Глава 20

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

§ 20.1. Линейные операторы

Пусть E и E' обозначают линейные нормированные пространства и каждому элементу x из E, в силу некоторого закона, соответствует элемент

$$y = u(x),$$

принадлежащий E'; тогда говорят, что u есть оператор, определенный в E и отображающий E в E'.

Оператор называется *аддитивным*, если для любых элементов x и y из E справедливо

$$u(x+y) = u(x) + u(y).$$

Если θ и θ' соответственно обозначают нулевые элементы пространств E и E' и $x \in E$, то для аддитивного оператора справедливо

$$u(\theta) = \theta', \quad u(-x) = -u(x). \tag{1}$$

Действительно,

$$u(\theta) = u(2\theta) = 2u(\theta),$$

откуда следует первое равенство. Далее,

$$\theta' = u(x-x) = u(x) + u(-x),$$

что влечет второе.

Оператор называется *однородным*, если для любого действительного (комплексного) числа α и любого элемента $x \in E$ имеет место

$$u(\alpha x) = \alpha u(x).$$

Оператор называется *непрерывным в* $x_0 \in E$, если для любой последовательности x_k $(k = 1, 2, \ldots)$, принадлежащей E и сходящейся к x_0, справедливо

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = u(x_0).$$

Оператор называется *непрерывным*, если он непрерывен в любом элементе $x \in E$.

Из аддитивности оператора и непрерывности его в одном из элементов $x_0 \in E$ следует его непрерывность. Действительно, если $y_0 \in E$, $y_k \in E$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $y_k \to y_0$, то

$$\lim_{k\to\infty} u(y_k) = \lim u[(y_k - y_0 + x_0) - (x_0 - y_0)] =$$
$$= u(x_0) - u(x_0 - y_0) = u(y_0).$$

Далее, из аддитивности оператора и непрерывности его следует однородность относительно умножения на вещественное число*). В самом

*) В комплексном пространстве однородность оператора относительно умножения на комплексное число вытекает из его аддитивности, непрерывности и свойства $u(ix) = iu(x)$

деле, если $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, то равенство

$$u(\alpha x) = \alpha u(x) \tag{2}$$

является непосредственным следствием аддитивности оператора u. Если p и q — целые положительные числа, то

$$qu\left(\frac{1}{q}x\right) = u(x),$$

откуда

$$u\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{1}{q}u(x), \quad u\left(\frac{p}{q}x\right) = pu\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q}u(x).$$

Пусть теперь α — произвольное положительное число и последовательность рациональных чисел r_k сходится к α; тогда вследствие доказанного и непрерывности оператора

$$u(\alpha x) = \lim_{k\to\infty} u(r_k x) = \lim_{k\to\infty} r_k u(x) = \alpha u(x).$$

Это равенство на основании (1) сохраняется, очевидно, также и для отрицательных α.

Теорема 1. *Для того чтобы аддитивный оператор u был непрерывным, необходимо и достаточно существование положительной константы M такой, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство*

$$\|u(x)\| \leqslant M\|x\|. \tag{3}$$

Доказательство. Условие (3) достаточно, так как если последовательность элементов x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ из E сходится к $x_0 \in E$, то из неравенства

$$\|u(x_k - x_0)\| \leqslant M\|x_k - x_0\| \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

следует

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = u(x_0).$$

Оно необходимо, так как в противном случае существует в E последовательность элементов x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, для которой $\|u(x_n)\| \geqslant n\|x_n\|$, и, следовательно,

$$\|u(z_n)\| > 1, \quad z_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}, \quad z_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

что противоречит непрерывности оператора u.

Аддитивный непрерывный оператор u называется *линейным* или еще *линейным ограниченным.*

Наименьшая положительная константа M, при которой выполняется неравенство (3) для всех $x \in E$, называется *нормой* линейного оператора u и обозначается $\|u\|$. Легко видеть, что норму u можно еще определить как верхнюю грань норм элементов $u(x)$, распространенную на множество всех $x \in E$ с $\|x\| \leqslant 1$ или с $\|x\| = 1$:

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$

Банахово, т. е. линейное нормированное полное пространство будем называть еще *пространством типа* (B).

Если u и v — линейные операторы, отображающие пространство E типа (B) в пространство E' типа (B), и α — произвольное число, то очевидно

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \quad \|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|.$$