§ 20.2. Линейные функционалы

Множество R всех действительных чисел с обычным определением сложения и умножения, где норма числа равна абсолютному его значению, есть, очевидно, пространство типа (B).

Если оператор F отображает нормированное пространство E в R, он называется *функционалом*, определенным в E. Аддитивный и непрерывный функционал, определенный в пространстве E типа (B), называется *линейным функционалом*. Свойства, установленные для линейных операторов, остаются, очевидно, справедливыми и для линейных функционалов.

§ 20.3. Сопряженное пространство

Совокупность всех определенных на E линейных функционалов образует пространство $\bar{E}$, называемое *сопряженным* к E, если в качестве нормы элемента этого пространства — функционала F — взять определенную уже норму $\|F\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |F(x)|$. $\bar{E}$ есть пространство типа (B), таким образом, полное (независимо от того, E полное или нет). В самом деле, если последовательность линейных функционалов F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $p, q > N$ $\|F_p - F_q\| < \varepsilon$, то очевидно, $F_n(x)$ сходится равномерно на сфере $\|x\| \leqslant 1$ к некоторому линейному функционалу F, определенному в E, и таким образом, $\|F_n - F\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Сформулируем без доказательства теорему.

Теорема (*о продолжении линейного функционала*). *Пусть E — банахово пространство и E_1 его линейное подпространство $(E_1 \subset E)$.*

Линейный функционал $f(x)$, определенный на E_1, можно продолжить на E с сохранением нормы, т. е. определить на E_1 такой линейный функционал $f_1(x)$, что будут выполняться свойства

$$f_1(x) = f(x), \quad x \in E_1, \quad \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_1(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|.$$

§ 20.4. Линейный функционал в пространстве C непрерывных функций

Теорема (Рисса*)). *Для всякого линейного функционала F, определенного в пространстве C действительных непрерывных функций $x = x(t)$, заданных на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке и притом единственная действительная функция $g(t)$, удовлетворяющая условиям:*

1) *$g(t)$ ограниченной вариации на $[a, b]$ и непрерывна справа для $a < t < b$,*

2) $g(a) = 0$,

3) *функционал F для всех $x = x(t)$ из C представляется в виде интеграла Стилтьеса*

$$F(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t), \tag{1}$$

4) *норма функционала F равна полной вариации функции g на $[a, b]$:*

$$\|F\| = \operatorname*{var}_{a \leqslant t \leqslant b} g. \tag{2}$$

*) Ф. Рисс (1880—19) выдающийся венгерский математик.