2. Пусть $G = \{a_i \leqslant x_i < b_i;\ i = 1, \ldots, n\}$, $\Delta = \{c \leqslant x_i < d_i;\ i = 1, \ldots, n\} \in G$, $\Delta_\varepsilon = \{c_i - \varepsilon \leqslant x_i < d_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, $\varepsilon > 0$. Доказать равенства

$$\mu\widetilde{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta' \subset\subset \Delta \\ \Delta' \to \Delta}} (\alpha\Delta'), \quad \mu\overline{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta' \supset\supset \Delta \\ \Delta' \to \Delta}} \alpha(\Delta'), \quad \mu\Delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\Delta_\varepsilon).$$

§ 19.13. Продолжение функции. Теорема Вейерштрасса

Точки n-мерного пространства R_n будем обозначать через $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Пусть $\Omega \subset R_n$ есть ограниченная область с границей Γ, представляющей собой гладкую поверхность (дифференцируемое $(n-1)$-мерное замкнутое многообразие, см. 17.1)). Будем считать, что Γ есть сумма конечного числа связанных многообразий.

Точки Γ будем обозначать через $\mathbf{x}$. Нормаль к Γ в точке $\mathbf{x}$ состоит из двух выходящих из $\mathbf{x}$ лучей N_1 и N_2. Луч N_1 содержит достаточно малый интервал с концом $\mathbf{x}$, полностью принадлежащий Ω, луч же N_2 содержит в себе некоторый интервал с концом $\mathbf{x}$, не имеющий общих точек с Ω. Лучи N_1 и N_2 называются соответственно внутренней и внешней нормалями к Γ в точке $\mathbf{x}$ (см. § 17.2).

Пусть $\nu = \nu(\mathbf{x})$ есть выпущенный из $\mathbf{x} \in \Gamma$ единичный вектор внешней нормали к Γ. Он непрерывно зависит от $\mathbf{x}$ на Γ.

В самом деле, Ω есть n-мерное дифференцируемое связное многообразие, замыкание которого принадлежит связному же n-мерному многообразию, ориентированному уравнениями $v_1 = v_1, \ldots, v_n = v_n$. Поэтому (см. § 17.2, в частности, теорему 4 и дальше) Γ тоже есть ориентируемое многообразие, и можно высказать правило согласования ориентаций Ω и Γ, заключающееся в следующем.

Какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, существует ее (n-мерная) окрестность $W_{\mathbf{x}^0}$ и определенное на ней локальное описание ориентированного многообразия R_n (см. 17.2 (18), (19))

$$v_i = \varphi_i(\mathbf{u}) = \varphi_i(u_1, \ldots, u_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \mathbf{u} \in \Omega, \tag{1}$$

со следующими свойствами:

1) Якобиан описания (1) (перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}$) — положительный.

2) При достаточно малом $\delta > 0$ точки $\mathbf{v}$ являются внешними или внутренними по отношению к $\overline{\Omega}$ в зависимости от того, будет ли у них $u_1 > 0$ или $u_1 < 0$, где $|u_1| < \delta$.

3) Уравнения

$$x_i = \varphi_i(0, u_2, \ldots, u_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

описывают (в рассматриваемой окрестности) Γ.

Совокупность всех получаемых таким образом описаний (2) многообразия Γ, ориентирует Γ, иначе говоря, любые два такие описания пересекающихся кусков $\sigma, \sigma' \subset \Gamma$ таковы, что на $\sigma\sigma'$ якобиан перехода друг в друга определяющих их параметров $(u_2, \ldots, u_n)$ и $\left(u_2', \ldots, u_n'\right)$ — положительный.

Введем единичный нормальный к Γ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$ вектор $\nu = \nu(\mathbf{x})$, определяемый в пределах $W_{\mathbf{x}^0}$ формулами § 7.25, (3), где надо только заменить $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ на $(u_2, \ldots, u_n)$ и t на h. Из этих формул непосредственно видно, что в пределах окрестности $W_{\mathbf{x}^0}$ произвольной точки $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ вектор $\nu(\mathbf{x})$ непрерывно зависит от $\mathbf{x} \in \Gamma$. Но он непрерывен также и на всем многообразии Г. Это видно из тех же формул — на пересечении указанных кусков σ и σ' вектор $\mathbf{v}$ — один и тот же, независимо от того, будем ли мы его вычислять, пользуясь параметрами $(u_2, \ldots, u_n)$ куска σ или параметрами $\left(u_2', \ldots, u_n'\right)$ куска σ'. Здесь существенно, что якобиан перехода от одних из этих параметров к другим — положительный.

Отметим, что вектор $\mathbf{v}$ направлен вовне Ω. Ведь на Г

$$0 < \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} = \sum_1^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} A_i,$$

а вектор $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}\right)$ заведомо направлен вовне Ω.

Пусть теперь Г есть многообразие класса C^{r+1}, т. е. функции φ_i, описывающие его локально, непрерывно дифференцируемы $r+1$ раз. Тогда существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что равенство

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + h\mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad |h| \leqslant \delta, \tag{3}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие

$$\mathbf{v} \rightleftarrows (\mathbf{x}, h), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad |h| \leqslant \delta, \tag{4}$$

непрерывно дифференцируемое r раз. Это надо понимать в том смысле, что если локально равенство (3) при помощи подстановки (2) записать в виде

$$\mathbf{v} \rightleftarrows (u_2, \ldots, u_n, h), \quad |h| \leqslant \delta, \tag{5}$$

то полученное соответствие (5) непрерывно дифференцируемо r раз.

Тот факт, что такое соответствие (5) действительно имеет место в некоторой окрестности произвольной точки $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, доказан в § 7.25 (5). Воспользовавшись леммой Бореля, можно выбрать конечное число таких окрестностей, полностью покрывающих замкнутое ограниченное множество Г, но тогда при достаточно малом $\delta > 0$ будет иметь место (4) для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Множество точек $\mathbf{v}$, определенных при помощи соотношений (3), обозначим через $\Pi(\delta)$ и положим $\Omega^\delta = \Omega + \Pi(\delta)$.

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченное множество, граница которого есть $(n-1)$-мерное дифференцируемое многообразие класса C^2. Функцию $f(\mathbf{v})$, непрерывную на $\overline{\Omega}$, можно продолжить с $\overline{\Omega}$ на R_n так, что продолженная функция $\bar{f}(\mathbf{v})$ будет непрерывна на R_n и финитна в Ω^δ и будет выполняться неравенство*

$$\max_{\mathbf{v} \in R_n} |\bar{f}(\mathbf{v})| \leqslant \max_{\mathbf{v} \in \overline{\Omega}} |f(\mathbf{v})|. \tag{6}$$

Доказательство. На $\Omega\Pi(\delta)$ нашу функцию можно рассматривать как непрерывную функцию от $\mathbf{v}$ и от $(\mathbf{x}, h)$ $(f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}, h),\ \mathbf{x} \in \Gamma)$.

Функция

$$f^*(\mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{v}), & \mathbf{v} \in \Omega \setminus \Pi(\delta), \\ f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}, h), & \mathbf{x} \in \Gamma, \quad -\delta \leqslant h \leqslant 0, \\ f(\mathbf{x}, h), & \mathbf{x} \in \Gamma, \quad 0 \leqslant h \leqslant \delta, \\ 0, & \mathbf{v} \notin \Omega^\delta, \end{cases} \tag{7}$$

очевидно, непрерывна на Ω^δ и продолжает f с $\overline{\Omega}$ на R_n.

Введем теперь непрерывную финитную в Ω^δ функцию $\psi(\mathbf{v})$, удовлетворяющую неравенствам $0 \leqslant \psi(\mathbf{v}) \leqslant 1$ и равную 1 на Ω (см. § 18.4, лемма 1). Очевидно, функция $\bar{f}(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}) f^*(\mathbf{v})$ удовлетворяет условиям теоремы.

Теорема 2 (Вейерштрасса). *Пусть на замыкании области, удовлетворяющий условиям теоремы 1, задана непрерывная функция* $f(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in \overline{\Omega})$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *можно определить многочлен* (*см.* 7.3, (2))

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leqslant k_j^* \leqslant N} a_k \mathbf{x}^k \quad \left(\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n),\ \mathbf{x}^k = \left(x_1^{k1} \ldots x_n^{k_n}\right)\right),$$

такой, что выполняется неравенство

$$|f(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})| < \varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим продолжающую $f(\mathbf{x})$ (с $\overline{\Omega}$) функцию $\bar{f}(\mathbf{x})$, непрерывную и финитную в Ω^δ. Так как множество Ω^δ ограничено, то можно указать такое $l > 0$, что $\Delta = \{|x_j| \leqslant l,\ j = 1, \ldots, n\}$ содержит в себе Ω^δ. Если ввести подстановки

$$x_j = l \cos t_j, \quad 0 \leqslant t_j \leqslant \pi, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

то получим функцию

$$F(\mathbf{t}) = \bar{f}(l \cos t_1, \ldots, l \cos t_n),$$

которую можно считать определенной для любых $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$. Она непрерывна по $\mathbf{t}$ и четная периода 2π по каждой переменной t_j.

Сумма Фейера функции $F(\mathbf{t})$ есть некоторый четный тригонометрический полином

$$\sigma_N(t) = \sum_{0 \leqslant k_j \leqslant N} \alpha_k \cos k_1 t_1 \ldots \cos k_n t_n, \quad \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n),$$

равномерно при $N \to \infty$ сходящийся к $F(\mathbf{t})$ (см. § 15.11, теорема 1). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что выполняется неравенство $|F(\mathbf{t}) - \sigma_N(\mathbf{t})| < \varepsilon$ для всех $\mathbf{t}$.

Если в этом неравенстве обратно перейти от $\mathbf{t}$ к $\mathbf{x}$ (см. (9)), то получим

$$|\bar{f}(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})| < \varepsilon,$$

где $P(\mathbf{x})$ есть многочлен

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leqslant k_j \leqslant N} \alpha_k \cos k_1 \arccos \frac{x_1}{l} \ldots \cos k_n \arccos \frac{x_n}{l}$$

(см. § 15.12). Тем более верно неравенство (8), ведь $f(\mathbf{x}) = \bar{f}(\mathbf{x})$ на $\overline{\Omega}$.

Теорема 3. *Пусть область* Ω *точек* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *но с границей класса* C^{r+1}, *и на* $\overline{\Omega}$ *задана функция* $f(\mathbf{v}) \in C^r(\Omega)$, *т. е. имеющая на* $\overline{\Omega}$ *непрерывные частные производные до порядка* r *включительно. Тогда* $f(\mathbf{v})$ *можно продолжить с* $\overline{\Omega}$ *на* R_n *так, что продолженная функция* $\bar{f}(\mathbf{v})$ *принадлежит* $C^r(R_n)$, *финитна в* Ω^δ *и удовлетворяет неравенству*

$$\left|\bar{f}^{(\mathbf{k})}_{\mathbf{v} \in R_n}(\mathbf{v})\right| \leqslant C \sum_{|\mathbf{s}| \leqslant r} \max_{\mathbf{v} \in \overline{\Omega}} |f^{(\mathbf{s})}(\mathbf{v})|, \quad |\mathbf{k}| \leqslant r,$$

где C *не зависит от* f *и* $\mathbf{v}$.

Доказательство. Определяем на Ω^δ функцию

$$f_*(\mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{v}), & \mathbf{v} \in \Omega \setminus \Pi(\delta), \\ f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}, h), & -\delta \leqslant h \leqslant 0, \\ \sum_{s=0}^{l} \lambda_s f\left(\mathbf{x}, -\frac{h}{s+1}\right), & 0 \leqslant h \leqslant \delta, \\ 0, & \mathbf{v} \notin \Omega^\delta, \end{cases} \tag{10}$$

где числа λ_s одновременно удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{s=0}^{l} \lambda_s \left(-\frac{1}{s+1}\right)^k = 1 \qquad (k = 0, 1 \ldots, r).$$

Легко проверить, что $f^*(\mathbf{v})$ имеет на Ω^δ непрерывные частные производные порядков вплоть до r включительно. А функция

$$\bar{f}(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}) f^*(\mathbf{v})$$

удовлетворяет условиям теоремы, если за $\psi(\mathbf{v})$ взять r раз непрерывно дифференцируемую на R_n функцию, финитную в Ω^δ и такую, что $\psi(\mathbf{v}) = 1$ на $\overline{\Omega}$ и $0 \leqslant \psi(\mathbf{v}) \leqslant 1$ на R_n (см. § 18.4, лемма 1).

Замечание. Теоремы 1—3 можно доказать при менее ограничительных условиях на Ω, но тогда продолжения $f^*(\mathbf{v})$ пришлось бы строить путями, отличными от (7) и (10).