§ 20.2. Линейные функционалы

Множество R всех действительных чисел с обычным определением сложения и умножения, где норма числа равна абсолютному его значению, есть, очевидно, пространство типа (B).

Если оператор F отображает нормированное пространство E в R, он называется *функционалом*, определенным в E. Аддитивный и непрерывный функционал, определенный в пространстве E типа (B), называется *линейным функционалом*. Свойства, установленные для линейных операторов, остаются, очевидно, справедливыми и для линейных функционалов.

§ 20.3. Сопряженное пространство

Совокупность всех определенных на E линейных функционалов образует пространство $\overline{E}$, называемое *сопряженным* к E, если в качестве нормы элемента этого пространства — функционала F — взять определенную уже норму $\|F\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |F(x)|$. $\overline{E}$ есть пространство типа (B), таким образом, полное (независимо от того, E полное или нет). В самом деле, если последовательность линейных функционалов F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $p, q > N$ $\|F_p - F_q\| < \varepsilon$, то очевидно, $F_n(x)$ сходится равномерно на сфере $\|x\| \leqslant 1$ к некоторому линейному функционалу F, определенному в E, и таким образом, $\|F_n - F\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Сформулируем без доказательства теорему.

Теорема (*о продолжении линейного функционала*). *Пусть E — банахово пространство и E_1 его линейное подпространство $(E_1 \subset E)$.*

Линейный функционал $f(x)$, определенный на E_1, можно продолжить на E с сохранением нормы, т. е. определить на E_1 такой линейный функционал $f_1(x)$, что будут выполняться свойства

$$f_1(x) = f(x), \quad x \in E_1, \quad \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_1(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|.$$

§ 20.4. Линейный функционал в пространстве C непрерывных функций

Теорема (Рисса*)). *Для всякого линейного функционала F, определенного в пространстве C действительных непрерывных функций $x = x(t)$, заданных на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке и притом единственная действительная функция $g(t)$, удовлетворяющая условиям:*

1) *$g(t)$ ограниченной вариации на $[a, b]$ и непрерывна справа для $a < t < b$,*

2) $g(a) = 0$,

3) *функционал F для всех $x = x(t)$ из C представляется в виде интеграла Стилтьеса*

$$F(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t), \tag{1}$$

4) *норма функционала F равна полной вариации функции g на $[a, b]$:*

$$\|F\| = \operatorname*{var}_{a \leqslant t \leqslant b} g. \tag{2}$$

---

*) Ф. Рисс (1880—19) выдающийся венгерский математик.

Наоборот, функция $g(t)$, удовлетворяющая названным свойствам, определяет с помощью (1) *линейный функционал в пространстве C.*

Доказательство. Пусть задан линейный функционал на пространстве C. Последнее можно рассматривать, как подпространство пространства $L_\infty = L_\infty\ [a,\ b]$ ограниченных функций, определенных на сегменте $[a,\ b]$ (стр. 377, сноска). Продолжим линейный функционал F на пространство L_∞ с сохранением нормы, что всегда возможно (см. § 20.3).

Определим далее на $[a,\ b]$ семейство функций $x_s = x_s(t)$ следующим образом:

$$x_s(t) = \begin{cases} 0, & s < t \leqslant b, \\ 1, & a \leqslant t \leqslant s, \end{cases} \quad a < s \leqslant b, \quad x_a(t) \equiv 0, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Очевидно, $x_s \in L_\infty$. Положим

$$g(s) = F(x_s), \qquad a \leqslant s \leqslant b,$$

и покажем, что функция $g(s)$ ограниченной вариации на $[a,\ b]$. Действительно, пусть $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$ — произвольное разбиение сегмента $[a,\ b]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |g(s_i) - g(s_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left|F\left(x_{s_i}\right) - F\left(x_{s_{i-1}}\right)\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|F\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right)\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F\left[\eta_i\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right)\right] = F\left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right)\right],$$

где

$$\eta_i = \operatorname{sign} F\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Но функция

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right)$$

представляет, очевидно, ступенчатую функцию с нормой, не превышающей единицы. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} |g(s_i) - g(s_{i-1})| \leqslant \|F\|,$$

следовательно,

$$\operatorname*{var}_{a \leqslant t \leqslant b} g \leqslant \|F\|. \tag{3}$$

Легко видеть, что функция

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[x_{s_i}(t) - x_{s_{i-1}}(t)\right] \quad (a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b)$$

является ступенчатой функцией, определенной равенствами

$$x(t) = \begin{cases} \alpha_1, & s_0 \leqslant t \leqslant s_1, \\ \alpha_i, & s_{i-1} < t \leqslant s_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Для нее очевидно

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [g(s_i) - g(s_{i-1})].$$

Если теперь $x = x(t)$ — произвольная непрерывная функция, то ее можно рассматривать как предел равномерно сходящейся к ней последовательности ступенчатых функций вида

$$x_n = x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} x(s_i)\left[x_{s_i}(t) - x_{s_{i-1}}(t)\right],$$

когда $\max|s_i - s_{i-1}|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ стремится к нулю.

Таким образом, $\|x - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ и, вследствие непрерывности линейного функционала F,

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{\max|s_i - s_{i-1}|\to 0} \left\{\sum_{i=1}^{n} x(s_i)\left(x_{s_i} - x_{s-1}\right)\right\} =$$

$$= \lim_{s_i - s_{i-1}\to 0} \sum_{i=1}^{n} x(s_i)\left[g(s_i) - g(s_{i-1})\right] = \int_a^b x(t)\,dg(t) \qquad (4)$$

для всех $x \in C$. Очевидно,

$$|F(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,dg(t)\right| \leqslant \operatorname{var} g \|x\|,$$

какова бы ни была функция $x \in C$. Поэтому

$$\|F\| \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g. \qquad (5)$$

Из (5) и (3) тогда следует (2). Далее, очевидно,

$$g(a) = F(x_a) = 0.$$

Мы, таким образом, показали существование функции g ограниченной вариации на $[a, b]$, удовлетворяющей условиям 2) — 4) теоремы.

Введем теперь в рассмотрение функцию g_*, определенную следующим образом:

$$g_*(a) = g(a) = 0, \quad g_*(b) = g(b),$$
$$g_*(t) = g(t+0) \quad \text{для} \quad a < t < b.$$

Эта функция, таким образом, непрерывна справа для $a < t < b$ и отличается от g на счетном множестве значений t, удовлетворяющих неравенству $a < t < b$. Поэтому на основании свойств интеграла Стилтьеса

$$\int_a^b x(t)\,dg_*(t) = \int_a^b x(t)\,dg(t).$$

Очевидно, далее,

$$\operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g_* \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g = \|F\|. \qquad (6)$$

С другой стороны,

$$|F(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,dg_*(t)\right| \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g_* \|x\|,$$

откуда

$$\|F\| \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g_*; \qquad (7)$$

Неравенства (6) и (7) влекут за собой

$$\|F\| = \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g_*.$$

Таким образом, функция g_* удовлетворяет всем условиям теоремы. Такая функция может быть только одна. В самом деле, допустим, что функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы и $g_1(t_0) \neq g_2(t_0)$. Тогда разность

$$h(t) = g_1(t) - g_2(t)$$

есть функция ограниченной вариации, непрерывная справа для $a < t < b$ и удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered} h(a) = 0, \quad \int_a^b x(t)\, dh(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in C, \\ h(t_0) \neq 0, \quad t_0 > a. \end{gathered} \tag{8}$$

Но это невозможно, так как если $t_0 = b$, то для $x(t) = 1$

$$\int_a^b x(t)\, dh(t) = h(b) \neq 0,$$

и если $t_0 < b$, то в силу непрерывности справа функции h можно подобрать достаточно малое положительное δ такое, что

$$\operatorname*{var}_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\delta} h < |h(t_0)|.$$

Тогда для непрерывной функции $x(t)$, определяемой условиями

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad a \leqslant t \leqslant t_0, \\ \text{линейна} & \text{для} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta, \\ 0 & \text{для} \quad \delta + t_0 \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

мы имели бы

$$\left| \int_a^b x(t)\, dh \right| = \left| \int_a^{t_0} x(t)\, dh + \int_{t_0}^{t_0+\delta} x(t)\, dh \right| \geqslant |h(t_0)| - \operatorname*{var}_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\delta} h > 0,$$

что противоречит (8).

Итак, первая часть теоремы доказана. Вторая часть (обратная) очевидна.

Пример. Интеграл $F(f) = \int_a^b K(t) f(t)\, dt$, где $K(t)$ — суммируемая, а f — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, представляет собой линейный функционал, определенный в пространстве C непрерывных функций, определенных на $[a, b]$ с нормой

$$\|F\| = \int_a^b |K(t)|\, dt.$$

В этом нетрудно убедиться непосредственно или прибегая к теореме 2.1, если принять во внимание, что для всех $f \in C$

$$F(f) = \int_a^b f(t)\, dg(t),$$

где

$$g(t) = \int_a^t K(u)\,du,$$

а также, что

$$\operatorname*{var}_{a \leqslant t \leqslant b} g = \int_a^b |K(t)|\,dt.$$

Пример 2. Пусть $a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant b$ и $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа; тогда

$$F(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(t_i),$$

где $f \in C$, есть линейный функционал, определенный в C с нормой

$$\|F\| = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|.$$

Его можно представить в виде интеграла Стилтьеса 20.4 (1), где $g(t)$ — функция, непрерывная справа на (a, b), равная нулю для $t = a$, постоянная в каждом из интервалов (t_i, t_{i+1}) $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, а в точках t_i терпит скачки, равные α_i, иначе говоря

$$g(t_0 + 0) - g(t_0) = \alpha_0,$$
$$g(t_i + 0) - g(t_i - 0) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 20.5. Линейный функционал в пространстве L интегрируемых функций

Теорема 1. *Всякому линейному функционалу F, определенному в пространстве L функций f, интегрируемых на $[a, b]$ по Лебегу, соответствует единственная с точностью до меры нуль измеримая и ограниченная на $[a, b]$ действительная функция $\alpha(t)$ такая, что*

$$F(f) = \int_a^b \alpha(t) f(t)\,dt \tag{1}$$

и (см. стр. 377, сноску)

$$\|F\| = \operatorname*{vrai\,max}_{a \leqslant t \leqslant b} |\alpha(t)|. \tag{2}$$

Доказательство. Определим функцию

$$G_t(u) = \begin{cases} 1, & a \leqslant u \leqslant t, \\ 0, & t \leqslant u \leqslant b \end{cases}$$

и положим $g(t) = F(G_t)$. Пусть $a \leqslant t < t' \leqslant b$ и

$$\varepsilon = \operatorname{sign}[g(t') - g(t)].$$

Тогда

$$|g(t') - g(t)| = \varepsilon\{g(t') - g(t)\} = \varepsilon F(G_{t'} - G_t) \leqslant \|F\|\,\|G_{t'} - G_t\|.$$

Но функция $G_{t'} - G_t$ равна единице на интервале (t, t') и нулю вне его, поэтому $\|G_{t'} - G_t\| = |t' - t|$, $|g(t') - g(t)| \leqslant \|F\|\,|t' - t|$.