqslant\xi_i<t;\ a_j\leqslant\xi_j<b_j;\ j\neq i\}$$

и функцию $\beta_i(t)=\alpha(\Delta_t^i)$, $a_i<t\leqslant b_i$, $\beta_i(a_i)=0$.

Зафиксируем $t\in(a_i,b_i)$ и обозначим через $G_i(t)$ сечение G плоскостью $x_i=t$. Пусть $a_i<t'<t<t''<b_i$. Если задать прямоугольник $\Delta\supset\supset G$, то фигура $\sigma=(\Delta-G)+(\Delta_{t''}^i-\Delta_{t'}^i)$содержит строго внутри себя $G_i(t)$. При этом $\alpha(\Delta-G)=0$ в силу соглашения о продолжении $\alpha(\Delta)$ (см. (1)), и потому

$$\alpha(\sigma)=\alpha(\Delta_{t''}^i)-\alpha(\Delta_{t'}^i)=\beta_i(t'')-\beta_i(t'). \tag{2}$$

Предел левой, а следовательно, и правой части (2), при $t''-t'\to 0$ равен нулю тогда и только тогда, когда сечение $G_i(t)$ имеет меру $m(G_i(t))=0$, или, что все равно, если функция β_i непрерывна в точке t. Сечение $G_i(t)$ в этом случае мы будем называть *регулярным* сечением G ($a_i<t<b_i$!).

Конечная система регулярных сечений (вообще для разных $i=1,\ldots,n$) определяет некоторое разбиение G на попарно непересекающиеся прямоугольники, которое мы будем называть *регулярным.*

Так как функции $\beta_i(t)$ не убывают и, следовательно, если имеют точки разрыва, то самое большое счетное число, то для всякого $\varepsilon>0$ найдется регулярное разбиение G с частичными прямоугольниками диаметра меньшего чем ε.

В одномерном случае $G=\{a\leqslant\xi<b\}$,

$$\Delta_x=\{a\leqslant\xi<x\},\quad \beta(x)=\alpha(\Delta_x),\quad a<x\leqslant b,\quad \beta(a)=0. \tag{3}$$

Поэтому, если $\Delta=\{x\leqslant\xi<y\}\subset G$ — произвольный полуинтервал, то

$$\alpha(\Delta)=\beta(y)-\beta(x). \tag{4}$$

Итак, всякая аддитивная неотрицательная функция $\alpha(\Delta)$, $\Delta\subset\subset G$, определяет при помощи равенств (3) обычную неотрицательную неубывающую на $[a,b]$ функцию $\beta(x)$ такую, что для любого $\Delta\subset G$ выполняется соотношение (4).

Наоборот, очевидно, что каждой неубывающей функции $\beta(x)$, $\beta(a)=0$, при помощи равенств (3), (4) ставится в соответствие неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$, $\Delta\subset G$.

В двумерном случае $G=\{a\leqslant\xi<b,\ c\leqslant\eta<d\}$. В этом случае имеет смысл ввести полуоткрытые прямоугольники

$$\Delta_{xy}=\{a\leqslant\xi<x,\quad c\leqslant\eta<y\}$$

и функцию

$$F(x, y)=\alpha(\Delta_{xy}),\qquad a<x\leqslant b,\quad c<y\leqslant d, \tag{5}$$

$$F(a, y)=F(x, c)=0,\quad a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d, \tag{5'}$$

удовлетворяющую, очевидно, свойству

$$0\leqslant F(x, y)\leqslant F(x', y'),\quad x\leqslant x',\ y\leqslant y'. \tag{6}$$

Кроме того, если $(x>a, y>c)$,

$$\Delta=\{x\leqslant\xi<x',\quad y\leqslant\eta<y'\},\quad \Delta_1=\{x\leqslant\xi<x',\quad 0\leqslant\eta<y\},$$
$$\Delta_2=\{0\leqslant\xi<x,\quad y\leqslant\eta<y'\},$$

то $\Delta_{x'y'}=\Delta_{xy}+\Delta_1+\Delta_2+\Delta$, где прямоугольники справа попарно не пересекаются, и потому

$$\alpha(\Delta_{x'y'})=\alpha(\Delta_{xy}+\Delta_1)+\alpha(\Delta_{xy}+\Delta_2)-\alpha(\Delta_{xy})+\alpha(\Delta).$$

Отсюда справедливо равенство

$$\alpha(\Delta)=F(x', y')-F(x', y)-F(x, y')+F(x, y), \tag{7}$$

верное (см. (5′)) и при $x=a$, $c\leqslant y\leqslant d$ и при $y=c$, $a\leqslant x\leqslant b$.

Следовательно $(x\leqslant x', y\leqslant y')$,

$$F(x', y')-F(x', y)-F(x, y')+F(x, y)\geqslant 0. \tag{8}$$

Таким образом, неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$ определяет при помощи равенств (5), (5′), (7) функцию $F(x, y)$, удовлетворяющую условиям (6) и (8). Очевидно, что и наоборот, функция $F(x, y)$ со свойствами (5′), (6), (8) определяет при помощи (5), (7) неотрицательную аддитивную функцию $\alpha(\Delta)$.

Если F непрерывна в точках (x, y), (x', y), (x, y'), (x', y'), то, очевидно, для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такие Δ' и Δ'', $\Delta'\subset\subset\Delta\subset\subset\Delta''$, что $\alpha(\Delta'')-\alpha(\Delta')<\varepsilon$, и тогда прямоугольник Δ (полуоткрытый или замкнутый или открытый) есть измеримое множество в смысле $\alpha(\Delta)$.

Заметим, что если F имеет на $\overline{G}$ непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F''_{xy}, то правую часть (8) можно записать (см. § 7.7) в виде $F''_{xy}(x'-x)(y'-y)$, где вторая производная F''_{xy} соответствует некоторой внутренней точке открытого прямоугольника $\{x<\xi<x',\ y<\eta<y'\}$.

По аналогии эти рассуждения распространяются на n-мерный случай, где роль выражения (8) играет разность $\Delta^nF=\Delta_1\Delta_2\ldots$ $\ldots\Delta_nF$, представляющая собой результат последовательного применения к $F(x)$ операций Δ_i первой разности по переменным x_i с шагом $x_i' - x_i$. Теперь уже вместо F''_{xy} будет фигурировать смешанная производная $F^{(n)}_{x_1 \ldots x_n}$.

§ 19.9. Интеграл Римана — Стилтьеса

Пусть $\Omega \subset G$ — измеримое (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана) множество и $f(\mathbf{x})$ — определенная на нем функция. Каждому разбиению ρ множества Ω $\left(\Omega = \sum_{j=0}^{N-1} \Omega_j\right)$ на конечное число измеримых частей, пересекающихся попарно разве что по своим границам, приведем в соответствие сумму (*Римана — Стилтьеса*)

$$S_\rho(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi^j)\, m\Omega_j, \quad \xi^j \in \Omega_j. \tag{1}$$

Интегралом Римана — Стилтьеса от f на Ω (относительно $\alpha(\Delta)$) называется предел

$$\lim S_\rho(f) = \int_\Omega f(x)\, dm, \quad \max d(\Omega_j) \to 0, \tag{2}$$

когда максимальный диаметр $d(\Omega_j)$ стремится к нулю.

Как обычно, этот предел не должен зависеть от выбора последовательности разбиений и точек $\xi^j \in \Omega_j$.

Если $\alpha(\Delta) = |\Delta|$ — n-мерный объем Δ, то (2) есть интеграл Римана от f на Ω.

Вообще, неограниченная функция может оказаться интегрируемой в смысле Римана — Стилтьеса, но если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать разбиение Ω на части положительной меры диаметра меньшего ε, то, так же как в случае интеграла Римана (см. теорему 1 § 12.10), из того, что $f(\mathbf{x})$ интегрируема на Ω (относительно $\alpha(\Delta)$) следует ее ограниченность на Ω.

Основные свойства интеграла Римана — Стилтьеса полностью аналогичны соответствующим свойствам интеграла Римана. Как для последнего можно ввести для ограниченной функции $f(\mathbf{x})$ верхнюю и нижнюю интегральные суммы

$$\overline{S}_\rho = \sum_0^{N-1} M_j m\Omega_j, \quad \underline{S}_\rho = \sum_0^{N-1} m_j m\Omega_j,$$

$$m_j = \inf_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x}), \quad M_j = \sup_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x})$$

и на их основе построить верхний и нижний интегралы $\overline{I}$ и $\underline{I}$. Теоремы переносятся на общий случай без изменений в доказательстве.

Верна и теорема Лебега (см. §§ 12.8, 12.10): для того чтобы ограниченная на замкнутом измеримом (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана) множестве Ω функция f была интегрируемой в смысле