Римана — Стилтьеса, необходимо и достаточно, чтобы ее точки разрыва составляли множество e лебеговой (относительно $\alpha(\Delta)$) меры нуль ($\mu e = 0$, см. ниже § 19.12).

Понятие интеграла Римана — Стилтьеса обобщают еще на так называемые функции $\gamma(\Delta)$ ограниченной вариации, каждая из которых есть разность $\gamma(\Delta) = \alpha_1(\Delta) - \alpha_2(\Delta)$ двух неотрицательных аддитивных функций от $\Delta \subset G$.

Если m_1, m_2 суть соответственно меры (в духе Жордана), порождаемые неотрицательными аддитивными функциями $\alpha_1(\Delta)$, $\alpha_2(\Delta)$, то интеграл Римана — Стилтьеса относительно $\gamma(\Delta)$ определяется как разность интегралов

$$\int_\Omega f(x)\,d\gamma = \int_\Omega f(x)\,dm_1 - \int_\Omega f(x)\,dm_2. \tag{3}$$

Конечно, Ω здесь есть множество, измеримое (в духе Жордана) относительно как $\alpha_1(\Delta)$, так и $\alpha_2(\Delta)$.

Подобным образом на функции $\gamma(\Delta)$ ограниченной вариации обобщают интеграл Стилтьеса (см. ниже § 19.10, заменить m_1, m_2, Ω соответственно на α_1, α_2, G), а также интеграл Лебега — Стилтьеса (см. ниже § 19.12, заменить m_1, m_2 соответственно на μ_1, μ_2).

§ 19.10. Интеграл Стилтьеса

В этом параграфе мы определяем классический интеграл Стилтьеса и выясняем его связь с интегралом Римана — Стилтьеса. Областью, для которой задается интеграл Стилтьеса, является прямоугольник.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ задана на замыкании $\overline{G}$ полуоткрытого прямоугольника

$$G = \{a_i \leqslant x_i < b_i;\quad i = 1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

где определена неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$ от $\Delta \subset G$ (полуоткрытого прямоугольника).

Произвольная прямоугольная сетка дробит G на открытые прямоугольники, которые мы перенумеруем при помощи одного индекса: $\Delta_1, \ldots, \Delta_{N-1}$.

Интегралом Стилтьеса от функции $f(\mathbf{x})$ на G называется предел

$$\lim \sum_0^{N-1} f\left(\xi^j\right)\alpha(\Delta_j) = \int_G f(\mathbf{x})\,d\alpha, \quad \xi^j \in \overline{\Delta}_j, \tag{2}$$
$$\max d\left(\Delta^j\right) \to 0.$$

Это определение отличается от определения интеграла Римана — Стилтьеса. Теперь множество $\Omega = G$ и входящие в его разбиения частичные множества Δ_j — прямоугольники, но не обязательно измеримые (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана).

Конечно, выражения $\alpha(\Delta_i)$ в (2) можно записать на языке обычной функции, производящей заданную неотрицательную аддитивную функцию $\alpha(\Delta)$.

Например, в одномерном случае

$$\alpha(\Delta)=\beta(y)-\beta(x),\quad \Delta=[x,y),\quad a\leqslant x<y\leqslant b, \tag{3}$$

где $\beta(x)=\alpha(\Delta_x)$, $\Delta_x=[a,x)$, $\beta(a)=0$ — неотрицательная неубывающая на $\overline{G}=[a,b]$ функция. Если положить $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$, $\Delta_j=[x_j,x_{j+1})$, то предел (2) записывается в следующей эквивалентной форме:

$$\lim\sum_{0}^{N-1}f(\xi^j)[\beta(x_{j+1})-\beta(x_j)]=\int_a^b f(x)\,d\beta(x), \tag{4}$$
$$\max(x_{j+1}-x_j)\to 0,$$

которая, кстати, является более употребительной, чем (2) и исторически первой (данной самим Стилтьесом).

Соответствующее эквивалентное выражение для интеграла (2) в двумерном случае записывается через функцию

$$\begin{gathered}F(x,y)=\alpha(\Delta_{xy}),\quad \Delta_{xy}=\{a\leqslant\xi<x,\quad c\leqslant\eta<y\},\\ F(x,c)=F(a,y)=0,\quad (x,y)\in\overline{G},\end{gathered} \tag{5}$$

обладающую свойствами

$$\begin{gathered}\alpha(\Delta)=F(x',y')-F(x,y')-F(x',y)+F(x,y)\geqslant 0,\\ \Delta=\{x\leqslant\xi<x',\quad y\leqslant\eta<y'\}.\end{gathered}$$

Таким образом, если $a=x_0<x_1<\ldots<x_M=b$,

$$c=y_0<y_1<\ldots<y_N=d,$$

$$\Delta_{ij}=\{x_i\leqslant\xi<x_{i+1},\quad y_j\leqslant\eta<y_{j+1}\},\quad (\xi_i,\eta_j)\in\overline{\Delta}_{ij},$$
$$\alpha(\Delta_{ij})=F(x_{i+1},y_{j+1})-F(x_i,y_{i+1})-F(x_{i+1},y_i)+F(x_i,y_i),$$

то предел (2) можно записать в виде

$$\lim\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}f(\xi_i,\eta_i)\,\alpha(\Delta_{ij})=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,d^2F(x,y), \tag{6}$$
$$\max[(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{j+1}-y_j)^2]\to 0.$$

Зададим ограниченную на $\overline{G}$ функцию и для произвольного разбиения ρ

$$\overline{G}=\sum_{0}^{N-1}\Delta_j$$

(на полуоткрытые попарно непересекающиеся прямоугольники) составим сумму Стилтьеса

$$S_\rho = \sum_{i=0}^{N-1} f(\xi^i)\alpha(\Delta_i) \quad (\xi^i \in \overline{\Delta}_i),$$

а также нижнюю и верхнюю суммы

$$\underline{S}_\rho = \sum_{i=0}^{N-1} m_i \alpha(\Delta_i), \quad \overline{S}_\rho = \sum_{i=0}^{N-1} M_i \alpha(\Delta_i)$$

и нижний и верхний интегралы

$$\underline{I} = \sup_\rho \underline{S}_\rho, \quad \overline{I} = \inf_\rho \overline{S}_\rho.$$

Теорема 1. *Для ограниченной на прямоугольнике $\overline{G}$ функции $f(\mathbf{x})$ ($f(\mathbf{x}) \leqslant K$) следующие утверждения эквивалентны:*

2′) *Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется регулярное разбиение ρ_* прямоугольника G (на частичные попарно непересекающиеся полуоткрытые прямоугольники Δ_j^*) такое, что*

$$\overline{S}_{\rho*} - \underline{S}_{\rho*} < \varepsilon.$$

3′) *Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений (регулярных и нерегулярных) с диаметром $d(\Delta_j) < \delta$*

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho < \varepsilon.$$

4′) *Существует интеграл Стилтьеса* (2).

Доказательство 2′) → 3′). Пусть Γ_* есть общая граница всех Δ_j^*, из которой выброшена граница G. Так как ρ_* — регулярное разбиение, то $m\Gamma_* = 0$ и потому существуют фигуры $\sigma \supset \supset \sigma' \supset \supset \Gamma_*$, такие, что $\alpha(\sigma) < \varepsilon/2K$. Пусть δ — расстояние между границами σ и σ' и ρ — разбиение G с частичными прямоугольниками ω диаметра меньшего чем δ (мы пишем их без индексов). Имеем

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \Sigma'(M - m)\alpha(\omega) + \Sigma''(M - m)\alpha(\omega),$$

где сумма Σ' распространена на все ω, каждый из которых имеет общую точку с Γ_*, а Σ'' — на остальные ω.

Дальнейшая оценка ведется точно так же, как в теореме 1 § 12.7 при доказательстве 2) → 3), где надо заменить ω на $\alpha(\omega)$.

3′) → 2′). Это тривиально.

3′) → 4′). Надо рассуждать, как при доказательстве 3) → 4) в теореме 1 § 12.7, если заменить Ω_j на Δ_j и считать, что I есть интеграл (2).

4′) → 3′). Существование интеграла Стилтьеса I влечет неравенство $|I - S_\rho| < \varepsilon/2$ или

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < S_\rho < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех ρ с $d(\Delta_j) < \delta$. Но тогда также $I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}_\rho \leqslant \overline{S} \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho < \varepsilon$.

Замечание. Теорема 1 неверна, если в 2′) вычеркнуть слово «регулярно» (см. ниже пример 1). Это показывает, что в теорему 1 нельзя ввести свойство 1′), выражающее, то $\underline{I} = \overline{I}$ (см. доказательство 1) $\rightleftarrows$ 2) в теореме 1 § 12.7). Из 2′) следует 1′), но из 1′) не следует 2′).

Теорема 2. *Для непрерывной на $\overline{G}$ функции $f(x)$ интеграл Стилтьеса* (2) *существует.*

В самом деле, пусть $\omega(t)$ — модуль непрерывности $f(x)$ на $\overline{G}$. Тогда, если $\delta = \max d(\Delta_i)$, где $G = \sum \Delta_i$ — некоторое разбиение ρ прямоугольника G (в частности, регулярное), то

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum (M_i - m_i)\,\alpha(\Delta_i) \leqslant \omega(\delta) \sum \alpha(\Delta_i) = \omega(\delta)\,\alpha(G) < \varepsilon, \quad \delta < \delta_0,$$

если δ_0 достаточно мало. Но тогда существование интеграла Стилтьеса (2) следует из теоремы 1.

Теорема 3. *Если $\mathbf{x}^0$ есть точка разрыва ограниченной на G функции $f(\mathbf{x})$ и множество ν, состоящее только из этой точки, имеет внешнюю меру $m_e(\nu) > 0$, то интеграл Стилтьеса* (2) *не существует.*

В самом деле, колебание $\omega(\mathbf{x}^0)$ функции f в точке x^0 положительно (см. теорему 5 § 7.10).

Пусть ρ есть разбиение G на частичные прямоугольники Δ_j такое, что x^0 находится строго внутри некоторого Δ_i.

Тогда

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum_j (M_j - m_j)\,\alpha(\Delta_j) \geqslant (M_i - m_i)\,\alpha(\Delta_i) \geqslant \omega(\mathbf{x}^0)\, m_e(\nu),$$

где правая часть положительна и не зависит от указанного разбиения, и так как последнее может состоять из прямоугольников Δ_j как угодно малого диаметра, то в силу теоремы 1 интеграл (2) не существует.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \qquad \beta(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Для (нерегулярного) разбиения $-1 < 0 < 1$ отрезка $\overline{G} = [-1, +1]$, которое обозначим через ρ, имеет место $\underline{S}_\rho = \overline{S}_\rho = 1$, поэтому $\underline{I} = \overline{I}$. Однако интеграл Стилтьеса $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta(x)$ не существует, потому что $x = 0$ есть точка разрыва как f, так и β (см. теорему 3).

Утверждение 2′) $\to$ 3′) в теореме 1 можно выразить еще так.

Теорема 4. *Если для некоторой последовательности регулярных разбиений ρ_k существует предел*

$$I = \lim_{k\to\infty} S_{\rho_k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N_k} f(\xi_k^j)\,\alpha(\Delta_j^k) \tag{7}$$

при любом выборе $\xi_k^j \in \overline{\Delta}_j^k$, *то существует интеграл Стилтьеса* (2), *равный* I (см. § 12.7 теорему 2).

Ведь из (7) следует, что $\overline{S}_{\rho_k} - \underline{S}_{\rho_k} \to 0$ $(k \to \infty)$, т. е. 2′). Но 2′) → 3′), следовательно, существует интеграл, равный, очевидно, I.

Теорема 5. *Для измеримого прямоугольника* G *интеграл Стилтьеса* (2) *и интеграл Римана — Стилтьеса* (2) *от ограниченной функции* $f(\mathbf{x})$ *существуют одновременно и равны между собой.*

В самом деле, зададим последовательность регулярных разбиений ρ_k прямоугольника G на частичные прямоугольники Δ_j^k с $\max\limits_j d(\Delta_j^k) \to 0$ $(k \to \infty)$. Все Δ_j^k, даже прилегающие к граням G, теперь измеримы, потому что G измерим.

Существование предела (7) необходимо и достаточно для существования как интеграла Стилтьеса (теорема 4), так и интеграла Римана — Стилтьеса (в силу аналога теоремы 2 § 12.7).

Таким образом, при измеримом G свойства интеграла Римана — Стилтьеса, о которых шла речь в § 19.9, автоматически переносятся на интеграл Стилтьеса. В частности, справедлива для измеримого G.

Теорема 6 (Лебега). *Для того чтобы для ограниченной на* $\overline{G}$ *функции* $f(\mathbf{x})$ *существовал интеграл Стилтьеса* (2), *необходимо и достаточно, чтобы лебегова (в смысле* $\alpha(\Delta)$*) мера множества* e *ее точек разрыва была равной нулю* $(\mu e = 0)$.

На самом деле теорема 6 верна и для неизмеримого G. Она содержит как частный случай теоремы 2 и 3. Докажем это.

Введем произвольный измеримый прямоугольник $G' \supset\supset G$. Функцию $\alpha(\Delta)$ будем считать продолженной на G', как в (1) § 19.6. Что же касается функции f, то продолжим ее на G' следующим образом. Пусть точка $\xi' \in G' - G$. Отрезок, соединяющий ее с центром G, пересекает границу Γ прямоугольника G в точке, которую обозначим через ξ. Положим $f(\xi') = f(\xi)$. Таким образом, продолженная функция постоянна на принадлежащих к $G' - G$ отрезках лучей, выходящих из центра G.

Продолженная функция f, очевидно, ограничена на G'. Кроме того, функция f непрерывна в точке ξ', если она непрерывна в ней относительно $\overline{G}$. Далее, если $\Delta' \subset G'$ есть прямоугольник, пересекающий Γ, и $\xi' \in \overline{\Delta}'$, то можно указать на $\overline{\Delta}'$, где $\Delta = G\Delta'$, точку ξ такую, что

$$f(\xi')\alpha(\Delta') = f(\xi)\alpha(\Delta). \tag{8}$$

Действительно, $\alpha(\Delta') = \alpha(\Delta)$ (см. (1) § 19.6). Если $\xi' \in \Delta$, то полагаем $\xi = \xi'$, а если $\xi' \overline{\in} \Delta$, то в качестве ξ берем точку пересечения с Γ отрезка, соединяющего ξ' с центром G.

Если ρ' есть произвольное регулярное разбиение прямоугольника G', то оно индуцирует регулярное же разбиение ρ прямоугольника G. При этом каждой интегральной сумме $S_{\rho'}$ можно привести в соответствие равную ей интегральную сумму S_ρ,

$$S_{\rho'} = \sum f(\xi')\,\alpha(\Delta') = \sum f(\xi)\,\alpha(\Delta) = S_\rho,$$

руководствуясь следующими соображениями.

Если Δ' не пересекается с G, то соответствующее слагаемое $S_{\rho'}$ выбрасываем — оно все равно нулю. Если же Δ' пересекается с G, то к соответствующему слагаемому применяем равенство (8).

Наоборот, если задано регулярное разбиение ρ прямоугольника G, то, продолжив составляющие его регулярные сечения G ($(n-1)$-мерные плоскости) и выбросив грани G, получим регулярное же разбиение ρ' прямоугольника G' и, рассуждая, как выше, в обратном порядке (даже не передвигая точки ξ), получим, что каждой интегральной сумме S_ρ соответствует равная ей сумма $S_{\rho'}$.

Из сказанного следует равенство интегралов Стилтьеса

$$\int_G f(x)\,d\alpha = \int_{G'} f(x)\,d\alpha, \tag{9}$$

(существование одного из них влечет существование другого).

Но второй из них есть также интеграл Римана — Стилтьеса (G' измеримо!), и потому он существует тогда и только тогда, когда множество e' точек разрыва f на $\overline{G}'$ имеет лебегову (относительно $\alpha(\Delta)$) меру

$$\mu e' = 0 \tag{10}$$

или, что все равно, если множество e точек разрыва f на $\overline{G}$ имеет лебегову (относительно $\alpha(\Delta)$) меру

$$\mu e = 0. \tag{11}$$

В самом деле, существование левого интеграла в (9) влечет существование правого и равенство (10), следовательно (11), так как $e \subset e'$.

Наоборот, из (11) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует счетная система прямоугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ такая, что $\sum \Delta_j \supset e$ и $\sum \alpha(\Delta_j) < \varepsilon$. Прибавим к ней систему (конечную) полуоткрытых прямоугольников, составляющих множество $G' - G$. Для полученной системы, которую мы заново перенумеруем — $\Delta_1', \Delta_2', \ldots$, будет выполняться $\sum \Delta_j' \supset e'$ и $\sum \alpha(\Delta_j') < \varepsilon$, потому что $\alpha(G' - G) = 0$, т. е. (10). Но тогда существует правый интеграл в (9), а вместе с ним и левый.

Теорема 7. *Пусть для полуинтервалов, принадлежащих $[a, b)$ и $[c, d)$, заданы соответственно неотрицательные полуаддитивные функции $\alpha_1(\Delta_1)$, $\alpha_2(\Delta_2)$, порождающие функцию*

$$\alpha(\Delta) = \alpha_1(\Delta_1)\cdot\alpha_2(\Delta_2),$$

$$\Delta_1 = \{\lambda \leqslant x < \mu\},\ \Delta_2 = \{\nu \leqslant y < \omega\},$$

$$\Delta = \{\lambda \leqslant x < \mu,\ \nu \leqslant y < \omega\} = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset G,\ G = [a, b) \times [c, d),$$

Тогда для ограничённой функции $f(x, y)$ справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x, y)\, d\alpha = \int\limits_c^d d\alpha_2 \int\limits_a^b f(x, y)\, d\alpha_1$$

в предположении, что интеграл слева существует, и тогда автоматически следует существование повторного интеграла справа, где, впрочем, для каждого $y \in [c, d)$ внутренний интеграл (по x) понимается либо в обычном смысле как интеграл Стилтьеса, если он существует, либо как любое число, находящееся между нижним и верхним интегралами Стилтьеса от $f(x, y)$ относительно α_1 на $[a, b]$.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1 § 12.12.

Для интеграла Стилтьеса справедливы теоремы, аналогичные теоремам для Риманова интеграла и применимо замечание к равенству (3) § 19.7.

Упражнения.

1. Показать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\beta(x) = \int\limits_a^b f(x)\, \beta'(x)\, dx,$$

где $\beta(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную $\beta'(x) \geqslant 0$.

2. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $c_0, c_1, \ldots$, — последовательность неотрицательных чисел, для которой $\sum c_j < \infty$, точки $x_j \in [a, b]$, $j = 1, 2, \ldots$, и

$$\beta(x) = \sum_{x_j \in [a, x)} c_j. \qquad (12)$$

Показать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\beta(x) = \sum_{x_j \in [a, x)} f(x_j)\, c_j.$$

3. Показать, что функция, определенная формулой (12), где c_j — числа любого знака, но такие, что $\sum |c_j| < \infty$, есть функция ограниченной вариации, т. е. представляется как разность двух неубывающих на $[a, b]$ функций.

4. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и не убывают (или ограниченной вариации). Доказать формулу

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\varphi(x) + \int\limits_a^b \varphi(x)\, df(x) = f(b)\,\varphi(b) - f(a)\,\varphi(a).$$

5. Иногда уславливаются считать функцию $f(x)$, заданную на прямоугольнике G, интегрируемой относительно $\alpha(\Delta)$, если ее верхний интеграл $\bar{I}$ (относительно $\alpha(\Delta)$) равен нижнему — $\underline{I}$, и полагают

$$I = I(f) = \int\limits_G f(\mathrm{x})\, d\alpha, \qquad \text{где } I = \underline{I} = \bar{I}.$$

Это *обобщение интеграла Стилтьеса* (см. выше пример 1). Чтобы разобраться в нем, отметим, что для ограниченной функции f следующие утверждения эквивалентны:

1 *) $\underline{I} = \bar{I} = I$;

2 *) существует последовательность разбиений $\rho_k \left(G = \sum\limits_j \Delta_k^j\right)$, для которой

$$\bar{S}_{\rho_k} - \underline{S}_{\rho_k} \to 0, \quad k \to \infty;$$

3 *) существует последовательность разбиений ρ_k, для которой

$$\lim_{k\to\infty} S_{\rho_k} = I \quad \text{при любых } \xi_k^j \in \Delta_k^j.$$

В самом деле, из 2 *) и неравенств $\underline{S}_{\rho_k} \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant \bar{S}_{\rho_k}$, $\underline{S}_{\rho_k} \leqslant S_{\rho_k} \leqslant \bar{S}_{\rho_k}$ следует 3 *) (при тех же ρ_k). Далее, из 3 *) следует, что

$$\lim \underline{S}_{\rho_k} = \lim \bar{S}_{\rho_k} = I. \tag{13}$$

Если теперь ρ — произвольное разбиение и $\rho_k^* = \rho + \rho_k$, то $\underline{S}_\rho \leqslant \underline{S}_{\rho_k^*} \leqslant \bar{S}_{\rho_k^*} \leqslant \bar{S}_{\rho_k} \to I$, $k \to \infty$, т. е. $\underline{S}_\rho \leqslant I$, поэтому, учитывая (13), получим $\underline{I} = I$. Аналогично устанавливается, что 3 *) влечет $\bar{I} = I$. Этим доказано, что 3 *) $\to$ 1 *). Далее, если $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, то из 1 *) следует существование разбиений ρ_k', ρ_k'' таких, что $I - \varepsilon_k < \underline{S}_{\rho_k'}$, $\bar{S}_{\rho_k''} < I + \varepsilon_k$, поэтому для $\rho_k = \rho_k' + \rho_k''$ будем иметь $I - \varepsilon_k < \underline{S}_{\rho_k'} \leqslant \underline{S}_{\rho_k} \leqslant \bar{S}_{\rho_k} \leqslant \bar{S}_{\rho_k''} < I + \varepsilon_k$, что доказывает 2 *).

Таким образом, обобщенный интеграл Стилтьеса можно также определить как число I, для которого имеет место 3 *) для некоторой последовательности разбиений ρ_k.

Если эту последовательность можно взять состоящей из регулярных ρ_k, то, согласно теореме 4, число I есть обычный интеграл Стилтьеса. В противном случае мы будем иметь дело с новым понятием — обобщенным интегралом Стилтьеса. Это понятие может оказаться полезным для функций, не удовлетворяющих условию Лебега в смысле $\alpha(\Delta)$ (см. теорему 6).

Пользуясь свойствами 2 *) и 3 *), читатель сам докажет (см. теоремы 1, 2, 4 § 12.11) что вместе с f и φ интегрируемы в указанном смысле $Af + B\varphi$, $|f|$, $f\varphi$, φ^{-1} ($|\varphi(x)| > a > 0$), и справедливы соотношения

$$I(Af + B\varphi) = AI(f) + BI(\varphi),$$
$$|I(f)| \leqslant K \sup_{x\in G} |f(x)|,$$

характеризующие линейные и непрерывные свойства функционала $I(f)$. Здесь A, B — произвольные числа, а K — константа, зависящая от обобщенной меры $\alpha(\Delta)$, а $I(f)$ — обобщенный интеграл Стилтьеса.

В одномерном случае $K = \beta(b) - \beta(a)$, в двумерном $K = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$.

Предлагается также доказать равенство

$$\int_G f(x)\, d\alpha = \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_j} f(x)\, dx,$$

где $G=\sum_{j=1}^{n} \Delta^j$ и Δ^j — попарно непересекающиеся прямоугольники, в предположении, что интеграл слева существует.

§ 19.11. Обобщенный интеграл Лебега

Понятие интеграла Лебега может быть обобщено следующим образом.

Пусть X есть множество элементов $\mathbf{x}$ любой природы и $\mathfrak{M}$ есть некоторая система его подмножеств e ($e \subset X$), образующая кольцо. Это значит, что вместе с подмножествами e_1 и e_2 принадлежит $\mathfrak{M}$ их сумма e_1+e_2, разность e_1-e_2 и пересечение e_1e_2. По индукции доказывается, что конечная сумма $e=\sum e_k$, $e_k \in \mathfrak{M}$ принадлежит $\mathfrak{M}$.

На кольцо $\mathfrak{M}$ накладывается еще дополнительное условие: если $e_k \in \mathfrak{M}$ для любого $k=1, 2, \ldots$ и $e=\Sigma e_k$ — счетная сумма, принадлежащая к некоторому множеству $\mathscr{E} \in \mathfrak{M}$ ($e \subset \mathscr{E}$), то $e \in \mathfrak{M}$.

Пусть теперь каждому множеству $e \in \mathfrak{M}$ приведено в соответствие неотрицательное (конечное) число μe, обладающее тем свойством, что если множество $e \in \mathfrak{M}$ представляется в виде конечной или счетной суммы $e=\sum e_k$ попарно непересекающихся множеств $e_k \in \mathfrak{M}$, то

$$\mu e=\sum \mu e_k. \tag{1}$$

Определенная таким образом неотрицательная функция множества μe ($e \in \mathfrak{M}$) называется мерой Лебега. Мы ее еще называем *обобщенной мерой Лебега*, чтобы отличать ее от ее частного случая, рассмотренного в § 19.3, где роль X играет n-мерное пространство, а $\mathfrak{M}$ — совокупность определенных там измеримых множеств.

Множества $e \in \mathfrak{M}$ мы будем называть *измеримыми*. Если какое-либо множество $\mathscr{E} \subset X$ есть часть измеримого множества e ($\mathscr{E} \subset e$), то будем его называть *ограниченным*.

В силу этих соглашений для обобщенной меры Лебега верны теоремы 3—9 § 19.1. Теоремы 3, 4, 5 верны просто по определению (см. равенство (1)), теоремы же 6—9 доказываются без каких-либо изменений.

На основе введенной меры определяется понятие *измеримой функции*, как в § 19.2. Вообще все сказанное в § 19.2 полностью переносится на случай обобщенной меры Лебега, за исключением теоремы 4 и утверждения (на стр. 345) о непрерывной функции. Мы не ввели топологии в X (системы окрестностей и т. д.), и в общем случае не имеет смысла говорить о непрерывной функции, заданной на X.

Интеграл Лебега на множестве E, измеримом в смысле обобщенной меры, от функции $f(\mathbf{x})$, измеримой в смысле этой меры,