менения к $F(x)$ операций Δ_i первой разности по переменным x_i с шагом $x_i' - x_i$. Теперь уже вместо F''_{xy} будет фигурировать смешанная производная $F^{(n)}_{x_1\ldots x_n}$.

§ 19.9. Интеграл Римана — Стилтьеса

Пусть $\Omega \subset G$ — измеримое (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана) множество и $f(\mathbf{x})$ — определенная на нем функция. Каждому разбиению ρ множества Ω $\left(\Omega = \sum_{j=0}^{N-1} \Omega_j\right)$ на конечное число измеримых частей, пересекающихся попарно разве что по своим границам, приведем в соответствие сумму (*Римана — Стилтьеса*)

$$S_\rho(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi^j)\, m\Omega_j, \quad \xi^j \in \Omega_j. \tag{1}$$

Интегралом Римана — Стилтьеса от f на Ω (относительно $\alpha(\Delta)$) называется предел

$$\lim S_\rho(f) = \int_\Omega f(x)\, dm, \quad \max d(\Omega_j) \to 0, \tag{2}$$

когда максимальный диаметр $d(\Omega_j)$ стремится к нулю.

Как обычно, этот предел не должен зависеть от выбора последовательности разбиений и точек $\xi^j \in \Omega_j$.

Если $\alpha(\Delta) = |\Delta|$ — n-мерный объем Δ, то (2) есть интеграл Римана от f на Ω.

Вообще, неограниченная функция может оказаться интегрируемой в смысле Римана — Стилтьеса, но если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать разбиение Ω на части положительной меры диаметра меньшего ε, то, так же как в случае интеграла Римана (см. теорему 1 § 12.10), из того, что $f(\mathbf{x})$ интегрируема на Ω (относительно $\alpha(\Delta)$) следует ее ограниченность на Ω.

Основные свойства интеграла Римана — Стилтьеса полностью аналогичны соответствующим свойствам интеграла Римана. Как для последнего можно ввести для ограниченной функции $f(\mathbf{x})$ верхнюю и нижнюю интегральные суммы

$$\overline{S}_\rho = \sum_0^{N-1} M_j m\Omega_j, \quad \underline{S}_\rho = \sum_0^{N-1} m_j m\Omega_j,$$

$$m_j = \inf_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x}), \quad M_j = \sup_{x \in \Omega_j} f(\mathbf{x})$$

и на их основе построить верхний и нижний интегралы $\overline{I}$ и $\underline{I}$. Теоремы переносятся на общий случай без изменений в доказательстве.

Верна и теорема Лебега (см. §§ 12.8, 12.10): для того чтобы ограниченная на замкнутом измеримом (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана) множестве Ω функция f была интегрируемой в смысле

Римана — Стилтьеса, необходимо и достаточно, чтобы ее точки разрыва составляли множество e лебеговой (относительно $\alpha(\Delta)$) меры нуль ($\mu e = 0$, см. ниже § 19.12).

Понятие интеграла Римана —Стилтьеса обобщают еще на так называемые функции $\gamma(\Delta)$ ограниченной вариации, каждая из которых есть разность $\gamma(\Delta) = \alpha_1(\Delta) - \alpha_2(\Delta)$ двух неотрицательных аддитивных функций от $\Delta \subset G$.

Если m_1, m_2 суть соответственно меры (в духе Жордана), порождаемые неотрицательными аддитивными функциями $\alpha_1(\Delta)$, $\alpha_2(\Delta)$, то интеграл Римана — Стилтьеса относительно $\gamma(\Delta)$ определяется как разность интегралов

$$\int_\Omega f(x)\,d\gamma = \int_\Omega f(x)\,dm_1 - \int_\Omega f(x)\,dm_2. \tag{3}$$

Конечно, Ω здесь есть множество, измеримое (в духе Жордана) относительно как $\alpha_1(\Delta)$, так и $\alpha_2(\Delta)$.

Подобным образом на функции $\gamma(\Delta)$ ограниченной вариации обобщают интеграл Стилтьеса (см. ниже § 19.10, заменить m_1, m_2, Ω соответственно на α_1, α_2, G), а также интеграл Лебега — Стилтьеса (см. ниже § 19.12, заменить m_1, m_2 соответственно на μ_1, μ_2).

§ 19.10. Интеграл Стилтьеса

В этом параграфе мы определяем классический интеграл Стилтьеса и выясняем его связь с интегралом Римана — Стилтьеса. Областью, для которой задается интеграл Стилтьеса, является прямоугольник.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ задана на замыкании $\overline{G}$ полуоткрытого прямоугольника

$$G = \{a_i \leqslant x_i < b_i;\quad i = 1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

где определена неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$ от $\Delta \subset G$ (полуоткрытого прямоугольника).

Произвольная прямоугольная сетка дробит G на открытые прямоугольники, которые мы перенумеруем при помощи одного индекса: $\Delta_1, \ldots, \Delta_{N-1}$.

Интегралом Стилтьеса от функции $f(\mathbf{x})$ на G называется предел

$$\lim \sum_0^{N-1} f(\xi^j)\,\alpha(\Delta_j) = \int_G f(\mathbf{x})\,d\alpha, \quad \xi^j \in \overline{\Delta}_j, \tag{2}$$

$$\max d(\Delta^j) \to 0.$$

Это определение отличается от определения интеграла Римана — Стилтьеса. Теперь множество $\Omega = G$ и входящие в его разбиения частичные множества Δ_j — прямоугольники, но не обязательно измеримые (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана).