где $G=\sum_{j=1}^{n}\Delta^j$ и Δ^j — попарно непересекающиеся прямоугольники, в предположении, что интеграл слева существует.

§ 19.11. Обобщенный интеграл Лебега

Понятие интеграла Лебега может быть обобщено следующим образом.

Пусть X есть множество элементов $\mathbf{x}$ любой природы и $\mathfrak{M}$ есть некоторая система его подмножеств e $(e\subset X)$, образующая кольцо. Это значит, что вместе с подмножествами e_1 и e_2 принадлежит $\mathfrak{M}$ их сумма e_1+e_2, разность e_1-e_2 и пересечение e_1e_2. По индукции доказывается, что конечная сумма $e=\sum e_k$, $e_k\in\mathfrak{M}$ принадлежит $\mathfrak{M}$.

На кольцо $\mathfrak{M}$ накладывается еще дополнительное условие: если $e_k\in\mathfrak{M}$ для любого $k=1, 2, \ldots$ и $e=\Sigma_{e_k}$ — счетная сумма, принадлежащая к некоторому множеству $\mathscr{E}\in\mathfrak{M}(e\subset\mathscr{E})$, то $e\in\mathfrak{M}$.

Пусть теперь каждому множеству $e\in\mathfrak{M}$ приведено в соответствие неотрицательное (конечное) число μe, обладающее тем свойством, что если множество $e\in\mathfrak{M}$ представляется в виде конечной или счетной суммы $e=\sum e_k$ попарно непересекающихся множеств $e_k\in\mathfrak{M}$, то

$$\mu e=\sum \mu e_k. \tag{1}$$

Определенная таким образом неотрицательная функция множества μe $(e\in\mathfrak{M})$ называется мерой Лебега. Мы ее еще называем *обобщенной мерой Лебега*, чтобы отличать ее от ее частного случая, рассмотренного в § 19.3, где роль X играет n-мерное пространство, а $\mathfrak{M}$ — совокупность определенных там измеримых множеств.

Множества $e\in\mathfrak{M}$ мы будем называть *измеримыми*. Если какое-либо множество $\mathscr{E}\subset X$ есть часть измеримого множества e $(\mathscr{E}\subset e)$, то будем его называть *ограниченным*.

В силу этих соглашений для обобщенной меры Лебега верны теоремы 3—9 § 19.1. Теоремы 3, 4, 5 верны просто по определению (см. равенство (1)), теоремы же 6—9 доказываются без каких-либо изменений.

На основе введенной меры определяется понятие *измеримой функции*, как в § 19.2. Вообще все сказанное в § 19.2 полностью переносится на случай обобщенной меры Лебега, за исключением теоремы 4 и утверждения (на стр. 345) о непрерывной функции. Мы не ввели топологии в X (системы окрестностей и т. д.), и в общем случае не имеет смысла говорить о непрерывной функции, заданной на X.

Интеграл Лебега на множестве E, измеримом в смысле обобщенной меры, от функции $f(\mathbf{x})$, измеримой в смысле этой меры, определяется как предел

$$\lim_{\delta_k \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} p_k m e_k = \int_E f(x)\,\mu(d\mathbf{x}),$$

где p_k, e_k, δ_k определяются, как в § 19.3 (см. (2), (3), (4) § 19.3) и мера e_k понимается в рассматриваемом обобщенном смысле.

Свойства интеграла Лебега, перечисленные в § 19.3, за исключением быть может свойства 19 (теорема Фубини) и свойства 22, переносятся на рассматриваемый случай без изменения доказательств.

Важным примером рассмотренного обобщенного интеграла является интеграл Лебега — Стилтьеса.

§ 19.12. Интеграл Лебега — Стилтьеса

Пусть задан полуоткрытый прямоугольник

$$G = \{a_i \leqslant x_i < b_i;\ \ i = 1, \ldots, m\}$$

и для принадлежащих к нему прямоугольников Δ определена неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$. В § 19.8 на основе $\alpha(\Delta)$ была построена мера в духе жордановой меры. В этом параграфе будет определена на основе $\alpha(\Delta)$ для некоторых множеств $\mathscr{E} \subset G$ мера в духе Лебега. Мы ее будем называть мерой относительно $\alpha(\Delta)$, коротко — мерой и обозначать $\mu\mathscr{E}$ (так же как мы обозначали лебегову меру!).

Мы будем пользоваться введенными в § 19.8 понятиями $m_i\mathscr{E}$, $m_e\mathscr{E}$, $m\mathscr{E}$, внутренней, внешней меры и меры в духе Жордана относительно $\alpha(\Delta)$.

Называя $\mathscr{E}$ множеством, мы будем подразумевать, что $\mathscr{E} \subset G$, и как всегда через F, G обозначать соответственно замкнутые и открытые множества. Кроме того, по-прежнему будем пользоваться обозначением $A \subset\subset B$, выражающим, что $\overline{A} \subset \widetilde{B}$, где $\overline{A}$ — замыкание A, а $\widetilde{B}$ — открытое ядро B (множество внутренних точек B).

Для открытого множества g по определению полагаем (пояснения ниже)

$$\mu g = m_i g = \sup_{\sigma \subset\subset g} \alpha(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(\Delta_k), \tag{1}$$

где

$$g = \sum_{1}^{\infty} \Delta_k,\ \ \Delta_k \subset\subset g \tag{2}$$

— сумма полуоткрытых непересекающихся попарно прямоугольников Δ_k, каждый из которых имеет границу, не имеющую общих точек с границей g.