определяется как предел

$$\lim_{\delta_k\to 0}\sum_{-\infty}^{\infty} p_k m e_k = \int_E f(x)\,\mu(d\mathbf{x}),$$

где p_k, e_k, δ_k определяются, как в § 19.3 (см. (2), (3), (4) § 19.3) и мера e_k понимается в рассматриваемом обобщенном смысле.

Свойства интеграла Лебега, перечисленные в § 19.3, за исключением быть может свойства 19 (теорема Фубини) и свойства 22, переносятся на рассматриваемый случай без изменения доказательств.

Важным примером рассмотренного обобщенного интеграла является интеграл Лебега — Стилтьеса.

§ 19.12. Интеграл Лебега — Стилтьеса

Пусть задан полуоткрытый прямоугольник

$$G = \{a_i \leqslant x_i < b_i;\ \ i = 1, \ldots, m\}$$

и для принадлежащих к нему прямоугольников Δ определена неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$. В § 19.8 на основе $\alpha(\Delta)$ была построена мера в духе жордановой меры. В этом параграфе будет определена на основе $\alpha(\Delta)$ для некоторых множеств $\mathscr{E} \subset G$ мера в духе Лебега. Мы ее будем называть мерой относительно $\alpha(\Delta)$, коротко — мерой и обозначать $\mu\mathscr{E}$ (так же как мы обозначали лебегову меру!).

Мы будем пользоваться введенными в § 19.8 понятиями $m_i\mathscr{E}$, $m_e\mathscr{E}$, $m\mathscr{E}$, внутренней, внешней меры и меры в духе Жордана относительно $\alpha(\Delta)$.

Называя $\mathscr{E}$ множеством, мы будем подразумевать, что $\mathscr{E} \subset G$, и как всегда через F, G обозначать соответственно замкнутые и открытые множества. Кроме того, по-прежнему будем пользоваться обозначением $A \subset\subset B$, выражающим, что $\overline{A} \subset \widetilde{B}$, где $\overline{A}$ — замыкание A, а $\widetilde{B}$ — открытое ядро B (множество внутренних точек B).

Для открытого множества g по определению полагаем (пояснения ниже)

$$\mu g = m_i g = \sup_{\sigma \subset\subset g} \alpha(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(\Delta_k), \tag{1}$$

где

$$g = \sum_{1}^{\infty} \Delta_k,\ \ \Delta_k \subset\subset g \tag{2}$$

— сумма полуоткрытых непересекающихся попарно прямоугольников Δ_k, каждый из которых имеет границу, не имеющую общих точек с границей g.

Заметим, что открытое ядро $\tilde{\sigma}$ фигуры σ можно представить в виде суммы $\tilde{\sigma} = \sum_{1}^{\infty} \Delta_k$ непересекающихся попарно $\Delta_k \subset\subset \sigma$, и так как $\sum_{1}^{N} \Delta_k \subset \sigma$, то $\sum_{1}^{N} \alpha(\Delta_k) \leqslant \alpha(\sigma)$ при любом N и, следовательно,

$$\mu(\tilde{\sigma}) = \sum_{1}^{\infty} \alpha(\Delta_k) \leqslant \alpha(\sigma). \tag{3}$$

Для замкнутого множества F по определению (пояснения ниже)

$$\mu F = \alpha_e F = \inf_{\sigma \supset\supset F} \alpha(\sigma) = \inf_{g \supset F} \mu g. \tag{4}$$

Чтобы объяснить последнее равенство, обозначим левую его часть через I', а через I'' правую. Так как $\sigma \supset\supset F$, то $\tilde{\sigma} \supset\supset F$. Но $\tilde{\sigma}$ открыто, поэтому $\alpha(\sigma) \geqslant \mu(\tilde{\sigma}) \geqslant I''$, т. е. $I' \geqslant I''$.

С другой стороны, если представить любое $g \supset F$ в виде суммы вида (2), то в силу замкнутости F найдется N такое, что

$$\sigma = \sum_{1}^{N} \Delta_k \supset\supset F,$$

откуда $\mu(g) \geqslant \alpha(\sigma) \geqslant I'$, т. е. $I'' \geqslant I'$.

Следовательно, $I' = I''$.

Докажем для любой полуоткрытой фигуры σ неравенство

$$\alpha(\sigma) \leqslant \mu(\bar{\sigma}). \tag{5}$$

Пусть $g \supset \bar{\sigma}$ — произвольное открытое множество, представленное в виде (2). Вследствие замкнутости $\bar{\sigma}$ найдется N такое, что

$$\sigma \subset \bar{\sigma} \subset \sum_{1}^{N} \Delta_k \subset g.$$

Но тогда

$$\alpha(\sigma) \leqslant \sum_{1}^{N} \alpha(\Delta_k) \leqslant \mu g,$$

и так как нижняя грань всех рассматриваемых μg равна $\mu(\bar{\sigma})$, то получим (5).

Из введенных определений легко следует, что если $F \subset F'$ $g \subset g'$, то $\mu F \leqslant \mu F'$, $\mu g \leqslant \mu g'$. Кроме того, так как $F \subset F$ и верно (4), то

$$\mu F = \sup_{F' \subset F} \mu F' = \inf_{g \supset F} \mu g. \tag{6}$$

Но справедливы также равенства

$$\mu g = \sup_{F \subset g} \mu F = \inf_{g' \supset g} \mu g'. \tag{7}$$

Второе из них очевидно, потому что $g \supset g$. Чтобы обосновать первое, обозначим второй член этой цепи через I. Так как $\mu F \leqslant \mu g$ (см. (4)), то $I \leqslant \mu g$. С другой стороны, представим g в виде (2) и положим $\sigma_N = \sum_1^N \Delta_k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $(\bar{\sigma}_N \subset g)$

$$\mu g - \varepsilon < \sum_1^N \alpha(\Delta_k) = \alpha(\sigma_N) \leqslant \mu(\bar{\sigma}_N) \leqslant I,$$

и так как ε произвольно, то $\mu g \leqslant I$. Следовательно, $\mu g = I$.

По определению внутренней мерой относительно $\alpha(\Delta)$ множества $\mathscr{E}$ будем называть

$$\mu_i \mathscr{E} = \sup_{F \subset \mathscr{E}} \mu F$$

и внешней мерой относительно $\alpha(\Delta)$ множества $\mathscr{E}$ будем называть

$$\mu_e \mathscr{E} = \inf_{g \supset \mathscr{E}} \mu g.$$

Если $\mu_i \mathscr{E} = \mu_e \mathscr{E}$, то будем говорить, что множество $\mathscr{E}$ *измеримо* (*в смысле меры относительно* $\alpha(\Delta)$) и число $\mu \mathscr{E} = \mu_i \mathscr{E} = \mu_e \mathscr{E}$ называть *обобщенной мерой* или *мерой* $\mathscr{E}$ *относительно* $\alpha(\Delta)$.

Из равенств (6) и (7) следует, что замкнутое и открытое (принадлежащие G) множества измеримы (в указанном смысле).

Рассматриваемые здесь измеримые (в обобщенном смысле) множества имеют основные свойства, аналогичные соответствующим свойствам классических измеримых по Лебегу множеств. Ниже мы их перечисляем.

Вместе с $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ измеримы также их сумма, разность и пересечение, к тому же, если $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ не пересекаются, то

$$\mu(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2) = \mu \mathscr{E}_1 + \mu \mathscr{E}_2.$$

Сумма e счетного числа (принадлежащих к G) измеримых множеств $e_1, e_2, \ldots$ измерима, и если они не пересекаются, то

$$\mu e = \sum_1^\infty \mu e_k.$$

Пересечение счетного числа измеримых множеств измеримо.

Перечисленные утверждения и другие вытекающие из них в случае лебеговой меры составляют теоремы 1—9 § 19.1. Их доказательство в общем случае совершенно аналогично.

Эти теоремы базировались на леммах 1—5. Они тоже доказываются аналогично. Надо заменить в них $|\Delta_k|$, $|\sigma_k|$ соответственно на $\alpha(\Delta_k)$, $\alpha(\sigma_k)$, а в остальном учесть следующие замечания.

Формулировку леммы 1 надо заменить на следующую: из (3) следует (4), где σ_k и σ'_k — полуоткрытые фигуры, из коих σ_k попарно не пересекаются. В формулировке леммы 2 выбросить последнее выражение: «обращающееся в равенство...»

Отметим еще неравенства, аналогичные (14) § 19.1:

$$m_i\mathscr{E} \leqslant \mu_i\mathscr{E} \leqslant \mu_e\mathscr{E} \leqslant m_e\mathscr{E}. \tag{8}$$

Они следуют из того, что (см. (3), (5))

$$\sup_{\sigma\subset\subset\mathscr{E}} \alpha(\sigma) \leqslant \sup_{\bar{\sigma}\subset\subset\mathscr{E}} \mu\bar{\sigma} \leqslant \sup_{F\subset\mathscr{E}} \mu F,$$

$$\inf_{\sigma\supset\supset\mathscr{E}} \alpha(\sigma) \geqslant \inf_{\tilde{\sigma}\supset\supset\mathscr{E}} \mu\tilde{\sigma} = \inf_{g\supset\mathscr{E}} \mu g.$$

Из (8) вытекает, что *если множество $\mathscr{E}$ измеримо (в смысле $\alpha(\Delta)$) в жордановом духе, то и в лебеговом.*

Отметим, что в жордановой теории (в смысле $\alpha(\Delta)$) нам пришлось считаться с фактом, что некоторые прямоугольники могли быть неизмеримыми. В рассматриваемой же здесь теории этого недостатка нет. Замкнутые и открытые прямоугольники измеримы, ведь они суть соответственно замкнутые и открытые множества. Произвольный полуоткрытый прямоугольник

$$\Delta = \{\lambda_i \leqslant x_i < \mu_i; \quad i = 1, \ldots, n\}$$

тоже измерим, ведь он есть разность двух замкнутых множеств. Однако не нужно думать, что $\mu\Delta$ обязательно равна $\alpha(\Delta)$ (см. ниже упражнения 1, 2).

Множество ω, состоящее из одной точки, в жордановой теории (в смысле $\alpha(\Delta)$) имеет внутреннюю меру $m_i\omega = 0$ и, таким образом, измеримо тогда и только тогда, когда $m_e\omega = 0$. В рассматриваемой же здесь теории ω измеримо при любой $\alpha(\Delta)$, ведь оно замкнуто. Его мера равна внешней жордановой мере: $\mu\omega = m_e\omega$.

В классической теории Лебега на основе меры Лебега вводится понятие измеримой функции. В точности также вводится понятие измеримой функции на основе меры относительно $\alpha(\Delta)$. Все, что изложено по этому поводу в § 19.2, полностью и без всяких изменений переносится на общий случай, нужно только меру Лебега встречающихся там множеств заменить соответственно на их меру в смысле $\alpha(\Delta)$. Впрочем, в теореме 4 выражение «интегрируемая по Риману функция» надо заменить на «интегрируемая по Риману — Стилтьесу функция».

Наконец, в точности так же как вводится интеграл Лебега на основе понятия измеримой (по Лебегу) функции, вводится интеграл Лебега — Стилтьеса, но только уже на основе понятия измеримой в обобщенном смысле функции (в смысле $\alpha(\Delta)$).

Таким образом, интеграл Лебега — Стилтьеса может быть определен как один из пределов

$$\int\limits_{\mathscr{E}} f(x)\, d\mu = \lim_{\delta_R \to 0} \underline{S}_R(f) = \lim_{\delta_R \to 0} \overline{S}_R(f). \tag{9}$$

Здесь $f(\mathbf{x})$ измеримая (в смысле μ или относительно $\alpha(\Delta)$) на множестве $\mathscr{E}$ функция, а $\underline{S}_R(f)$ и $\overline{S}_R(f)$ нижняя и верхняя интегральные суммы, определяемые в точности так же, как они определялись в § 19.3 в случае классического интеграла Лебега, но теперь множества e_k(см. начало § 19.3) измеримы в смысле μ и их меры μe_k понимаются в смысле μ (или относительно $\alpha(\Delta)$).

Определения справа в (9) приведены только для примера. Вообще весь § 19.3 со всеми формулировками и доказательствами переносится на интеграл Лебега — Стилтьеса.

Конечно, всюду в написанных там интегралах надо dx заменить на $d\mu$ и термин «интеграл Лебега» заменить на «интеграл Лебега — Стилтьеса». В свойстве 6 выражения «f интегрируема по Риману», «жорданова мера», «пересекаются попарно разве что по своим границам» надо соответственно заменить на «f интегрируема по Риману — Стилтьесу», «жорданова мера относительно $\alpha(\Delta)$», «попарно не пересекаются по множествам меры нуль». Свойство 15, утверждающее равенство несобственного абсолютно сходящегося интеграла Римана от f и интеграла Лебега от f, тоже переносится на общий случай, если по аналогии определить несобственный интеграл Римана — Стилтьеса.

Свойство 19 (теорема Фубини) непосредственно переносится на общий случай, если считать, что заданы две неотрицательные аддитивные функции $\alpha_1(\delta_1)$, $\alpha'(\delta')$ полуинтервала $\delta_1 = \{0 \leqslant x_1 < a\}$ и полуоткрытого прямоугольника $\delta' = \{0 \leqslant x_i < a,\ i = 2, \ldots, n\}$, которые порождают функцию $\alpha(\delta) = \alpha(\delta_1)\ \alpha(\delta')$, $\delta = \delta_1 \times \delta' = \Delta$ (см. свойство 19 из § 19.3). Тогда, если обозначить определяемые этими тремя функциями меры соответственно через μ, μ_1, μ', то верна формула (34) с приведенными к ней пояснениями, где надо только заменить dx, dx_1, dy соответственно на $d\mu$, $d\mu_1$, $d\mu'$.

Доказательство этой новой формулы такое же, как доказательство (34) § 19.3.

Остановимся еще на одном вопросе, который может дать представление о связи между интегралами Лебега и Лебега — Стилтьеса.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная интегрируемая на нем по Лебегу функция $\beta(x)$. Положим

$$\beta(x) = \int\limits_a^x \beta'(t)\, dt, \qquad x \in [a, b].$$

Тогда, как мы знаем (см. § 19.5 (11)) $\beta(x)$ есть абсолютно непрерывная функция, а $\beta'(x)$ — ее обобщенная производная (на $[a, b]$). К тому же в силу условия $\beta'(x) \geqslant 0$ функция $\beta(x)$ не убывает на $[a, b]$ и может рассматриваться как производящая функция для неотрицательной аддитивной функции полуинтервала $\alpha(\Delta) = \beta(d) - \beta(c)$, $\Delta = [c, d) \subset G = [a, b)$.

Заметим, что можно было бы исходить от неубывающей абсолютно непрерывной на $[a, b]$ функции $\beta(x)$ и показать, что ее обобщенная производная $\beta'(x)$ неотрицательна почти всюду на $[a, b]$.

Функция $\alpha(\Delta)$ определяет меру.

Если $g \subset [a, b]$ — открытое множество, т. е. есть сумма не более чем счетного числа интервалов (c_k, d_k), $k = 1, 2, \ldots$, то оно измеримо как в смысле Лебега, так и в смысле Лебега относительно $\alpha(\Delta)$, и его мера во втором смысле равна

$$\mu g = \int_g d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} [\beta(d_k) - \beta(c_k)] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{c_k}^{d_k} \beta'(t)\,dt = \int_g \beta'(t)\,dt,$$

и мы доказали формулу

$$\int_g d\mu = \int_g \beta'(t)\,dt. \tag{10}$$

Эта формула легко обобщается на любое множество $\mathscr{E}$, измеримое одновременно в обоих смыслах:

$$\int_{\mathscr{E}} d\mu = \int_{\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt. \tag{11}$$

Для этого достаточно взять нижнюю грань от обеих частей (10) по всем $g \supset \mathscr{E}$. Ведь

$$\int_{\mathscr{E}} d\mu = \mu\mathscr{E} = \inf_{g \supset \mathscr{E}} \mu g = \inf_{g \supset \mathscr{E}} \int_g d\mu.$$

С другой стороны, в силу неотрицательности $\beta'(x)$

$$\int_g \beta'(t)\,dt \geqslant \int_{\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt, \quad g \supset \mathscr{E},$$

и в силу измеримости $\mathscr{E}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое g, что (см. § 19.3 свойство 11 интеграла Лебега)

$$\int_g \beta'(t)\,dt = \int_{\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt + \int_{g-\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt < \int_{\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt + \varepsilon.$$

Но равенство (11) можно обобщить.

Пусть мера μ такова, что всякий раз, как некоторое множество $e \subset [a, b]$ измеримо в смысле μ, оно измеримо и в смысле

Лебега. Тогда имеет место равенство

$$\int_{\mathscr{E}} f(x)\,d\mu = \int_{\mathscr{E}} f(x)\,\beta'(x)\,dx, \tag{12}$$

если существует интеграл слева.

В самом деле, пусть существует интеграл слева в (12). Тогда в силу свойства 17 из § 19.3 интеграла Лебега — Стилтьеса относительно $\alpha(\Delta)$ существует последовательность ступенчатых функций $\sigma_p(\mathbf{x})$ такая, что

$$\begin{gathered}\sigma_p(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}) \text{ почти всюду на } [a, b],\\ \int_{\mathscr{E}} |f(x) - \sigma_p(\mathbf{x})|\,d\mu \to 0, \quad p \to \infty.\end{gathered} \tag{13}$$

Но тогда (пояснения ниже)

$$\int_{\mathscr{E}} |\sigma_p(\mathbf{x})\,\beta'(\mathbf{x}) - \sigma_q(\mathbf{x})\,\beta'(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = \int_{\mathscr{E}} |\sigma_p(\mathbf{x}) - \sigma_q(\mathbf{x})|\,\beta'(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} =$$
$$= \int_{\mathscr{E}} |\sigma_p(\mathbf{x}) - \sigma_q(\mathbf{x})|\,d\mu \to 0, \quad p, q \to \infty,$$

где второе соотношение (равенство) верно в силу (11), потому что функции $|\sigma_p(\mathbf{x}) - \sigma_q(\mathbf{x})|$ ступенчатые, а третье — в силу (13). На основании свойства 20 из § 19.3 полноты пространства $L(a, b)$ существует функция, к которой $\sigma_p(\mathbf{x})\beta'(\mathbf{x})$ стремится в смысле $L(a, b)$. Но так как $\sigma_p(\mathbf{x})\beta'(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})\beta'(\mathbf{x})$ почти всюду, то этой функцией должна быть $f(\mathbf{x})\beta'(\mathbf{x})$ (см. свойство 21 из § 19.3). Итак,

$$\int_{\mathscr{E}} |\sigma_p(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|\,\beta'(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \to 0, \quad p \to \infty. \tag{14}$$

Из (13) и (14) и того факта, что для ступенчатых функций $\sigma_p(\mathbf{x})$

$$\int_{\mathscr{E}} \sigma_p(\mathbf{x})\,d\mu = \int_{\mathscr{E}} \sigma_p(\mathbf{x})\,\beta'(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

следует (12).

Наоборот, если $f(x)$, измеримая на $\mathscr{E}$ по Лебегу почти всюду конечная функция, и всякий раз, как некоторое множество $e \subset [a, b]$ измеримо по Лебегу, оно также измеримо в смысле μ, то существование интеграла справа в (12) влечет существование интеграла слева и равенство (12).

Доказательство этого утверждения проводится, как выше, в обратном порядке. Существование интеграла справа в (12) и неравенство $\beta'(\mathbf{x}) \geqslant 0$ влечет существование последовательности ступенчатых функций $\sigma_p(\mathbf{x})$, для которой $\sigma_p(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$ почти всюду на $[a, b]$ и

$$\int_{\mathscr{E}} |f(\mathrm{x}) - \sigma_p(\mathrm{x})| \beta'(x)\, d\mathrm{x} \to 0, \quad p \to \infty,$$

что доказывается подобно тому, как доказывалось свойство 17 из § 19.3, где надо всюду под интегралами заменить dx на $\mu'(x)dx$.

Отметим следующее утверждение.

Если неубывающая функция $\beta(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\beta(x') - \beta(x)| \leqslant M|x' - x|, \quad a \leqslant x,\ x' \leqslant b, \tag{14}$$

(M не зависит от x, x'), то из того, что какое-либо множество $e \subset [a, b]$ измеримо по Лебегу, следует измеримость его в смысле меры μ_β, порождаемой функцией $\beta(x)$.

Наоборот, если функция $y = \beta(x)$ имеет на $[a, b]$ обратную $x = \beta^{-1}(y)$, удовлетворяющую условию Липшица, то из того, что какое-либо множество $e \subset [a, b]$ измеримо в смысле μ_β, следует его измеримость по Лебегу.

В самом деле, произвольное открытое множество $g \subset [a, b]$ есть сумма самое большее счетного числа попарно непересекающихся интервалов (c_k, d_k), и потому, обозначая через μ меру Лебега, из (14) будем иметь

$$\mu_\beta g = \sum [\beta(d_k) - \beta(c_k)] \leqslant M \sum (d_k - c_k) = M\mu g. \tag{15}$$

Далее, если $\mathscr{E} \subset [a, b]$ — измеримое множество, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся F и g такие, что $F \subset \mathscr{E} \subset g$, $\mu(g - F) < \mathscr{E}$. Но $g - F$ открыто, поэтому, применяя к нему (14), получим

$$\mu_\beta(g - F) \leqslant M\mu(g - F) < M\varepsilon.$$

Таким бразом, и в смысле β мера $g - F$ может быть сделана как угодно малой. Но тогда $\mathscr{E}$ измеримо в смысле β.

Обратная часть утверждения доказывается аналогично.

В заключение напомним замечание к (3) в § 19.9.

Упражнения.

1. Пусть $\beta(x)$ — неубывающая на $[a, b]$ функция, порождающая неотрицательную аддитивную функцию

$$\alpha(\Delta) = \beta(d) - \beta(c), \quad \Delta = [c, d) \subset G = [a, b).$$

Показать, что, если $\beta(x)$ продолжить, положив $\beta(x) = \beta(a)$, $x < a$ и $\beta(x) = \beta(b)$, $x > b$, то продолженная функция порождает продолжение $\alpha(\Delta)$, полученное по правилу 19.8 (1).

Доказать равенства (μ лебегова мера относительно $\alpha(\Delta)$)

$$\mu(c, d) = \beta(d - 0) - \beta(c + 0),$$
$$\mu[c, d] = \beta(d + 0) - \beta(c - 0),$$
$$\mu[c, d) = \beta(d - 0) - \beta(c - 0),$$
$$\mu(c, d] = \beta(d + 0) - \beta(c + 0).$$

Таким образом, $\mu(\Delta) = \alpha(\Delta)$ тогда и только тогда, когда $\beta(c) = \beta(c - 0)$.

2. Пусть $G = \{a_i \leqslant x_i < b_i;\ i = 1, \ldots, n\}$, $\Delta = \{c \leqslant x_i < d_i;\ i = 1, \ldots, n\} \in G$, $\Delta_\varepsilon = \{c_i - \varepsilon \leqslant x_i < d_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, $\varepsilon > 0$. Доказать равенства

$$\mu\widetilde{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta' \subset\subset \Delta \\ \Delta' \to \Delta}} (\alpha\Delta'), \quad \mu\overline{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta' \supset\supset \Delta \\ \Delta' \to \Delta}} \alpha(\Delta'), \quad \mu\Delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\Delta_\varepsilon).$$

§ 19.13. Продолжение функции. Теорема Вейерштрасса

Точки n-мерного пространства R_n будем обозначать через $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Пусть $\Omega \subset R_n$ есть ограниченная область с границей Γ, представляющей собой гладкую поверхность (дифференцируемое $(n-1)$-мерное замкнутое многообразие, см. 17.1)). Будем считать, что Γ есть сумма конечного числа связанных многообразий.

Точки Γ будем обозначать через $\mathbf{x}$. Нормаль к Γ в точке $\mathbf{x}$ состоит из двух выходящих из $\mathbf{x}$ лучей N_1 и N_2. Луч N_1 содержит достаточно малый интервал с концом $\mathbf{x}$, полностью принадлежащий Ω, луч же N_2 содержит в себе некоторый интервал с концом $\mathbf{x}$, не имеющий общих точек с Ω. Лучи N_1 и N_2 называются соответственно внутренней и внешней нормалями к Γ в точке $\mathbf{x}$ (см. § 17.2).

Пусть $\nu = \nu(\mathbf{x})$ есть выпущенный из $\mathbf{x} \in \Gamma$ единичный вектор внешней нормали к Γ. Он непрерывно зависит от $\mathbf{x}$ на Γ.

В самом деле, Ω есть n-мерное дифференцируемое связное многообразие, замыкание которого принадлежит связному же n-мерному многообразию, ориентированному уравнениями $v_1 = v_1, \ldots, v_n = v_n$. Поэтому (см. § 17.2, в частности, теорему 4 и дальше) Γ тоже есть ориентируемое многообразие, и можно высказать правило согласования ориентаций Ω и Γ, заключающееся в следующем.

Какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, существует ее (n-мерная) окрестность $W_{\mathbf{x}^0}$ и определенное на ней локальное описание ориентированного многообразия R_n (см. 17.2 (18), (19))

$$v_i = \varphi_i(\mathbf{u}) = \varphi_i(u_1, \ldots, u_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \mathbf{u} \in \Omega, \tag{1}$$

со следующими свойствами:

1) Якобиан описания (1) (перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}$) — положительный.

2) При достаточно малом $\delta > 0$ точки $\mathbf{v}$ являются внешними или внутренними по отношению к $\overline{\Omega}$ в зависимости от того, будет ли у них $u_1 > 0$ или $u_1 < 0$, где $|u_1| < \delta$.

3) Уравнения

$$x_i = \varphi_i(0, u_2, \ldots, u_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

описывают (в рассматриваемой окрестности) Γ.

Совокупность всех получаемых таким образом описаний (2) многообразия Γ, ориентирует Γ, иначе говоря, любые два такие описания пересекающихся кусков σ, $\sigma' \subset \Gamma$ таковы, что на $\sigma\sigma'$ якобиан перехода друг в друга определяющих их параметров $(u_2, \ldots, u_n)$ и $(u_2', \ldots, u_n')$ — положительный.

Введем единичный нормальный к Γ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$ вектор $\nu = \nu(\mathbf{x})$, определяемый в пределах $W_{\mathbf{x}^0}$ формулами § 7.25, (3), где надо только заменить $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ на $(u_2, \ldots, u_n)$ и t на h. Из этих формул непосредственно видно, что в пределах окрестности $W_{\mathbf{x}^0}$ произвольной точки $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ вектор $\nu(\mathbf{x})$ непрерывно зависит от $\mathbf{x} \in \Gamma$. Но он непрерывен также и