Следовательно, $g(t)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица с константой $\|F\|$, что, как можно доказать, влечет за собой существование почти всюду на $[a, b]$ производной $g'(t) = \alpha(t)$ с

$$\operatorname*{vrai\,max}_{a\leqslant t\leqslant b} |\alpha(t)| \leqslant \|F\|. \tag{3}$$

Кроме этого, в силу того, что $F(G_a) = 0$,

$$g(t) = \int_a^t \alpha(u)\,du,$$

откуда

$$F(G_t) = g(t) = \int_a^b \alpha(u)\,G_t(u)\,du.$$

Если f есть ступенчатая функция, определенная на $[a, b]$, то она представляет собой некоторую конечную линейную комбинацию из функций G_t и потому

$$F(b) = \int_a^b \alpha(u)\,f(u)\,du.$$

Пусть теперь f — произвольная функция из L. Существует последовательность ступенчатых f_n $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся по норме к f, откуда

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \alpha(u)\,f_n(u)\,du = \int_a^b \alpha(u)\,f(u)\,du,$$

что и требовалось доказать.

Из последнего равенства следует

$$|F(f)| \leqslant \operatorname*{vrai\,max}_{a\leqslant t\leqslant b} |\alpha(t)|\cdot\|f\|,$$

что вместе с (3) влечет (2).

Не может быть двух функций $\alpha(t)$ и $\alpha_1(t)$, удовлетворяющих условию теоремы и отличающихся на множестве положительной меры, потому что, полагая $\beta(t) = \alpha(t) - \alpha_i(t)$, мы имели бы, с одной стороны,

$$\int_a^b \beta(t)\,f(t)\,dt = 0$$

для всех $f \in L$, а с другой — для $f_*(t) = \operatorname{sign}\beta(t)$

$$\int_a^b f(t)\,f_*(t)\,dt = \int_a^b \beta(t)\operatorname{sign}\beta(t)\,dt = \int_a^b |\beta(t)|\,dt > 0.$$

§ 20.6. Линейный функционал в гильбертовом пространстве

Пусть H есть гильбертово пространство, т. е. линейное нормированное полное пространство, в котором введено скалярное произведение (φ, ψ) $(\varphi, \psi \in H)$ с нормой

$$\|\varphi\|_H = (\varphi, \varphi)^{1/2}.$$

В данном случае считаем, что H есть сепарабельное пространство. В нем, таким образом, имеется счетная полная ортонормированная система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ H может быть комплексным или действительным.

Теорема 1. *Для всякого линейного функционала $F = F(\varphi)$, определенного над H, существует единственный элемент $\psi \in H$ такой, что* *)

$$F(\varphi) = (\varphi, \psi) \quad (\varphi \in H) \tag{1}$$

для всех $\varphi \in H$.

При этом имеет место равенство

$$\|F\| = \|\psi\|_H. \tag{2}$$

Доказательство. Произвольный элемент $\varphi \in H$ разложим в ряд Фурье по полной ортонормированной системе:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k)\,\varphi_k.$$

Но тогда, учитывая непрерывность линейного функционала F, получим:

$$F(\varphi) = \lim_{N\to\infty} F\left(\sum_{k=1}^{N} (\varphi, \varphi_k)\,\varphi_k\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (\varphi, \varphi_k)\,F(\varphi_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi, \varphi_k), \quad c_k = F(\varphi_k) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Мы доказали, что заданный линейный функционал F может быть описан равенством

$$F(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi, \varphi_k),$$

где числа c_k определяются равенствами (3).

Очевидно, справедливо также неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi, \varphi_k)\right| \leqslant \|F\|\,\|\varphi\|_H \quad (\varphi \in H). \tag{4}$$

Элемент $\varphi = \sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j\varphi_j$ для любого натурального N принадлежит H. Подставив его выражение в (4), получим

$$\sum_{k=1}^{N} c_k\overline{c}_k \leqslant \|F\|\left(\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\right)^{1/2}.$$

Откуда

$$\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \leqslant \|F\|^2$$

при любом N. Но тогда имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|F\|^2. \tag{5}$$

---

*) В комплексном H скалярное произведение (φ, ψ) есть линейный функционал по φ, но не есть линейный функционал по ψ, потому что он не однороден по ψ.

Но $|\bar{c}_k| = |c_k|$, поэтому справедливо также неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{c}_k|^2 \leqslant \|F\|, \tag{5'}$$

откуда вытекает (см. § 14.6, теорема 4) существование элемента $\psi \in H$ такого, что

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k \varphi_k,$$

где ряд справа сходится к ψ в смысле H.

При этом

$$\|\psi\|_H = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Теперь имеем для любого $\varphi \in H$

$$(\varphi, \psi) = \left(\varphi, \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\varphi, \varphi_k) = F(\varphi),$$

т. е. равенство (1).

Далее из (5) и (6) следует

$$\|\psi\|_H \leqslant \|F\|, \tag{7}$$

а из (1) следует

$$|F(\varphi)| = |(\varphi, \psi)| \leqslant \|\psi\|_H \|\varphi\|_H, \quad \|F\| \leqslant \|\psi\|_H. \tag{8}$$

Но тогда имеет место равенство (2).

Единственность элемента $\psi \in H$, для которого выполняется равенство (1) для всех $\varphi \in H$, вытекает из следующих соображений.

Если бы существовал еще один элемент $\psi_1 \in H$, для которого выполнялось бы равенство $F(\varphi) = (\varphi, \psi_1)$ для всех $\varphi \in H$, то для всех $\varphi \in H$ выполнялось бы равенство

$$(\varphi, \psi - \psi_1) = 0,$$

и в частности для $\varphi = \psi - \psi_1$

$$(\psi - \psi_1, \psi - \psi_1) = 0.$$

Но тогда $\psi - \psi_1 = 0$ или $\psi = \psi_1$.