где

$$g(t) = \int_a^t K(u)\,du,$$

а также, что

$$\operatorname*{var}_{a \leqslant t \leqslant b} g = \int_a^b |K(t)|\,dt.$$

Пример 2. Пусть $a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant b$ и $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа; тогда

$$F(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(t_i),$$

где $f \in C$, есть линейный функционал, определенный в C с нормой

$$\|F\| = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|.$$

Его можно представить в виде интеграла Стилтьеса 20.4 (1), где $g(t)$ — функция, непрерывная справа на (a, b), равная нулю для $t = a$, постоянная в каждом из интервалов (t_i, t_{i+1}) $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, а в точках t_i терпит скачки, равные α_i, иначе говоря

$$g(t_0 + 0) - g(t_0) = \alpha_0,$$
$$g(t_i + 0) - g(t_i - 0) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 20.5. Линейный функционал в пространстве L интегрируемых функций

Теорема 1. *Всякому линейному функционалу F, определенному в пространстве L функций f, интегрируемых на $[a, b]$ по Лебегу, соответствует единственная с точностью до меры нуль измеримая и ограниченная на $[a, b]$ действительная функция $\alpha(t)$ такая, что*

$$F(f) = \int_a^b \alpha(t) f(t)\,dt \tag{1}$$

и (см. стр. 377, сноску)

$$\|F\| = \operatorname*{vrai\,max}_{a \leqslant t \leqslant b} |\alpha(t)|. \tag{2}$$

Доказательство. Определим функцию

$$G_t(u) = \begin{cases} 1, & a \leqslant u \leqslant t, \\ 0, & t \leqslant u \leqslant b \end{cases}$$

и положим $g(t) = F(G_t)$. Пусть $a \leqslant t < t' \leqslant b$ и

$$\varepsilon = \operatorname{sign}[g(t') - g(t)].$$

Тогда

$$|g(t') - g(t)| = \varepsilon\{g(t') - g(t)\} = \varepsilon F(G_{t'} - G_t) \leqslant \|F\|\,\|G_{t'} - G_t\|.$$

Но функция $G_{t'} - G_t$ равна единице на интервале (t, t') и нулю вне его, поэтому $\|G_{t'} - G_t\| = |t' - t|$, $|g(t') - g(t)| \leqslant \|F\|\,|t' - t|$.

Следовательно, $g(t)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица с константой $\|F\|$, что, как можно доказать, влечет за собой существование почти всюду на $[a, b]$ производной $g'(t) = \alpha(t)$ с

$$\operatorname*{vrai\ max}_{a\leqslant t\leqslant b} |\alpha(t)| \leqslant \|F\|. \tag{3}$$

Кроме этого, в силу того, что $F(G_a) = 0$,

$$g(t) = \int_a^t \alpha(u)\, du,$$

откуда

$$F(G_t) = g(t) = \int_a^b \alpha(u)\, G_t(u)\, du.$$

Если f есть ступенчатая функция, определенная на $[a, b]$, то она представляет собой некоторую конечную линейную комбинацию из функций G_t и потому

$$F(b) = \int_a^b \alpha(u) f(u)\, du.$$

Пусть теперь f — произвольная функция из L. Существует последовательность ступенчатых f_n $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся по норме к f, откуда

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \alpha(u) f_n(u)\, du = \int_a^b \alpha(u) f(u)\, du,$$

что и требовалось доказать.

Из последнего равенства следует

$$|F(f)| \leqslant \operatorname*{vrai\ max}_{a\leqslant t\leqslant b} |\alpha(t)| \cdot \|f\|,$$

что вместе с (3) влечет (2).

Не может быть двух функций $\alpha(t)$ и $\alpha_1(t)$, удовлетворяющих условию теоремы и отличающихся на множестве положительной меры, потому что, полагая $\beta(t) = \alpha(t) - \alpha_i(t)$, мы имели бы, с одной стороны,

$$\int_a^b \beta(t) f(t)\, dt = 0$$

для всех $f \in L$, а с другой — для $f_*(t) = \operatorname{sign} \beta(t)$

$$\int_a^b f(t) f_*(t)\, dt = \int_a^b \beta(t) \operatorname{sign} \beta(t)\, dt = \int_a^b |\beta(t)|\, dt > 0.$$

§ 20.6. Линейный функционал в гильбертовом пространстве

Пусть H есть гильбертово пространство, т. е. линейное нормированное полное пространство, в котором введено скалярное произведение (φ, ψ) $(\varphi, \psi \in H)$ с нормой

$$\|\varphi\|_H = (\varphi, \varphi)^{1/2}.$$