КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ ВНЕШНИХ ФОРМ

§ 1. Условия по поводу обозначений. Альтернатор

п° 1. В дальнейшем нам часто придется записывать суммы произвольного числа слагаемых. Поясним обозначения, которыми мы будем пользоваться для краткости таких записей.

Если все слагаемые занумерованы по порядку: a_1, a_2, ..., a_n, то любое из них мы будем писать в виде a_i (читается a с нижним индексом i). Сумма всех слагаемых в этом случае будет обозначаться $\sum a_i$; таким образом:

$$\sum a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

п° 2. Далее мы будем иметь дело также с системами величин, которые помечены несколькими индексами (например, a^i_k). Как правило, у нас будут встречаться суммы таких величин с отождествленными индексами, которые называют *индексами суммирования*; например,

$$\sum a^i_i = a^1_1 + a^2_2 + \ldots + a^n_n,$$

или

$$\sum a^{ik}_{ik} = \sum a^{1k}_{1k} + \sum a^{2k}_{2k} + \ldots + \sum a^{nk}_{nk}.$$

Обычно один из индексов суммирования мы будем писать сверху, другой — снизу. Во втором из предыдущих примеров имеются два индекса суммирования. Они независимы, соответственно чему обозначены разными буквами.

п° 3. Если индексов много, то их обозначают одной буквой с подындексом. Например, $a^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ($i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n$) есть краткое обозначение некоторой системы величин в числе n^k. Пусть $b_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ — другая

аналогичная система величин. Тогда, например,

$$\sum a^{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k} b_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k} =$$
$$= a^{11 \dots 1} b_{11 \dots 1} + \dots + a^{i_1 i_2 \dots i_k} b_{i_1 i_2 \dots i_k} + \dots$$
$$\dots + a^{nn \dots n} b_{nn \dots n}$$

означает сумму всевозможных произведений $a^{i_1 i_2 \dots i_k}$ на $b_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (в каждом слагаемом оба сомножителя имеют один и тот же набор индексов).

п° 4. Кроме индексов суммирования, могут быть индексы, которые в суммировании не участвуют; их называют *свободными*. Обозначение свободных индексов должно быть унифицировано во всех членах соотношений, включающих суммы, например,

$$\sum a_{i\alpha}^{\alpha} = \sum b_{i\alpha}^{\alpha}. \tag{1}$$

Здесь свободный индекс и слева и справа обозначен одной и той же буквой i. Соотношение (1) означает наличие нескольких равенств, общее число которых n. Они получаются последовательно при $i = 1, 2, \dots, n$.

п° 5. В некоторых случаях мы будем писать суммы, совсем не употребляя индексов. Например,

$$\sum A = \dots + A + \dots$$

Такая запись означает, что нас интересует только сам факт наличия некоторой суммы, одно из слагаемых которой обозначено буквой A.

п° 6. Мы сразу же проиллюстрируем все сказанное на примере сумм, в которых участвует так называемый альтернатор.

Альтернатор обозначается символом $\delta_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k}$, где $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_k$ принимают значения $1, 2, \dots, n$, и определяется следующими условиями: $\delta_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \pm 1$, если $i_1 i_2 \dots i_k$ есть некоторая перестановка значений индексов $j_1 j_2 \dots j_n$, считая, что все эти значения различны; при этом берется $+1$, если указанная перестановка четная, и -1 — если нечетная. Во всех остальных случаях $\delta_{j_1 j_2 \dots j_k}^{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$ (т. е. если среди значений $i_1, i_2, \dots, i_k$, или среди значений $j_1, j_2, \dots, j_k$ есть одинаковые, а также если среди значений $i_1, i_2, \dots, i_k$ есть такие, каких нет среди $j_1, j_2, \dots, j_k$, и наоборот).

Пример. Пусть $A=(a_{ij})$ — квадратная $n\times n$-матрица. При $k=n=2$ рассмотрим сумму

$$D=\sum \delta_{12}^{i_1 i_2} a_{1i_1} a_{2i_2} = \delta_{12}^{11} a_{11} a_{21} + \delta_{12}^{12} a_{11} a_{22} + \delta_{12}^{21} a_{12} a_{21} + \delta_{12}^{22} a_{12} a_{22}.$$

Имеем

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A.$$

Вообще при $k=n$ имеем

$$\sum \delta_{1\,2\,\ldots\,n}^{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} = \det A.$$

Точно так же

$$\sum \delta_{1\,2\,\ldots\,n}^{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} = \det A.$$

п° 7. В частности, при $k=1$ и при любом n альтернатор представляет собой символ Кронекера: $\delta_j^i=1$, если $i=j$, $\delta_j^i=0$, если $i\neq j$. В суммах этот символ действует как тождественный оператор; например,

$$\sum \delta_j^i a_i = a_j.$$

§ 2. Сопряженные линейные пространства

п° 1. Пусть L и L^* — два действительных линейных пространства.

Пусть с каждой парой элементов $a\in L^*$, $x\in L$ сопоставлено действительное число; обозначим его через (a, x). Определенную тем самым на $L^*\times L$ функцию мы назовем *сверткой*, если соблюдены следующие условия.

1) *Линейность по первому аргументу*:

$$(\alpha a_1 + \beta a_2, x) = \alpha(a_1, x) + \beta(a_2, x)$$

для любых $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, $a_1, a_2\in L^*$, $x\in L$ ($\mathbb{R}$, как обычно, обозначает *множество действительных чисел*).

2) *Линейность по второму аргументу*:

$$(a, \alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(a, x_1) + \beta(a, x_2)$$

для любых $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, $a\in L^*$, $x_1, x_2\in L$.

3) *Невырожденность по первому аргументу*: если $(a, x)=0$ при данном a и при любом $x\in L$, то $a=\theta^*$ (где θ^* — нулевой элемент в L^*).

4) *Невырожденность по второму аргументу*: если $(a, x)=0$ при любом $a\in L^*$ и при данном x, то $x=\theta$ (где θ — нулевой элемент в L).

Если на $L^* \times L$ свертка задана, то линейные пространства L и L^* мы будем называть *сопряженными* друг другу; легко видеть, что отношение сопряженности двух линейных пространств является взаимным.

п° 2. Предположим теперь, что L и L^* — конечномерные пространства одной и той же размерности $= n$. Выберем в L и L^* какие-нибудь *базисы*; обозначим их соответственно через $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ и $\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^n$. Для произвольных элементов $a \in L^*$, $x \in L$ напишем разложения

$$a = a_1\tilde{e}^1 + \ldots + a_n\tilde{e}^n, \quad x = x^1\tilde{e}_1 + \ldots + x^n\tilde{e}_n. \tag{1}$$

Вследствие (1) имеем следующее общее выражение свертки:

$$(a, x) = \sum (\tilde{e}^i, \tilde{e}_j)\, a_i x^j. \tag{2}$$

Из (2) видно, что свертка будет определена на $L^* \times L$, если мы зададим матрицу сверток базисных элементов, т. е. матрицу чисел $(\tilde{e}^i, \tilde{e}_j)$[1]. Легко усмотреть, что для обеспечения обоих условий невырожденности 3) и 4) п°1 необходимо и достаточно, чтобы эта матрица была невырожденной; таким образом,

$$\det(\tilde{e}^i, \tilde{e}_j) \neq 0. \tag{3}$$

п° 3. В некоторых специальных базисах $\tilde{e}^i$, $\tilde{e}_j$ матрицу $(\tilde{e}^i, \tilde{e}_j)$ можно сделать единичной. Вместе с тем упростится выражение (2). Именно, имеет место

Теорема. *Пусть на $L^* \times L$ как угодно задана свертка (a, x) и в L^* как угодно задан базис $\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^n$; тогда в L найдется единственный базис $e_1, \ldots, e_n$ такой, что*

$$(\tilde{e}^i, e_j) = \delta^i_j, \tag{4}$$

где δ^i_j — символ Кронекера. Роли L^* и L можно обменять.

Доказательство теоремы вытекает из следующего очевидного утверждения: для любого набора чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ найдется единственный вектор $u \in L$ такой, что $(\tilde{e}^1, u) = \alpha^1, \ldots, (\tilde{e}^n, u) = \alpha^n$. Чтобы убедиться в этом, разложим

---

[1]) Отсюда видно, что для данного L можно построить бесконечно много различных сопряженных пространств L^* (точнее говоря, поразному сопряженных с L). Однако можно естественным образом определить понятие эквивалентности пространств, сопряженных с данным L так, что любые два пространства L_1^*, L_2^*, сопряженные с L, окажутся эквивалентными. См., например, [5], гл. V, § 1, п. 14 В скобках указываются номера по списку литературы.

искомый вектор u по какому-нибудь базису: $u=\lambda^1\tilde{e}_1+\ldots$ $\ldots+\lambda^n\tilde{e}_n$. Мы получим для $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ систему уравнений первой степени с главной матрицей $(\tilde{e}^i, \tilde{e}_j)$; полученная система однозначно разрешима вследствие (3).

Беря теперь в качестве $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ набор чисел $1, 0, \ldots, 0$, найдем по предыдущему вектор u. Положим $e_1=u$. Аналогично по набору $0, 1, 0, \ldots, 0$ найдем e_2 и т. д. Полученные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ удовлетворяют равенствам (4). Из этих же равенств следует, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно-независимы.

Определение. Два базиса, из которых один принадлежит пространству L, другой — пространству L^*, называются *взаимными* или *дуальными*, если они удовлетворяют равенствам (4). В дальнейшем мы будем взаимные базисы обозначать более простым образом без пометки тильдой. Соответственно имеем

$$(e^i, e_j)=\delta^i_j, \quad \text{где } e^i \in L^*, \ e_j \in L. \tag{5}$$

п° 4. Если разложения (1) даны по взаимным базисам, то

$$(a, x)=a_1x^1+\ldots+a_nx^n. \tag{6}$$

Доказательство. (6) следует из (2) и (5).

п° 5. Будем исходить теперь из данного линейного пространства L, предполагая его, как и раньше, действительным и n-мерным. Обозначим через a произвольную *линейную форму* в пространстве L, т. е. действительную функцию точки $x \in L$, удовлетворяющую условию линейности

$$a(\alpha x'+\beta x'')=\alpha a(x')+\beta a(x''), \tag{7}$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x', x'' \in L$.

Во множестве всех линейных форм пространства L естественно вводятся линейные операции. Именно, если a, b — две произвольные формы, λ, μ — любые действительные числа, то в качестве формы $\lambda a+\mu b$ берется функция, значение которой на произвольном векторе $x \in L$ определяется равенством

$$(\lambda a+\mu b)(x)=\lambda a(x)+\mu b(x). \tag{8}$$

Линейность такой функции непосредственно усматривается из (7) и (8).

На этот раз обозначим через L^* линейное пространство, элементами которого являются всевозможные

линейные формы, данные на L, а линейные операции определены согласно (8). Заметим, что нулевым элементом в L^* служит форма θ^*, которая равна нулю на любом $x \in L$.

Легко показать, что L^* имеет размерность n, равную размерности L. Поэтому любая система линейно-независимых форм, взятых в числе n, составляет базис в L^*.

п° 6. Назначим свертку двух произвольных элементов $a \in L^*$ и $x \in L$, полагая

$$(a, x) = a(x), \tag{9}$$

т. е. в качестве (a, x) мы берем сейчас число, равное значению формы $a \in L^*$ на элементе $x \in L$. Требования, которые предъявляются к свертке согласно п° 1, при этом соблюдены (проверка условий 1) — 4) п° 1 не представляет труда).

Пространство L^* является сопряженным пространству L согласно определению п° 1. Далее на протяжении ряда параграфов мы будем под L^* подразумевать именно это конкретное сопряженное пространство, т. е. состоящее из линейных форм пространства L.

п° 7. Из теоремы п° 3 и из выражения (9) непосредственно следует, что каковы бы ни были линейно-независимые формы $e^1(x), \ldots, e^n(x)$, $x \in L$, в пространстве L найдется единственный базис $e_1, \ldots, e_n$ такой, что

$$e^i(e_j) = \delta^i_j. \tag{10}$$

Разумеется, справедливо также утверждение, что для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ в L найдется единственная линейно-независимая система форм $e^1(x), \ldots, e^n(x)$, подчиненная условиям (10).

В дальнейшем через $e^i(x)$ и e_j, или через e^i и e_j всегда обозначаются взаимные базисы в L^* и L (для которых соблюдено (10)).

п° 8. Пусть произвольный вектор $x \in L$ разложен по базису $e_1, \ldots, e_n$

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n.$$

Тогда

$$e^j(x) = x^1 e^j(e_1) + \ldots + x^j e^j(e_j) + \ldots + x^n e^j(e_n).$$

Отсюда и вследствие (10) имеем

$$e^j(x) = x^j. \tag{11}$$

Это значит, что координатная запись форм $e^j(x)$ при употреблении взаимного с ними базиса оказывается особенно простой: все коэффициенты форм $e^j(x)$ равны нулю, кроме одного, который занимает j-е место и равен единице. Вместе с тем можно сказать, что координаты любого вектора по базису $e_1, \ldots, e_n$ суть значения на этом векторе форм взаимного базиса. То же самое выражается также равенством

$$x = e^1(x)\,e_1 + \ldots + e^n(x)\,e_n. \tag{12}$$

§ 3. Разложение полилинейной формы в сумму произведений линейных форм

п° 1. Обозначим через L^k декартово k-кратное произведение пространства L на себя: $L^k = L \times L \times \ldots \times L$ (k раз). По определению пространства L^k его элементами являются упорядоченные наборы векторов из L, взятых в числе k; таким образом, $(x_1, \ldots, x_k) \in L^k$, если каждый из векторов $x_1, \ldots, x_k$ принадлежит L. *Полилинейную форму* от векторных аргументов определим как действительную функцию a в L^k при условии линейности по каждому (векторному) аргументу

$$a(\alpha x_1' + \beta x_1'', x_2, \ldots, x_k) = \\ = \alpha a(x_1', x_2, \ldots, x_k) + \beta a(x_1'', x_2, \ldots, x_k).$$

Здесь условие линейности записано для первого аргумента.

п° 2. Рассмотрим произвольную полилинейную форму a. Возьмем любые линейные формы $e^1, \ldots, e^n$ в числе n при единственном условии их линейной независимости.

Теорема. *Численное значение $a(x_1, \ldots, x_k)$ формы a может быть представлено в виде*

$$a(x_1, \ldots, x_k) = \sum a_{j_1 \ldots j_k} e^{j_1}(x_1) \ldots e^{j_k}(x_k), \tag{1}$$

где $a_{j_1 \ldots j_k}$ — коэффициенты, которые определяются данной формой a, а также выбором системы линейно-независимых форм $e^1, \ldots, e^n$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в L, взаимный с базисом $e^1, \ldots, e^n$, в L^*. Запишем каждый

из векторов $x_1, \ldots, x_k$ согласно § 2:

$$x_1 = e^1(x_1)\, e_1 + \ldots + e^n(x_1)\, e_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_k = e^1(x_k)\, e_1 + \ldots + e^n(x_k)\, e_n.$$

Подставим эти разложения в левую часть (1) и воспользуемся линейностью формы $a(x_1, \ldots, x_k)$ по каждому аргументу. Мы получим правую часть выражения (1), где положено

$$a_{j_1 \ldots j_k} = a(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}). \tag{2}$$

Теорема доказана.

п° 3. Выражение (1) само по себе, т. е. будучи уже доказанным, не предусматривает использование какого-либо базиса. Если же пользоваться базисом $e_1, \ldots, e_n$, который употребляется в доказательстве, то формы $e^1(x), \ldots, e^n(x)$ можно выразить в нем известным нам специальным образом; именно,

$$e^j(x_k) = x_k^j,$$

где справа написана j-я координата вектора x_k в базисе $e_1, \ldots, e_n$. В этом базисе выражение (1) принимает вид

$$a(x_1, \ldots, x_k) = \sum a_{j_1 \ldots j_k} x_1^{j_1} \ldots x_k^{j_k}. \tag{3}$$

Мы получаем представление формы $a(x_1, \ldots, x_k)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Этот базис в L можно взять заранее и вполне произвольно. Взаимный с ним базис найдется, но при употреблении записи (3) может не использоваться.

п° 4. Из равенства (2) следует, что для данной формы a и для данных базисных форм $e^1, \ldots, e^n$, разложение (1) единственно, т. е. численные значения коэффициентов $a_{j_1 \ldots j_k}$ однозначно определены индексами $j_1, \ldots, j_k$.

§ 4. Пространство полилинейных форм

п° 1. Полилинейные формы, определенные в пространстве $L^k = L \times \ldots \times L$, образуют линейное пространство, если для произвольных двух таких форм a и b определить линейные операции согласно равенству

$$(\alpha a + \beta b)(x_1, \ldots, x_k) = \alpha a(x_1, \ldots, x_k) + \beta b(x_1, \ldots, x_k).$$

Это линейное пространство мы обозначим через $T^k(L)$ или просто через T^k и будем называть k-кратным тензорным произведением сопряженного пространства L^* на себя. Символически

$$T^k = T^k(L) = L^* \otimes L^* \otimes \ldots \otimes L^*.$$

Заметим, что само пространство L^* есть T^1. Поэтому

$$T^k = T^1 \otimes T^1 \otimes \ldots \otimes T^1.$$

Полилинейные формы как элементы пространства T^k называются *k-тензорами*, подробнее, — *ковариантными тензорами валентности k* в пространстве L. Линейные формы как элементы пространства $T^1 = L^*$ называются *одновалентными ковариантными тензорами*, или *ковариантными векторами*, или *ковекторами*. Действительные числа мы будем называть *тензорами нулевой валентности*. Действительную ось $\mathbb{R}$ обозначим соответственно сказанному через T^0.

п° 2. Поменяв ролями L и L^*, получим аналогично предыдущему *контравариантные тензоры валентности k*, как полилинейные формы, отображающие $(L^*)^k$ в $\mathbb{R}$.

п° 3. *Тензорным произведением* или просто *произведением тензора a на тензор b*

$$a \in T^k(L), \quad b \in T^l(L)$$

называется тензор, который обозначается $a \otimes b$, принадлежит пространству $T^{k+l}(L)$ и определяется в виде полилинейной формы равенством

$$(a \otimes b)(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = \\ = a(x_1, \ldots, x_k)\, b(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}). \qquad (1)$$

Здесь слева и справа написаны численные значения полилинейных форм при любом выборе векторов $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l} \in L$, взятых независимо друг от друга.

п° 4. Тензорное произведение обладает следующими свойствами:

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b,$$
$$a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2,$$
$$(\alpha a) \otimes b = \alpha (a \otimes b),$$
$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c).$$

Доказательство этих свойств тривиально.

Последнее свойство позволяет писать $a \otimes b \otimes c$ без указания ассоциаций. Вместе с тем определено тензорное произведение любого числа любых тензорных сомножителей.

п° 5. Легко убедиться, что, вообще говоря, $a \otimes b$ не совпадает с $b \otimes a$ (достаточно написать (1) для $b \otimes a$).

п° 6. Попутно заметим, что равенство тензоров a и b следует понимать как тождественное совпадение полилинейных форм a: $L^k \to \mathbb{R}$ и b: $L^k \to \mathbb{R}$. Равенство $a = 0$ означает отображение a: $L^k \to 0$.

п° 7. Пусть $e^1, \ldots, e^n$ линейно-независимые линейные формы в L. Мы рассматриваем их как одновалентные тензоры, т. е. как элементы пространства $\mathrm{T}^1 = L^*$. Тогда

$$e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \ldots \otimes e^{j_k} \in \mathrm{T}^k. \tag{2}$$

Имеет место

Теорема. *Множество всех тензорных произведений* (2), *т. е. отвечающих всевозможным набором индексов* $j_1, \ldots, j_k$ $(j_1 = 1, 2, \ldots, n; \ldots; j_k = 1, 2, \ldots, n)$ *составляет базис в* T^k.

Доказательство. Теорема уже доказана в п° 2—5 § 3. Установленные там предложения означают, что для любого $a \in \mathrm{T}^k$ имеет место единственное разложение

$$a = \sum a_{j_1 \ldots j_k} e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_k} \tag{3}$$

(см. формулу (1) § 3). А это и значит, что $e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_k}$ составляют базис.

Следствие. *Размерность пространства* T^k *равна* n^k.

Замечание. Коэффициенты $a_{j_1 \ldots j_k}$ разложения (3) называются *координатами тензора* a (по базису $e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_k}$ в T^k).

п° 8. Итак, мы имеем счетную последовательность пространств

$$\mathrm{T}^0, \mathrm{T}^1, \mathrm{T}^2, \ldots, \mathrm{T}^k, \ldots,$$

построенных по данному линейному пространству L. В каждом T^k определены линейные операции, в каждой паре T^k, T^l (допуская $k = l$) определена операция тензорного произведения: $a \otimes b$, $a \in \mathrm{T}^k$, $b \in \mathrm{T}^l$, $a \otimes b \in \mathrm{T}^{k+l}$.

Элементы этих пространств, как объекты указанных операций, называются *ковариантными тензорами* (над L). Если $a \in T^k$, то a называется *тензором валентности* k. Пространство T^k является n^k-мерным.

§ 5. Альтернация полилинейных форм

п° 1. *Альтернация* полилинейной формы a обозначается через $[a]$ и определяется (независимо от базиса) следующим образом:

$$[a](x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum \delta_{1 \ldots k}^{i_1 \ldots i_k} a(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}); \quad (1)$$

здесь справа участвует альтернатор, о котором говорилось в § 1. В частности, имеем при $k = 1, 2, 3$ соответственно

$$[a](x) = a(x),$$

$$[a](x_1, x_2) = \frac{1}{2!}(a(x_1, x_2) - a(x_2, x_1)),$$

$$[a](x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3!}(a(x_1, x_2, x_3) + a(x_2, x_3, x_1) +$$

$$+ a(x_3, x_1, x_2) - a(x_2, x_1, x_3) - a(x_1 x_3, x_2) - a(a_3, x_2, x_1)).$$

Равенство (1) надлежит понимать с учетом следующего условия: если те же аргументы $x_1, \ldots, x_k$ слева написаны в другом (не натуральном) порядке, то в таком же порядке должны быть написаны нижние индексы альтернатора справа.

1) Альтернация полилинейной формы сама есть полилинейная форма. Именно (для первого аргумента)

$$[a](\alpha x_1' + \beta x_1'', x_2, \ldots, x_k) =$$
$$= \alpha [a](x_1', x_2, \ldots, x_k) + \beta [a](x_1'', x_2, \ldots, x_k).$$

2) Альтернация полилинейной формы кососимметрична по любой паре аргументов. Например, для первой пары аргументов

$$[a](x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = -[a](x_2, x_1, x_3, \ldots, x_k). \quad (2)$$

Эти свойства непосредственно вытекают из определения альтернатора, из равенства (1) и из высказанного

выше условия по поводу порядка расположения индексов в левой и правой частях равенства (1).

п° 2. Полилинейная форма $\omega = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется *косой* или *внешней*, если $[\omega] = \omega$. *Косой является всякая форма, имеющая не менее двух аргументов* ($k \geqslant 2$) *и кососимметричная по любой паре своих аргументов.* В самом деле, в случае кососимметричности по любой паре аргументов имеем

$$\delta_{1 \ldots k}^{i_1 \ldots i_k} a\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right) = a\left(x_1, \ldots, x_k\right)$$

для любого набора индексов $i_1 \ldots i_k$. Таким образом, все слагаемые суммы в правой части равенства (1) в этом случае одинаковы и равны $a(x_1, \ldots, x_k)$. Так как число слагаемых равно $k!$, то

$$[a](x_1, \ldots, x_k) = a(x_1, \ldots, x_k). \qquad (2')$$

Обратно, если $k \geqslant 2$ и форма косая (совпадает со своей альтернацией), то она кососимметрична по любой паре своих аргументов. Это утверждение сразу следует из косой симметрии альтернации (см. равенства (2) и (2')). Кроме этих форм, к числу внешних следует отнести всякую линейную форму, т. е. всякую форму при $k = 1$ (поскольку для всякой линейной формы $[\omega] = \omega$).

п° 3. Для любой формы повторная альтернация совпадает с однократной

$$[[a]](x_1, \ldots, x_k) = [a](x_1, \ldots, x_k).$$

Доказательство. Утверждение очевидно, так как альтернация кососимметрична и полилинейна.

п° 4. Пусть $k \geqslant 2$. Рассмотрим коэффициенты разложения полилинейной формы ω по базису в T^k, отвечающему некоторому базису $e^1, \ldots, e^n \in L^*$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — взаимный базис в L, то

$$\omega_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k} = \omega\left(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_k}\right).$$

Если форма ω косая, то при обмене местами любых двух ее аргументов она меняет знак. Следовательно, *коэффициенты косой формы кососимметричны по любой паре индексов*; например, для первой пары индексов

$$\omega_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k} = -\omega_{i_2 i_1 i_3 \ldots i_k}.$$

Обратно, *если в каком-либо базисе коэффициенты полилинейной формы* ω *кососимметричны по любой паре*

индексов, то форма ω является косой (доказательство предоставляем читателю).

п° 5. Имеют место следующие предложения; они легко усматриваются, и мы приведем их без доказательства.

1) *Если у косой формы два аргумента принимают одинаковые значения, то форма обращается в нуль.*

2) *Если аргументы косой формы линейно-зависимы, то форма равна* 0.

3) *Если число аргументов $k > n$, то косая форма тождественно равна нулю, т. е. равна* 0 *на любом наборе своих аргументов.*

п° 6. В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма. *Если две формы удовлетворяют тождеству*

$$a(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = \\ = b(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}, x_1, \ldots, x_k), \qquad (3)$$

то

$$[a](x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = \\ = [b](x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}, x_1, \ldots, x_k). \qquad (4)$$

Доказательство. Возьмем произвольный член суммы, стоящей в левой части (4)

$$\delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \alpha_{k+1} \ldots \alpha_{k+l}}_{1 \ldots k\ (k+1) \ldots (k+l)} a\left(x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_k} x_{\alpha_{k+1}} \ldots x_{\alpha_{k+l}}\right).$$

Для произвольного члена правой части имеем

$$\delta^{\beta_1 \ldots \beta_l \beta_{l+1} \ldots \beta_{l+k}}_{(k+1) \ldots (k+l)\ 1 \ldots k} b\left(x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_l} x_{\beta_{l+1}} \ldots x_{\beta_{l+k}}\right) = \\ = \delta^{\beta_{l+1} \ldots \beta_{l+k} \beta_1 \ldots \beta_l}_{1 \ldots k\ (k+1) \ldots (k+l)} b\left(x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_l} x_{\beta_{l+1}} \ldots x_{\beta_{l+k}}\right).$$

Установим взаимно однозначное соответствие между членами сумм в левой и правой частях (4), полагая соответствующими члены, для которых

$$\beta_{l+1} = \alpha_1, \ldots, \beta_{l+k} = \alpha_k, \quad \beta_1 = \alpha_{k+1}, \ldots, \beta_l = \alpha_{k+l}.$$

Вследствие (3) соответствующие члены будут равны. Тем самым лемма доказана.

§ 6. Второе выражение альтернации

п° 1. Пусть имеются линейные формы $u_1, \ldots, u_k$. Перемножим их тензорно в произвольном порядке. Мы получим полилинейную форму $u_{s_1} \otimes \ldots \otimes u_{s_k}$. Напишем

числовое значение альтернации этой формы:

$$[u_{s_1} \otimes \ldots \otimes u_{s_k}](x_1, \ldots, x_k) = \\ = \frac{1}{k!} \sum \delta_{1 \ldots k}^{j_1 \ldots j_k} u_{s_1}(x_{j_1}) \ldots u_{s_k}(x_{j_k}). \qquad (1)$$

Выражение (1) неудобно для использования. Дело в том, что оно представляет не альтернацию $u_{s_1} \otimes \ldots \otimes u_{s_k}$ по данным $u_1, \ldots, u_k$, а ее численное значение на произвольном наборе аргументов $x_1, \ldots, x_k$. От этого набора мы не можем отвлечься, поскольку в правой части (1) приходится следить за порядком расположения аргументов в каждом слагаемом. Однако выражение $[u_{s_1} \otimes \ldots \otimes u_{s_k}](x_1, \ldots, x_k)$ легко освободить от этого недостатка. Именно, имеет место тождество

$$\sum \delta_{1 \ldots k}^{j_1 \ldots j_k} u_{s_1}(x_{j_1}) \ldots u_{s_k}(x_{j_k}) = \\ = \sum \delta_{s_1 \ldots s_k}^{i_1 \ldots i_k} u_{i_1}(x_1) \ldots u_{i_k}(x_n). \qquad (2)$$

Важно заметить, что суммирование в правой части (2) производится не по номерам аргументов $x_1, \ldots, x_k$, а по номерам самих форм $u_1, \ldots, u_k$. В каждом слагаемом правой части (2) сомножители записаны в натуральном порядке аргументов $x_1, \ldots, x_k$. Из (1) и (2) получаем

$$[u_{s_1} \otimes \ldots \otimes u_{s_k}](x_1, \ldots, x_k) = \\ = \frac{1}{k!} \sum \delta_{s_1 \ldots s_k}^{i_1 \ldots i_k} (u_{i_1} \otimes \ldots \otimes u_{i_k})(x_1, \ldots, x_k). \qquad (3)$$

Доказательство тождества (2). В сумме (2) слева достаточно учитывать лишь те слагаемые, в которых набор $j_1, \ldots, j_k$ является перестановкой набора $1, \ldots, k$. Будем считать слагаемые в сумме (2) слева различными, если они отвечают различным расположениям индексов $j_1, \ldots, j_k$ (не обращая внимания на численные значения слагаемых). Аналогично определим различные слагаемые суммы (2) справа. Рассматриваемые с такой точки зрения, все слагаемые этих сумм должны считаться попарно различными, как слева, так и справа.

Возьмем в сумме (2) слева слагаемое, отвечающее некоторой перестановке $j_1, \ldots, j_k$, и рассмотрим произведение

$$u_{s_1}(x_{j_1}) \ldots u_{s_k}(x_{j_k}).$$

Сделаем здесь перемену мест сомножителей, располагая их в порядке номеров аргументов; получим

$$u_{i_1}(x_1)\ldots u_{i_k}(x_k).$$

Очевидно, что

$$u_{s_1}(x_{j_1})\ldots u_{s_k}(x_{j_k})=u_{i_1}(x_1)\ldots u_{i_k}(x_k). \tag{4}$$

Таким способом с перестановкой $j_1, \ldots, j_k$ сопоставляется перестановка $i_1, \ldots, i_k$. Одновременно мы сопоставим со взятым слагаемым суммы (2) слева то слагаемое суммы (2) справа, которое отвечает перестановке $i_1, \ldots, i_k$. Установленное соответствие между слагаемыми сумм (1) и (2) будет взаимно однозначным, поскольку двум разным перестановкам $j_1, \ldots, j_k$ сопоставляются также разные перестановки $i_1, \ldots, i_k$.

Легко убедиться, что

$$\delta_{1\ldots k}^{j_1\ldots j_k}=\delta_{s_1\ldots s_k}^{i_1\ldots i_k}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что в суммах (2) соответствующие слагаемые слева и справа численно совпадают. Тем самым тождество доказано.

п° 2. Пусть имеется полилинейная форма с численным значением

$$a(x_1, \ldots, x_k)=\sum a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}e^{\alpha_1}(x_1)\ldots e^{\alpha_k}(x_k).$$

Из определения альтернации следует, что альтернация суммы форм равна сумме их альтернации и что числовой коэффициент можно выносить за знак альтернации. Поэтому

$$[a](x_1, \ldots, x_k)=$$
$$=\sum a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}[e^{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes e^{\alpha_k}](x_1, \ldots, x_k). \tag{6}$$

Здесь мы можем теперь считать, что

$$[e^{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes e^{\alpha_k}](x_1, \ldots, x_k)=$$
$$=\frac{1}{k!}\sum\delta_{i_1\ldots i_k}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_k})(x_1, \ldots, x_k) \tag{7}$$

Выражение (7) непосредственно следует из (3); нужно только учесть изменение обозначений (в частности, что номера базисных форм поставлены сверху).

§ 7. Альтернация тензоров

п° 1. Пусть тензор a есть полилинейная форма со значением $a(x_1, \ldots, x_k)$. Тогда *альтернацией* $[a]$ *тензора* a мы назовем альтернацию формы a. Заметим, что при этом мы не можем рассматривать тензор a формально, т. е. просто как элемент пространства T^k, поскольку альтернация определена путем перестановок аргументов $x_1, \ldots, x_k$; таким образом мы вынуждены использовать свойства формы как функции. Но, если выбрать базисные формы $e^1, \ldots, e^n$, то альтернацию тензора $a \in T^k$ можно выразить с помощью тех операций, которые введены в T^k и в парах T^k, T^l.

Именно, тензор a может быть записан в виде

$$a = \sum a_{j_1 \ldots j_k} e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_k}. \tag{1}$$

Из (1) и из формулы (6) § 6 имеем

$$[a] = \sum a_{j_1 \ldots j_k} [e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_k}], \tag{2}$$

где правая часть определена согласно (7) § 6:

$$[e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_k}] = \frac{1}{k!} \sum \delta^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_k} (e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}). \tag{3}$$

Замечание. В дальнейшем в записи произведения тензоров мы позволим себе часто опускать знак $\otimes$. В таком случае формула (2), например, запишется проще:

$$[a] = \sum a_{j_1 \ldots j_k} [e^{j_1} \ldots e^{j_k}].$$

§ 8. Внешнее произведение внешних форм

п° 1. В этом параграфе мы определим некоторое действие над внешними (косыми) формами, называемое их внешним произведением. Условимся называть *степенью* внешней формы число ее (векторных) аргументов. Таким образом, если дана внешняя форма $\omega = \omega(x_1, \ldots, x_k)$, то ее степень $= k$. Внешнюю форму степени k часто называют *k-формой*.

п° 2. Пусть даны две внешние формы ω_1^k, ω_2^l, где k, l — степени данных форм.

Определение. *Внешним произведением* формы ω_1^k на форму ω_2^l называется внешняя форма, которая обозначается и выражается согласно равенству

$$\omega_1^k \wedge \omega_2^l = \frac{(k+l)!}{k!\,l!}\left[\omega_1^k \otimes \omega_2^l\right]. \tag{1}$$

Внешнее произведение $\omega_1^k \wedge \omega_2^l$ есть внешняя (косая) форма, поскольку в правой части (1) произведение $\omega_1^k \otimes \omega_2^l$ проальтернировано.

п° 3. Для альтернации имеют место соотношения:

$$[\Sigma\omega] = \sum [\omega], \qquad [\alpha\omega] = \alpha[\omega].$$

Отсюда получаются соответствующие свойства внешнего произведения:

a) $\quad (\alpha\omega_1^k) \wedge \omega_2^l = \omega_1^k \wedge (\alpha\omega_2^l) = \alpha(\omega_1^k \wedge \omega_2^l),$

b) $\quad (\omega_1^k + \omega_2^k) \wedge \omega_3^l = \omega_1^k \wedge \omega_3^l + \omega_2^k \wedge \omega_3^l.$

Доказательства этих свойств сразу следуют из определения п° 1, и мы проводить их не будем.

c) $\quad \omega_1^k \wedge \omega_2^l = (-1)^{kl}\,\omega_2^l \wedge \omega_1^k.$

Докажем это свойство. Очевидно, что

$$\omega_1^k(x_1, \ldots, x_k)\,\omega_2^l(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = \\ = \omega_2^l(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})\,\omega_1^k(x_1, \ldots, x_k).$$

Отсюда и вследствие леммы п° 6 § 5

$$(\omega_1^k \wedge \omega_2^l)(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = \\ = (\omega_2^l \wedge \omega_1^k)(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}, x_1, \ldots, x_k).$$

Следовательно, ввиду кососимметричности правой части предыдущего равенства

$$(\omega_1^k \wedge \omega_2^l)(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = \\ = (-1)^{kl}(\omega_2^l \wedge \omega_1^k)(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}).$$

Следствие. *Если $l = k$ — нечетное и $\omega_2^l = \omega_1^k$, то* $\omega_1^k \wedge \omega_2^l = 0$.

Частный случай. Для двух линейных форм u, v имеем

$$(u \wedge v)(x_1, x_2) = -(v \wedge u)(x_1, x_2).$$

d) Свойство ассоциативности

$$(\omega_1^k \wedge \omega_2^l) \wedge \omega_3^m = \omega_1^k \wedge (\omega_2^l \wedge \omega_3^m).$$

Доказательство этого свойства будет дано позже (см. § 9). Сначала установим тождество

$$[[e^{i_1} \ldots e^{i_k}][e^{j_1} \ldots e^{j_l}]] = [e^{i_1} \ldots e^{i_k} e^{j_1} \ldots e^{j_l}]. \qquad (2)$$

Здесь $e^{i_1}, \ldots, e^{j_1}, \ldots$ суть базисные формы.

Для доказательства тождества (2) заметим, что

$$[e^{i_1} \ldots e^{i_k}] = \frac{1}{k!} \sum \delta^{i_1 \ldots i_k}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} e^{\alpha_1} \ldots e^{\alpha_k}.$$

$$[e^{j_1} \ldots e^{j_l}] = \frac{1}{l!} \sum \delta^{j_1 \ldots j_l}_{\beta_1 \ldots \beta_l} e^{\beta_1} \ldots e^{\beta_l}.$$

Перемножая и применяя альтернацию, получим

$$[[e^{i_1} \ldots e^{i_k}][e^{j_1} \ldots e^{j_l}]] =$$
$$= \frac{1}{k!\, l!} \sum \delta^{i_1 \ldots i_k}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \delta^{j_1 \ldots j_l}_{\beta_1 \ldots \beta_l} [e^{\alpha_1} \ldots e^{\alpha_k} e^{\beta_1} \ldots e^{\beta_l}].$$

При перестановке в правой части предыдущего равенства двух индексов среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ или $\beta_1, \ldots, \beta_l$ будет меняться знак альтернации. Но при этом будет одновременно меняться знак соответствующего альтернатора. Поэтому в каждом члене индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ можно привести к стандартному расположению $i_1 \ldots i_k\ j_1 \ldots j_l$; тогда все члены справа окажутся одинаковыми и число их будет $k!\ l!$. Таким образом, правая часть примет вид $[e^{i_1} \ldots e^{i_k} e^{j_1} \ldots e^{j_l}]$. Тождество (2) доказано.

§ 9. Внешнее произведение базисных форм

п° 1. Имеем для базисных форм (первой степени)

$$e^i \wedge e^j = 2!\, [e^i e^j]. \qquad (1)$$

Отсюда

$$(e^i \wedge e^j) \wedge e^k = \frac{3!}{2!\, 1!} [e^i \wedge e^j, e^k] =$$
$$= 3!\, [[e^i e^j] e^k] = 3!\, [e^i e^j e^k] \qquad (2)$$

(см. тождество (2) § 8). Аналогично

$$e^i \wedge (e^j \wedge e^k) = 3!\, [e^i e^j e^k].$$

Следовательно,

$$(e^i \wedge e^j) \wedge e^k = e^i \wedge (e^j \wedge e^k) = e^i \wedge e^j \wedge e^k.$$

Это равенство выражает ассоциативное свойство внешнего произведения базисных форм. Но чтобы доказать свойство ассоциативности в общем виде (см. § 8, свойство d)), т. е. для внешнего произведения трех любых внешних форм, предыдущее равенство приходится обобщить.

п° 2. Прежде всего, пользуясь тождеством (2) и применяя индукцию, мы получим

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = k!\,[e^{i_1} \ldots e^{i_k}]. \tag{3}$$

Используя формулы (2) § 8 и (3), найдем

$$(e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}) \wedge (e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_l}) = \\ = e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_l}. \tag{4}$$

Отсюда

$$((e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}) \wedge (e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_l})) \wedge (e^{s_1} \wedge \ldots \wedge e^{s_m}) = \\ = (e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}) \wedge ((e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_l}) \wedge \\ \wedge (e^{s_1} \wedge \ldots \wedge e^{s_m})). \tag{5}$$

п° 3. Из последнего равенства ассоциативное свойство d) § 8 вытекает непосредственно. Достаточно каждую форму ω_1^k, ω_2^l, ω_3^m разложить по надлежащему базису и выполнить внешние произведения этих форм почленно; тогда из (5) получится нужное соотношение

$$(\omega_1^k \wedge \omega_2^l) \wedge \omega_3^m = \omega_1^k \wedge (\omega_2^l \wedge \omega_3^m).$$

Разложению внешних форм по базису посвящен следующий параграф.

§ 10. Пространство внешних форм данной степени и базис в нем

п° 1. Внешние формы данной степени k (коротко: k-формы) составляют линейное пространство, которое является подпространством в T^k. В самом деле, если $\omega_1, \omega_2 \in T^k$ и

$$[\omega_1] = \omega_1, \quad [\omega_2] = \omega_2,$$

то

$$[\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2] = \alpha_1[\omega_1] + \alpha_2[\omega_2] = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2.$$

Линейное пространство k-форм обозначим через Λ^k; имеем $\Lambda^k \subset T^k$. Элементы Λ^k называются также *косыми тензорами*.

Отметим, что $\Lambda^1 = T^1 = L^*$.

п° 2. Пусть $e^1, \ldots, e^n$ — базис в L^*. Тогда, как мы знаем, всевозможные произведения $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$ составляют базис в T^k. Соответственно, для произвольного k-тензора, т. е. для произвольной формы $\omega \in T^k$, имеем

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \ldots e^{i_k}. \tag{1}$$

Здесь мы воспользовались договоренностью опускать для краткости записи знак $\otimes$. Числа $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ суть коэффициенты разложения (1), или координаты тензора ω. Если тензор ω — косой и $k \geqslant 2$, то его координаты $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ обладают косой симметрией по любой паре индексов; например

$$\omega_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k} = -\omega_{i_2 i_1 i_3 \ldots i_k}.$$

Обратно, если $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ кососимметричен по всем парам индексов, то ω — косой тензор (т. е. является косой формой). Тем самым мы имеем характеристику подпространства Λ^k в пространстве T^k с помощью только таких соотношений, которые специфичны для T^k (точнее, с помощью линейных операций в T^k и операции тензорного перемножения). Заметим, что выбор базиса $e^1, \ldots, e^n$ при этом безразличен.

п° 3. Теперь мы укажем базис в подпространстве Λ^k. Прежде всего, учтем, что если форма ω косая, то она равна своей альтернации.

Поэтому из (1) получается равенство

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} [e^{i_1} \ldots e^{i_k}]. \tag{2}$$

Пользуясь формулой (3) § 9, форму (2) можно представить в виде

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, \tag{3}$$

или

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, \tag{4}$$

где звездочка перед знаком суммы означает, что суммирование ведется по индексам $i_1 \ldots i_k$ при условии, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Теорема. *Всевозможные наборы внешних произведений $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ при условии, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, составляют базис в Λ^k, т. е. в пространстве внешних форм данной степени k.*

Доказательство. Ввиду наличия разложения (4), достаточно доказать, что указанные наборы внешних произведений линейно независимы. Допустим, что есть тождественное соотношение

$$* \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = 0, \tag{5}$$

где $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ — некоторые числа; при этом $i_1 < \ldots < i_k$.

Заметим, что разложение вида (1) всегда может быть восстановлено по заранее данному разложению вида (4). Поэтому из (5) имеем

$$\sum \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \ldots e^{i_k} = 0.$$

Отсюда $\omega_{i_1 \ldots i_k} = 0$. Таким образом, $\omega_{i_1 \ldots i_k} = 0$ как следствие (5). Теорема доказана.

Следствие. *Пространство всех внешних форм степени k имеет размерность C_n^k.*

Пример. Пусть $k = 2$. Тогда разложение внешней формы ω будет иметь вид

$$\begin{aligned}\omega = * \sum \omega_{i_1 i_2} e^{i_1} \wedge e^{i_2} = \\ = \omega_{12} e^1 \wedge e^2 + \omega_{13} e^1 \wedge e^3 + \ldots + \omega_{1n} e^1 \wedge e^n + \\ + \omega_{23} e^2 \wedge e^3 + \ldots + \omega_{2n} e^2 \wedge e^n + \\ + \ldots \ldots \ldots + \\ + \omega_{(n-1)n} e^{n-1} \wedge e^n.\end{aligned}$$

§ 11. Вычисление одночленных форм

n° 1. Разложим векторы $x_1, \ldots, x_k$ по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^1 e_1 + \ldots + x_1^n e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k &= x_k^1 e_1 + \ldots + x_k^n e_n. \end{aligned}$$

Базисные формы $e^1, \ldots, e^n$, как и раньше, возьмем так, что $e^i(x)$ равна i-й координате аргумента x.

п° 2. Пусть $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$; тогда

$$(e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k})(x_1, \ldots, x_k) = \\ = \sum \delta^{i_1 \ldots i_k}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} e^{\alpha_1}(x_1) \ldots e^{\alpha_k}(x_k) = \\ = \sum \delta^{i_1 \ldots i_k}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} = V^{i_1 \ldots i_k},$$

где $V^{i_1 \ldots i_k}$ — минор k-го порядка матрицы X, составленной из координат векторов $x_1, \ldots, x_k$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^1 & x_k^2 & \ldots & x_k^n \end{bmatrix};$$

минор $V^{i_1 \ldots i_k}$ определен столбцами, номера которых суть $i_1, \ldots, i_k$.

Замечание. Если пространство евклидово и $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис, то число $V^{i_1 \ldots i_k}$ есть k-мерный ориентированный объем k-мерного параллелепипеда, который построен на проекциях векторов $x_1, \ldots, x_k$ на координатную k-мерную плоскость базисных векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$.

§ 12. Координатное выражение внешней формы

п° 1. Из § 11 и из формулы (4) § 10 следует координатная запись значения внешней формы:

$$\omega(x_1, \ldots, x_k) = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} V^{i_1 \ldots i_k}. \tag{1}$$

В более подробном виде

$$\omega(x_1, \ldots, x_k) = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \ldots & x_1^{i_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k^{i_1} & \ldots & x_k^{i_k} \end{vmatrix}.$$

§ 13. Специальные обозначения

п° 1. Вернемся к разложению внешней формы согласно (4) § 10

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}. \tag{1}$$

Так как $e^i(x)=x^i$, то символ x^i мы будем рассматривать как обозначение формы e^i. Ввиду этого наряду с формулой (1) будем употреблять также формулу

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_k}. \qquad (1')$$

Формулы (1) и (1′) отличаются только способом записи. Во избежание недоразумений еще раз подчеркнем, что в равенстве (1′) $x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$ надлежит понимать, как обозначение линейных форм, которые могут быть взяты от разных векторных аргументов (каждая от своего). Например,

$$(x^1 \wedge x^2)(x_1, x_2) = (e^1 \wedge e^2)(x_1, x_2) =$$
$$= e^1(x_1)\, e^2(x_2) - e^2(x_1)\, e^1(x_2) = x_1^1 x_2^2 - x_1^2 x_2^1 = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix};$$

здесь x^1, x^2 — формы, x_1, x_2 — векторы, x_j^i — их координаты.

п° 2. Отметим еще равенство, которое соответствует разложению определителя $V^{i_1 \ldots i_k}$ по элементам последней строки:

$$(x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \ldots \wedge x^{i_{k-1}} \wedge x^{i_k})(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) =$$
$$= (-1)^{k-1} \{ (x^{i_2} \wedge x^{i_3} \wedge \ldots \wedge x^{i_k})\, x_k^{i_1} -$$
$$- (x^{i_1} \wedge x^{i_3} \wedge \ldots \wedge x^{i_k})\, x_k^{i_2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} (x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \ldots \wedge x^{i_{k-1}})\, x_k^{i_k} \} (x_1, \ldots, x_{k-1}); \qquad (2)$$

в правой части написаны внешние произведения линейных форм, которые в каждом слагаемом берутся последовательно от векторных аргументов $x_1, \ldots, x_{k-1}$; коэффициенты $x_k^{i_1}, \ldots, x_k^{i_k}$ суть числа (координаты вектора x_k).

п° 3. Запись внешней формы в виде (1′) особенно удобна при переходе к новым координатам.

§ 14. Преобразование внешней формы при переходе к новым координатам

п° 1. Пусть делается переход к новым координатам;

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= P_{1'}^1 x^{1'} + \ldots + P_{n'}^1 x^{n'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= P_{1'}^n x^{1'} + \ldots + P_{n'}^n x^{n'}; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

здесь $x^1, \ldots, x^n$ — координаты произвольного вектора x в старом базисе, $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ — координаты этого вектора x в новом базисе. Числа $P^i_{j'}$ суть коэффициенты преобразования. Однако согласно предыдущему параграфу можно считать, что написанные в этих равенствах слева символы суть линейные формы $e^1, \ldots, e^n$, взаимные со старым базисом (т. е. удовлетворяющие условиям $e^i(x) = x^i$, где x^i есть i-я координата вектора x). Аналогичным образом по отношению к новому базису можно рассматривать члены правых частей. При такой точке зрения на формулы (1) приведение каждого члена $x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_k}$ внешней формы (1′) § 13 к новым координатам можно выполнить путем почленного внешнего умножения правых частнй формул (1), беря из них последовательно те, которые имеют номера $i_1, \ldots, i_k$. Выполняя указанное действие, получим

$$x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_k} = * \sum D^{i_1 \ldots i_k}_{j'_1 \ldots j'_k} x^{j'_1} \wedge \ldots \wedge x^{j'_k},$$

где

$$D^{i_1 \ldots i_k}_{j'_1 \ldots j'_k} = \begin{vmatrix} P^{i_1}_{j'_1} & \ldots & P^{i_1}_{j'_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P^{i_k}_{j'_1} & \ldots & P^{i_k}_{j'_k} \end{vmatrix}.$$

В конкретных случаях вместо применения этой готовой формулы удобнее непосредственно проводить действия по правилам внешней алгебры. Например, если

$$x = \alpha u + \beta v,$$
$$y = \gamma u + \delta v,$$

то

$$x \wedge y = (\alpha u + \beta v) \wedge (\gamma u + \delta v) =$$
$$= \alpha\gamma (u \wedge u) + \alpha\delta (u \wedge v) + \beta\gamma (v \wedge u) + \beta\delta (v \wedge v) =$$
$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)(u \wedge v).$$