ВНЕШНЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. Касательные пространства

п° 1. Пусть E — евклидово n-мерное пространство, т. е. линейное n-мерное пространство, в котором задано положительно определенное скалярное произведение.

Зафиксируем какой-нибудь элемент $x \in E$ и будем рассматривать всевозможные пары (x, u), где u — произвольный элемент из E. Во множестве этих пар введем линейные операции:

$$(x, u_1) + (x, u_2) = (x, u_1 + u_2), \tag{1}$$

$$\alpha(x, u) = (x, \alpha u). \tag{2}$$

Полученное тем самым линейное пространство пар (x, u) обозначим через T_x. Первый (зафиксированный) элемент x пары (x, u) мы будем называть *точкой*. Пару (x, u), как элемент T_x, будем называть *вектором*, приложенным к точке x. Впрочем, мы позволим себе говорить также, что вектор u приложен к точке x, если он является вторым элементом пары (x, u).

Линейное пространство T_x назовем *касательным пространством* к E в точке x. Вследствие (1) и (2) биективное отображение E на T_x, при котором произвольному вектору $u \in E$ отвечает пара (x, u), является линейным изоморфизмом. С помощью этого изоморфизма все свойства E, как линейного пространства, переносятся на каждое касательное пространство T_x. Более того, по тому же изоморфизму мы будем переносить из E в T_x и евклидовы свойства E; впрочем, достаточно сказать, что *скалярным произведением* двух элементов (x, u) и (x, v) пространства T_x мы назовем число, равное скалярному произведению элементов $u, v \in E$.

п° 2. Все, что было сейчас определено формально, можно высказать наглядным образом. Именно: 1) любой

элемент $x \in E$ можно зафиксировать и назвать *точкой*; 2) любой элемент $u \in E$ можно сопоставить с точкой x и назвать *вектором, приложенным к точке x*. Можно также сказать, что точка x есть *начало* приложенного к ней *вектора u*. Тогда точку $y = x + u$ следует считать его *концом*. 3) Линейное пространство T_x векторов, приложенных к точке x, называется *касательным пространством к E в точке x*.

п° 3. Согласно сказанному евклидово пространство E можно рассматривать как пространство точек; оно является метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y - x, y - x)}$. Соответственно в E определены все понятия, относящиеся к метрическим пространствам, в частности, в E определено понятие открытого множества и области.

п° 4. Пусть (приложенные) векторы $(x, u) \in T_x$ и $(y, u) \in T_y$ отвечают одному и тому же (свободному) вектору $u \in E$. Тогда говорят, что один из них (любой) получен *параллельным перенесением* другого; например, вектор (y, u) получен параллельным перенесением вектора (x, u) из касательного пространства T_x в касательное пространство T_y.

Очевидно, что приложенные векторы, получаемые во всех касательных пространствах параллельным перенесением какого-нибудь одного вектора, удовлетворяют обычным условиям отношения эквивалентности. Поэтому их часто называют *равными* векторами (хотя они принадлежат разным пространствам). Имея в виду возможность однозначно строить равные векторы в разных касательных пространствах, говорят, что в евклидовом пространстве E имеет место *абсолютный параллелизм векторов*.

п° 5. Вместе с линейным касательным пространством T_x определено сопряженное ему пространство T_x^*; оно называется *кокасательным пространством* к евклидову пространству E в точке x. Кроме того, определено при любом k линейное пространство

$$\overset{\otimes}{T}{}_x^k = T_x^* \otimes \ldots \otimes T_x^*$$

(справа — k сомножителей). В каждом $\overset{\otimes}{T}{}_x^k$ определено подпространство Λ_x^k, аналогично тому, как в § 10 главы I определено подпространство Λ^k пространства T^k.

п° 6. Заметим, наконец, что наличие евклидовой структуры в E нами, по существу, не использовано. Все сказанное относится и к аффинному пространству. Мы предполагаем пространство E евклидовым только с той целью, чтобы в дальнейшем мы могли в нужных случаях применять евклидовы понятия без специальных оговорок.

§ 2. Внешние дифференциальные формы

п° 1. Обозначим через U некоторую область в евклидовом пространстве E. Пусть для любой точки $x \in U$ в касательном пространстве T_x задана полилинейная форма a.

Тогда говорят, что дана форма в области U. Иначе можно сказать, что с каждой точкой x и с каждым упорядоченным набором векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_x$ сопоставлено число из $\mathbb{R}$, или, что дано отображение

$$a\colon T_x^k \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

где T_x^k есть k-кратное произведение T_x на себя. Элементами T_x^k можно считать упорядоченные наборы $(x, \xi_1, \ldots, \xi_k)$. Отображение (1) предполагается линейным по каждому векторному аргументу, т. е. по каждой составляющей набора $(x, \xi_1, \ldots, \xi_k)$, не считая точки x.

Форму (1) называют *дифференциальной формой* в области U. В соответствии с § 3 главы I можно написать $a \in \overset{\otimes}{T}{}_x^k$.

п° 2. Если форма (1) совпадает со своей альтернацией, то ее называют *внешней дифференциальной k-формой* в области U. Для обозначения внешних дифференциальных форм наиболее употребительна буква ω.

Соответственно можно написать $\omega \in \Lambda_x^k$.

п° 3. Разумеется, к дифференциальным формам применимы все алгебраические понятия и методы, о которых говорилось в главе I. Достаточно считать, что точка x зафиксирована, и рассматривать в качестве пространства L касательное пространство T_x. В частности, для внешней формы можно дать координатное представление.

п° 4. Пусть в пространстве E задана координатная система с базисом $e_1, \ldots, e_n$, пусть $e^1, \ldots, e^n$—линейные

формы, которые составляют взаимный с ним базис в сопряженном пространстве E^*. Будем считать, что одновременно с этим в каждом касательном пространстве T_x задан базис, состоящий из векторов $e_1, \ldots, e_n$, приложенных к точке x (для этих приложенных векторов мы сохраним обозначение символами $e_1, \ldots, e_n$). Формы $e^1, \ldots, e^n$ будем рассматривать как элементы сопряженного пространства T_x^*, для чего достаточно полагать, что их аргументы приложены к точке x. Эти постоянные, точнее говоря, не зависящие от x формы, мы будем называть *координатными* (для данной координатной системы) или *проектирующими*, поскольку по условию взаимности

$$e^j(\xi) = \xi^j, \tag{2}$$

что есть проекция вектора ξ на координатную ось с номером j. Координатные формы принято обозначать через dx^j. Таким образом, наряду с записью (2) можно писать

$$dx^j(\xi) = \xi^j. \tag{3}$$

п° 5. Согласно § 10 главы I имеет место координатная запись внешней дифференциальной формы $\omega \in \Lambda_x^k$:

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)\, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, \tag{4}$$

или

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{4'}$$

Формулы (4) и (4′) отличаются только способом записи (подобно формулам (4) § 10 и (1′) § 13 главы I). Обе эти формулы определяют ω как внешнюю форму в касательном пространстве T_x. Коэффициенты $\omega_{i_1 \ldots i_k}(x)$ суть числовые функции точки x (кроме того, они зависят, разумеется, от выбора координатной системы).

Обычную функцию точки ($f\colon U \to \mathbb{R}$) считают формой нулевой степени. Для формы нулевой степени равенство (4′) имеет вид $\omega = \omega(x)$.

п° 6. Рассмотрим примеры. Пусть E — трехмерное евклидово пространство, и пусть в нем дано поле векторов: $p = p(x)$, т. е. в каждой точке $x \in E$ приложен вектор $p(x)$. Тогда в E определены две внешние дифференциальные формы. Одна из них — линейная форма, есть скалярное произведение: $\omega^1 = (p(x), \xi)$. Если $p = p(x)$

истолковать как силу, приложенную в точке x, то ω^1 означает элементарную работу, которую производит сила p при перемещении точки приложения из x в конец вектора $x+\xi$. Другая — внешняя дифференциальная форма второй степени, есть смешанное произведение

$$\omega^2 = (p(x),\ \xi_1,\ \xi_2).$$

Форме ω^2 часто дают гидродинамическое истолкование, полагая, что ω^2 есть поток вектора $p(x)$ через элементарную площадку (ξ_1, ξ_2). Отметим, наконец, внешнюю дифференциальную форму третьей степени —

$$\omega^3 = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3).$$

Эта форма есть ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in T_x$.

Нетрудно написать координатные представления форм ω^1, ω^2, ω^3. Именно, если $p(x) = \{P(x),\ Q(x),\ R(x)\}$, то

$$\omega^1 = P\,dx^1 + Q\,dx^2 + R\,dx^3,$$
$$\omega^2 = R\,dx^1 \wedge dx^2 + (-Q)\,dx^1 \wedge dx^3 + P\,dx^2 \wedge dx^3,$$
$$\omega^3 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Первое из этих равенств усматривается с очевидностью:

$$\omega^1(\xi) = P\xi^1 + Q\xi^2 + R\xi^3 = (P\,dx^1 + Q\,dx^2 + R\,dx^3)(\xi).$$

Чтобы понять второе и третье, достаточно написать общеизвестные выражения смешанного произведения:

$$\omega^2(\xi_1,\ \xi_2) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix} =$$
$$= R\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix} + (-Q)\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^3 \end{vmatrix} + P\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix},$$

$$\omega^3(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда сразу получается предыдущая запись ω^2, ω^3 в символике внешних форм, если использовать § 13 главы I.

§ 3. Внешний дифференциал

п° 1. *Внешний дифференциал* формы нулевой степени, т. е. функции, по определению есть ее обычный дифференциал.

Пусть в области $U \subset E$ задана (действительная) дифференцируемая функция

$$f\colon U \to \mathbb{R}. \tag{1}$$

Тогда в каждой точке $x \in U$ существует дифференциал функции

$$dy = f'(x)\xi. \tag{2}$$

Здесь $f'(x)$ — линейная форма, которая определена в касательном пространстве T_x; dy — ее значение на векторе $\xi \in T_x$. Сама форма $f'(x)$ есть производная данной функции в точке x; ее обозначают также через $Df(x)$.

Мы имеем в виду сейчас функции с числовыми значениями. Соответственно этому, считая действительную ось $\mathbb{R}$ линейным пространством, вместо (2) можно написать

$$f'(x)\colon T_x \to \mathbb{R},$$

подразумевая, что это отображение линейно.

п° 2. Напомним определение производной. Будем считать, что данная функция f определена в области U ($f\colon U \to \mathbb{R}$). Пусть A — некоторое линейное отображение $T_x \to \mathbb{R}$ (точка x зафиксирована при условии $x \in U$). Обозначим через z произвольную (переменную) точку области U. Имеем $z - x \in T_x$; следовательно, определен образ $A(z-x)$ вектора $z-x$ при отображении A. Данная функция f называется *дифференцируемой в точке* x, если существует такое линейное отображение $A\colon T_x \to \mathbb{R}$, что

$$f(z) - f(x) = A(z-x) + o(z-x); \tag{3}$$

здесь «o малое» от $z-x$ понимается как обычно: оно удовлетворяет неравенству

$$\|o(z-x)\| \leqslant \psi(z, x)\|z-x\|, \tag{4}$$

где $\psi(z, x)$ — некоторая неотрицательная функция, которая стремится к нулю при $z \to x$. В данном случае $o(z-x)$ есть функция с числовыми значениями; ее норма $\|o(z-x)\|$ есть просто модуль $|o(z-x)|$.

Линейное отображение $A\colon T_x \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию (3), называется *производной* функцией f в точке x символически $A = Df(x)$ или $A = f'(x)$.

п° 3. Поскольку линейные отображения в $\mathbb{R}$ мы называем формами (с числовыми значениями), то производная функции в данной точке есть форма.

Очевидно, $f'(x) \in \Lambda^1_x$, где $\Lambda^1_x = T^*_x$ есть кокасательное пространство в точке x. Соответственно можно сказать, что производная есть ковектор.

Значение производной на произвольном векторе $\xi \in T_x$ называется *дифференциалом функции*: $dy = Df(x)\xi$, или $df = Df(x)\xi$; можно писать также $dy = f'(x)\xi$ или $df = f'(x)\xi$. Впрочем, дифференциалом часто называют производную.

п° 4. Как видно из определений, данных в п° 2, производная и дифференциал инвариантны, т. е. не зависят от выбора координат. Однако их координатные представления от выбора координатной системы зависят.

Пусть в E введена система координат с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Тогда в каждом касательном пространстве T_x будет введен базис, состоящий из векторов $e_1, \ldots, e_n$, приложенных к точке x. Тем самым произвольный вектор $\xi \in T_x$ получает координатное представление

$$\xi = \{\xi^1, \ldots, \xi^n\}.$$

Одновременно получает координатное представление дифференциал функции

$$df = f_{x^1}\xi^1 + \ldots + f_{x^n}\xi^n. \tag{5}$$

и производная (как ковектор из T^*_x)

$$f'(x) = \{f_{x^1}(x), \ldots, f_{x^n}(x)\}. \tag{6}$$

Здесь $f_{x^1}(x), \ldots, f_{x^n}(x)$ — частные производные в точке x. Они зависят от выбора системы координат, что ясно по их определению и усматривается также из очевидной формулы

$$f_{x^i}(x) = f'(x)e_i. \tag{6'}$$

или

$$f_{x^i}(x) = Df(x)e_i.$$

Последняя формула дает основание писать вместо f_{x^i} символ $D_i f$ или просто D_i.

Замечание. Заметим, что правая часть (5) есть свертка элемента ξ касательного пространства T_x с элементом $f'(x)$ сопряженного пространства T^*_x.

Замечание. Уже сейчас можно понять, что рассматривать и различать касательные пространства имеет смысл, хотя, казалось бы, они не отличаются от исходного пространства E. В самом деле, например, производная $f'(x)$ по нашему определению есть линейное отображение $T_x \to \mathbb{R}$. Можно было бы определить $f'(x)$ как линейное отображение $E \to \mathbb{R}$, но все равно тогда мы должны были бы указать, что оно зависит и как, именно, зависит от точки x. А это, по существу, и означает, что мы имеем дело с парами (x, u), $u \in E$ или, наглядно говоря, с приложенными векторами.

п° 5. Для данной системы декартовых прямоугольных координат зададим систему функций $\pi^1(x), \ldots, \pi^n(x)$ от (переменной) точки $x \in E$ условиями $\pi^i(x) = x^i$, где $x^1, \ldots, x^n$ — координаты точки x. По очевидным причинам эти функции называются *проектирующими*. Легко понять, что

$$d\pi^i(x) = D\pi^i(x)\xi = \xi^i = dx^i(\xi) \tag{7}$$

(см. § 2 п° 2). Таким образом, производные проектирующих функций суть проектирующие формы: $D\pi^i(x) = dx^i$.

Обратим внимание, что формулу (5) можно написать в виде

$$df = (D_1\, dx^1 + \ldots + D_n\, dx^n)(\xi),$$

где справа $D_1, \ldots, D_n$ можно рассматривать как коэффициенты разложения формы Df по формам $dx^1, \ldots, dx^n$. Можно написать также

$$df = D_1\, d\pi^1(x) + \ldots + D_n\, d\pi^n(x),$$

поскольку $d\pi^i(x) = dx^i(\xi)$. Пишут очень часто еще

$$df = D_1\, dx^1 + \ldots + D_n\, dx^n.$$

Однако, поскольку $dx^1, \ldots, dx^n$ означают формы, а не значения форм, то последняя запись на самом деле выражает не дифференциал функции, а ее производную [1]). Соответственно этой записи имеем вместо (7)

$$d\pi^i(x) = dx^i = e^i. \tag{7a}$$

п° 6. Теперь мы определим дифференциал полилинейной формы; тем самым, в частности, будут определены

[1]) Употребление символа d для обозначения производной (вместо дифференциала) вошло в традицию.

высшие дифференциалы функции, так как ее первый дифференциал есть линейная форма.

Пусть в некоторой области U дана дифференциальная полилинейная форма с числовыми значениями

$$a = a(x, \xi_1, \ldots, \xi_k), \tag{8}$$

где $x \in U$, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_x$. Иначе говоря, для любого $x \in U$ дано полилинейное отображение a: $T_x^k \to \mathbb{R}$.

Зафиксируем $\xi_1, \ldots, \xi_k$ в области U. Это значит, что мы выбираем как-нибудь $\xi_1, \ldots, \xi_k$ в некоторой точке $x \in U$, а в остальных точках области U берем в качестве $\xi_1, \ldots, \xi_k$ векторы, которые получаются параллельным перенесением выбранных (см. п° 4 § 1). Если при любых фиксированных $\xi_1, \ldots, \xi_k$ форма a становится дифференцируемой функцией в области U (т. е. дифференцируемой функцией переменной точки $x \in U$), то говорят, что эта форма дифференцируема в области U. Предполагая форму a дифференцируемой, рассмотрим дифференциал функции, которая получается из формы a путем фиксирования $\xi_1, \ldots, \xi_k$:

$$da = Da(x, \xi_1, \ldots, \xi_k)\eta, \qquad \eta \in T_x. \tag{9}$$

Позволим теперь векторам $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_k$ принимать любые значения; тогда правая часть (9) будет полилинейной формой от векторов $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_k$, число которых $= k + 1$. Эта форма называется *дифференциалом* данной формы a.

п° 7. Пусть теперь дана *внешняя* дифференциальная форма

$$\omega = \omega(x, \xi_1, \ldots, \xi_k). \tag{10}$$

Ее дифференциал будет полилинейной формой, которая обладает косой симметрией по аргументам $\xi_1, \ldots, \xi_k$, являющимся аргументами самой формы ω, т. е. без участия η.

п° 8. *Внешним дифференциалом k-формы* ω называется альтернация ее дифференциала, который определен в п° 6, взятая с коэффициентом $k + 1$:

$$d\omega = (k + 1)[D\omega]. \tag{11}$$

Вследствие этой альтернации форма $d\omega$ обладает косой симметрией по всем своим векторным аргументам вместе с η.

Если форма задана своим координатным представлением

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \tag{12}$$

то из (11), (12) и из определения внешнего произведения двух форм получаем

$$d\omega = * \sum d\omega_{i_1 \ldots i_k}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{13}$$

Здесь

$$d\omega_{i_1 \ldots i_k}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx^\alpha; \tag{14}$$

$D_\alpha \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)$ — частные производные.

п° 9. Следует заметить, что согласно принятой символике dx^α, dx^{i_1}, ..., dx^{i_k} суть формы, а не значения форм. Поэтому в силу равенства (13) $d\omega$ точнее следовало бы называть внешней производной, а не внешним дифференциалом. Производной является также $d\omega_{i_1 \ldots i_k}(x)$. Внешний дифференциал мы получим, если подсчитаем $d\omega$ на произвольном наборе векторов η, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_x$. При этом $d\omega_{i_1 \ldots i_k}(x)$ подсчитывается на векторе η. Однако мы сохраним традиционную терминологию.

п° 10. Из определения внешнего дифференциала согласно п° 8 непосредственно следует, что внешний дифференциал в евклидовом пространстве определен нами инвариантно (поскольку в его определении вообще координатная система не участвует). Координатное представление $d\omega$ от выбора системы координат, разумеется, зависит.

§ 4. Основные свойства внешнего дифференциала

п° 1. Из определения внешнего дифференциала или из его координатного представления (9) § 3 непосредственно следует, что операция внешнего дифференцирования является линейной. Именно, если ω_1, ω_2 — любые дифференциальные k-формы, дифференцируемые в области U, и α, β — любые числа, то k-форма $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$ также дифференцируема в U, причем

$$d(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha\, d\omega_1 + \beta\, d\omega_2. \tag{1}$$

Доказательство этого утверждения и только что написанного тождества мы предоставим читателю.

п° 2. Далее, имеет место следующее свойство: если ω, σ — любые внешние дифференциальные формы, дифференцируемые в области U, то внешнее произведение $\omega \wedge \sigma$ есть внешняя дифференциальная форма, которая также дифференцируема в области U, причем

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma, \tag{2}$$

где k — степень формы ω.

Доказательство формулы (2) проведем при помощи какого-нибудь координатного представления (тем самым (2) будет доказано вообще, поскольку сами формы и их внешние дифференциалы инвариантны). Имеем:

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$
$$\sigma = * \sum \sigma_{j_1 \ldots j_l} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l},$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d\Big(* \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} \sigma_{j_1 \ldots j_l} dx^{i_1} \wedge \ldots \\ &\quad \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}\Big) = \\ &= * \sum \big((d\omega_{i_1 \ldots i_k}) \sigma_{j_1 \ldots j_l} + \omega_{i_1 \ldots i_k} d\sigma_{j_1 \ldots j_l}\big) \wedge \\ &\quad \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} = \\ &= * \sum \big(d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\big) \wedge \\ &\quad \wedge \big(* \sum \sigma_{j_1 \ldots j_l} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}\big) + \\ &\quad + (-1)^k \big(* \sum \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\big) \wedge \\ &\quad \wedge \big(* \sum d\sigma_{j_1 \ldots j_l} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}\big). \end{aligned} \tag{3}$$

В правой части равенства (3) перед вторым членом пришлось поставить $(-1)^k$, поскольку линейную форму $d\sigma_{j_1 \ldots j_l}$ нужно было переставить с k-формой $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ (см. § 8 главы I). Вместе с равенством (3) доказано и равенство (2).

п° 3. Лемма. *Если f — дважды дифференцируемая в некоторой области U функция (рассматриваемая как форма нулевой степени), то внешний дифференциал $d(df) = 0$.*

Доказательство. По определению внешних дифференциалов имеем

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

$$d(df) = \sum d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i =$$

$$= \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0.$$

Эта сумма равна нулю потому, что вторая частная производная не меняется при перестановке индексов i, j, а внешнее произведение $dx^i \wedge dx^j$ при такой перестановке меняет знак.

п° 4. Теорема. *Какой бы ни была дважды дифференцируемая в области U внешняя форма ω, всегда*

$$d^2\omega = 0. \tag{4}$$

Здесь $d^2\omega = d(d\omega)$.

Доказательство. Воспользуемся координатным представлением формы ω в какой-нибудь системе координат

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}(x) e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k},$$

где $e^1, \ldots, e^n$ — проектирующие формы, соответствующие выбранной координатной системе. Согласно пп° 5 и 7 § 3

$$e^i = d\pi^i(x), \tag{5}$$

где $\pi^i(x)$ — проектирующие функции. Из (5) и вследствие предыдущей леммы

$$de^i = d(d\pi^i(x)) = 0. \tag{6}$$

С другой стороны, по той же лемме

$$d(d\omega_{i_1 \ldots i_k}(x)) = 0. \tag{7}$$

Применяя (многократно) правила дифференцирования, которые даны в пп° 1 и 2, и пользуясь равенствами (6), (7), получим $d^2\omega = 0$.

п° 5. Сама формулировка доказанной теоремы показывает ее фундаментальное значение для внешнего дифференцирования (хотя бы уже потому, что в силу этой теоремы все дифференциальное исчисление внешних форм сводится только к первым дифференциалам). Дальше мы покажем роль этой теоремы во вполне конкретных и весьма принципиальных вопросах.

§ 5. Примеры внешнего дифференцирования

п° 1. Рассмотрим сначала линейную дифференциальную форму на евклидовой плоскости

$$\omega = P\,dx^1 + Q\,dx^2;$$

здесь P и Q — функции точки x. Имеем

$$d\omega = dP \wedge dx^1 + dQ \wedge dx^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^2}\,dx^2\right) \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial Q}{\partial x^2}\,dx^2\right) \wedge dx^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2.$$

В связи с этими выражениями ω, $d\omega$ полезно вспомнить известную в элементарном анализе формулу Грина.

п° 2. Теперь рассмотрим линейную дифференциальную форму в пространстве

$$\omega = P\,dx^1 + Q\,dx^2 + R\,dx^3; \tag{1}$$

здесь P, Q, R — также функции точки x. Можно считать, что эти функции определяют вектор

$$p(x) = \{P(x),\ Q(x),\ R(x)\}.$$

Имеем:

$$d\omega = dP \wedge dx^1 + dQ \wedge dx^2 + dR \wedge dx^3 =$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial P}{\partial x^3}\,dx^3\right) \wedge dx^1 +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial Q}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial Q}{\partial x^3}\,dx^3\right) \wedge dx^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial R}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial R}{\partial x^3}\,dx^3\right) \wedge dx^3 =$$
$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^3 +$$
$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3.$$

Введем в рассмотрение ротацию вектора $p(x)$:

$$\operatorname{rot} p = \left\{\frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3};\ \frac{\partial P}{\partial x^3} - \frac{\partial R}{\partial x^1};\ \frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right\}.$$

Тогда

$$d\omega(\xi_1, \xi_2) = (\operatorname{rot} p,\ \xi_1,\ \xi_2), \tag{2}$$

т. е. $d\omega(\xi_1, \xi_2)$ представляет собой поток ротации через элементарную площадку (ξ_1, ξ_2) (см. п° 6 § 2). В связи с выражениями (1) и (2), полезно вспомнить известную в элементарном анализе формулу Стокса.

п° 3. Пусть теперь ω — внешняя дифференциальная форма второй степени

$$\omega = R\,dx^1 \wedge dx^2 - Q\,dx^1 \wedge dx^3 + P\,dx^2 \wedge dx^3. \tag{3}$$

Согласно п° 6 § 2 $\omega(\xi_1, \xi_2)$ есть поток вектора $p(x)$ через элементарную площадку (ξ_1, ξ_2). Имеем:

$$\begin{aligned} d\omega = &\left(\frac{\partial R}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial R}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial R}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \\ &- \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial Q}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial Q}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial P}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение дивергенцию поля $p(x)$:

$$\operatorname{div} p = \frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3}.$$

Тогда

$$d\omega = \operatorname{div} p\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{4}$$

Форма $d\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ есть дивергенция поля $p(x)$ в элементарном объеме (ξ_1, ξ_2, ξ_3). В связи с выражениями (3) и (4) полезно вспомнить известную формулу Гаусса — Остроградского.

п° 4. В третьей главе будет установлена некоторая общая интегральная формула, включающая как свои весьма частные случаи все три интегральные формулы, которые упоминались нами в конце каждого из пп° 1, 2 и 3. Ее называют общей *формулой Стокса.*

§ 6. Индуцированное отображение пространства внешних форм

п° 1. Пусть задано линейное пространство L_1 и некоторое линейное отображение его в линейное пространство L_2:

$$\mathfrak{b}: L_1 \to L_2. \tag{1}$$

Вместо (1) можно написать: $v = \psi(u)$, где $u \in L_1$, v — образ элемента u в пространстве $L_2 (v \in L_2)$. Обозначим через $T^k(L_1)$ и $T^k(L_2)$ линейные пространства k-тензоров, определенных соответственно в L_1 и L_2. Как и раньше, будем представлять себе k-тензоры как полилинейные формы.

Для дальнейшего важно, что отображение (1) индуцирует по определенному стандарту некоторое линейное отображение $T^k(L_2)$ в $T^k(L_1)$. Это индуцированное линейное отображение мы обозначим через ψ^* (следовало бы писать ψ_k^*)

$$\psi^*\colon\ T^k(L_2) \to T^k(L_1). \tag{2}$$

Отображение ψ^* определяется следующим образом. Пусть $a(v_1, \ldots, v_k)$ — данная полилинейная форма в $T^k(L_2)$, где $v_1, \ldots, v_k \in L_2$. Пусть теперь $u_1, \ldots, u_k$ — любые векторы в $L_1 (u_1, \ldots, u_k \in L_1)$. С этими векторами мы сопоставим число $a(\psi(u_1), \ldots, \psi(u_k))$. Так как $a(v_1, \ldots, v_k)$ — полилинейная форма и $v = \psi(u)$ — линейное отображение, то $a(\psi(u_1), \ldots, \psi(u_k))$ линейно зависит от каждого из аргументов $u_1, \ldots, u_k$. Тем самым с каждой формой $a \in T^k(L_2)$ сопоставлена форма в $T^k(L_1)$; ее и обозначают через $\psi^* a$; $\psi^* a \in T^k(L_1)$. Согласно сказанному значение формы $\psi^*(a)$ для набора векторов $u_1, \ldots, u_k \in L_1$ определяется равенством

$$(\psi^* a)(u_1, \ldots, u_k) = a(\psi(u_1), \ldots, \psi(u_k)). \tag{3}$$

Легко проверить, что для любых форм $a, b \in T_k(L_2)$ и для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеют место равенства:

$$\psi^*(a + b) = \psi^* a + \psi^* b, \quad \psi^*(\alpha a) = \alpha \psi^* a. \tag{4}$$

Тем самым отображение (2) действительно является линейным. Отметим еще равенство

$$\psi^* \alpha = \alpha, \tag{4'}$$

которое мы принимаем как определение ψ^* для форм нулевой степени.

п° 2. Пусть теперь a и b — две формы с любым числом аргументов: $a \in T^k(L_2)$, $b \in T^l(L_2)$. По определению тензорного произведения, имеем:

$$(a \otimes b)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \\ = a(v_1, \ldots, v_k)\, b(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l});$$

здесь $v_j \in L_2$ $(j=1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l)$. Отсюда для любых $u_j \in L_1$ следует:

$$\psi^*(a \otimes b)(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+l}) =$$
$$= (a \otimes b)(\psi(u_1), \ldots, \psi(u_k), \psi(u_{k+1}), \ldots, \psi(u_{k+l})) =$$
$$= a(\psi(u_1), \ldots, \psi(u_k))\, b(\psi(u_{k+1}), \ldots, \psi(u_{k+l})) =$$
$$= (\psi^* a \otimes \psi^* b)(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+l}). \quad (5)$$

Кроме того, из (3) непосредственно получается равенство альтернаций

$$[\psi^* a](u_1, \ldots, u_k) = [a](\psi(u_1), \ldots, \psi(u_k)). \quad (6)$$

Числовые тождества (5) и (6) сразу приводят к соответствующим тензорным равенствам:

$$\psi^*(a \otimes b) = \psi^* a \otimes \psi^* b, \quad (7)$$

$$[\psi^* a] = \psi^*[a]. \quad (8)$$

п° 3. Следствие. *Если a — внешняя форма в $\mathrm{T}^k(L_2)$, то $\psi^*(a)$ — внешняя форма в $\mathrm{T}^k(L_1)$.*

Доказательство. Пусть $[a] = a$. Тогда

$$[\psi^* a] = \psi^*[a] = \psi^* a,$$

что и утверждалось.

п° 4. Доказанное утверждение можно выразить еще следующим способом: если $a \in \Lambda^k(L_2)$, то $\psi^* a \in \Lambda^k(L_1)$. Иначе говоря, линейное отображение ψ индуцирует линейное отображение

$$\psi^*\colon \Lambda^k(L_2) \to \Lambda^k(L_1). \quad (9)$$

Отображение (9) является, очевидно, суже́нием отображения (2) на $\Lambda^k(L_2) \subset \mathrm{T}^k(L_2)$; мы сохранили для него символ ψ^*.

Далее мы рассматриваем внешние формы и поэтому вместо a и b пишем ω и σ.

п° 5. Из (7) и (8) следует также равенство

$$\psi^*(\omega \wedge \sigma) = \psi^*\omega \wedge \psi^*\sigma. \quad (10)$$

В самом деле, если $\omega \in \Lambda^k(L_2)$, $\sigma \in \Lambda^l(L_2)$, то

$$\psi^*(\omega \wedge \sigma) = \psi^*\left(\frac{(k+l)!}{k!\,l!}[\omega \otimes \sigma]\right) =$$
$$= \frac{(k+l)!}{k!\,l!}[\psi^*\omega \otimes \psi^*\sigma] = \psi^*\omega \wedge \psi^*\sigma.$$

Кроме того, если $\alpha \in \mathbb{R}$, то согласно (4)

$$\psi^*(\alpha\omega) = \alpha\psi^*(\omega).$$

п° 6. Теперь мы займемся внешними дифференциальными формами. Изложенные сейчас вещи мы перенесем из алгебры внешних форм в дифференциальное исчисление.

Пусть в области $U \in E$ задана функция $y = f(x)$, $x \in U$, значения которой суть элементы некоторого евклидова пространства $\tilde{E}$ $(y \in \tilde{E})$. Иначе говоря, дано отображение области U евклидова пространства E в евклидово пространство $\tilde{E}$:

$$f\colon U \to \tilde{E}. \tag{11}$$

Размерности E и $\tilde{E}$ могут быть любыми; мы обозначим их соответственно через n и m.

Предположим, что отображение f дифференцируемо в каждой точке области U. Тогда в произвольной точке $x \in U$ существует производная отображения f, которая представляет собой линейное отображение T_x в $\tilde{E}$. Напомним, что T_x обозначает касательное пространство к E в точке x (см. § 1). Через $\tilde{T}_y$ мы будем иногда обозначать касательное пространство к $\tilde{E}$ в точке $y = f(x)$.

Производную отображения f в точке x будем обозначать через $f'(x)$. Что кесается определения производной, то мы ограничимся отсылкой к п° 2 § 3, где дано определение производной функции с числовыми значениями. Оно почти без изменений переносится на случай производной общего отображения: достаточно всюду в п° 2 вместо отображений $U \to \mathbb{R}$ и $T_x \to \mathbb{R}$ подразумевать соответственно отображения $U \to \tilde{E}$ и $T_x \to \tilde{E}$.

Дифференциал отображения f в точке x пишется в виде

$$\eta = f'(x)\xi. \tag{12}$$

Здесь ξ — произвольный вектор из T_x, η (дифференциал отображения) — его образ в $\tilde{T}_y$.

Производная и дифференциал отображения являются инвариантными объектами (их определения не используют координатных систем). Но допустим, что в E и $\tilde{E}$ введены координаты (будем считать — декартовы прямоугольные, хотя это не везде существенно). Тогда

производная и дифференциал получат координатное представление. Прежде всего, вместо (11) можно написать координатное представление самого отображения f:

$$y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^m = f^m(x^1, \ldots, x^n). \quad (13)$$

Отсюда хорошо известным путем выводится координатное представление дифференциала (12):

$$\left.\begin{array}{l} \eta^1 = f_1^1(x)\xi^1 + \ldots + f_n^1(x)\xi^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta^m = f_1^m(x)\xi^1 + \ldots + f_n^m(x)\xi^n, \end{array}\right\} \quad (14)$$

где

$$(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \xi, \quad (\eta^1, \ldots, \eta^m) = \eta,$$

$f_j^i(x)$ — частная производная функции $f^i(x) = f^i(x^1, \ldots, x^n)$ по x^j, вычисленная в точке x.

Равенства (14) дают координатное представление производной в виде функциональной (якобиевой) матрицы

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1^1(x) & \ldots & f_n^1(x) \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ f_1^m(x) & \ldots & f_n^m(x) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Далее символ $f'(x)$ (или просто f') в равной мере употребляется как для обозначения самих отображений, так и для их координатных представлений, т. е. для матриц. В случае $m = n$ символ $\det f'(x)$ будет обозначать определитель якобиевой матрицы, квадратной, поскольку $m = n$.

п° 7. Согласно п° 4 линейное отображение $f'(x)$ индуцирует линейное отображение внешних дифференциальных форм из пространства $\Lambda^k(\tilde{T}_y)$, $y = f(x)$, в пространство $\Lambda^k(T_x)$. Его следовало бы (в соответствии с п° 4) обозначать через f'^*. Однако в целях упрощения записи принято писать f^*. Подведем итог.

п° 8. Итак, данное (вообще говоря, нелинейное) дифференцируемое в области U отображение

$$f\colon U \to \tilde{E}$$

определяет в каждой точке $x \in U$ в качестве своей производной линейное отображение $f'(x)$ касательного пространства T_x в касательное пространство $\tilde{T}_y$ $(y = f(x))$:

$$f'(x)\colon T_x \to \tilde{T}_y.$$

Это последнее отображение индуцирует (при любом k и в любой точке x) линейное отображение пространства $\Lambda^k(\tilde{T}_y)$ в пространство $\Lambda^k(T_x)$:

$$f^*\colon \Lambda^k(\tilde{T}_y) \to \Lambda^k(T_x).$$

Таким образом, с каждой k-формой $\omega \in \Lambda^k(\tilde{T}_y)$ сопоставляется форма $f^*\omega \in \Lambda^k(T_x)$.

n° 9. Из пп° 1—5 вытекают следующие алгебраические свойства отображения f^*:

1) $$f^*(dy^i) = f^i_1(x)\,dx^1 + \ldots + f^i_n(x)\,dx^n. \tag{16}$$

В самом деле, обозначая $f'(x)\xi$ через $\eta(\xi)$, имеем согласно (14):

$$f^*(dy^i)(\xi) = dy^i(\eta(\xi)) = \eta^i = f^i_1(x)\xi^1 + \ldots + f^i_n(x)\xi^n = \\ = (f^i_1(x)\,dx^1 + \ldots + f^i_n(x)\,dx^n)(\xi),$$

что и означает (16).

Вместо (16) можно писать коротко

$$f^*(dy^i) = df^i(x); \tag{17}$$

здесь $df^i(x)$ — производная функции $f^i(x)$.

Ясно, что (16) и (17) определяются не только отображением $y = f(x)$, но и выбранными в E, $\tilde{E}$ координатными системами.

Следующие три свойства отображения f^* записываются в виде инвариантных соотношений:

2) $$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2),$$
$$\omega_1,\ \omega_2 \in \Lambda^k(\tilde{T}_y);$$

3) $$f^*(\omega \wedge \sigma) = f^*\omega \wedge f^*\sigma;$$

4) $$f^*(g) = g \circ f, \qquad g \in \Lambda^0(\tilde{U}).$$

Запись $g \in \Lambda^0(\tilde{U})$ означает, что g есть форма нулевой степени, т. е. функция, заданная в области $\tilde{U} \subset \tilde{E}$.

Свойства 2) и 3) верны, поскольку они не отличаются от соотношений (4) и (10); см. пп° 1 и 5. Свойство 4) не отличается от соотношения (4′) в n° 1. В самом деле, значение $g \circ f$ в точке x равно значению g в точке $y = f(x)$.

Из 3) и 4), в частности, имеем

5) $$f^*(g\omega) = (g \circ f)\,f^*\omega.$$

п° 10. Операция f^* определена инвариантно. Указанные выше свойства этой операции позволяют легко получить ее координатное представление. Пусть дано координатное представление формы $\omega \in \Lambda^k(\widetilde{T}_y)$:

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}(y)\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}. \tag{18}$$

Тогда на основании свойств 2) — 5) получаем

$$f^*\omega = * \sum (\omega_{i_1 \ldots i_k} \circ f)(f^*(dy^{i_1}) \wedge \ldots \wedge f^*(dy^{i_k})). \tag{19}$$

Отсюда и вследствие (17) имеем координатное представление $f^*\omega$.

Указание. Формула (19) означает, что координатное представление $f^*\omega$ получается простой формальной подстановкой. Именно, нужно в правой части выражения (18) заменить $y^1, \ldots, y^m$ их выражениями (13) и записать $f^*(dy^1), \ldots, f^*(dy^m)$ по формуле (17).

п° 11. В частности, если $m = n$ и $k = n$, то матрица f' является квадратной, а форма имеет одночленный вид

$$\omega = g\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n, \tag{20}$$

где $g = g(y)$. В этом случае

$$f^*\omega = (g \circ f)(\det f')\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{21}$$

п° 12. Имеет место важная

Теорема.

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega). \tag{22}$$

Доказательство сначала проведем для форм нулевой степени. Пусть g — функция, заданная в области $\widetilde{U} \subset \widetilde{E}$. Имеем

$$f^*(g) = g \circ f.$$

Отсюда

$$df^*(g) = dg \circ df = dg \cdot f' = f^*(dg). \tag{23}$$

Пусть теперь ω — произвольная k-форма, заданная в $\widetilde{U} \subset \widetilde{E}$:

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}.$$

Тогда

$$f^*\omega = * \sum (f^*\omega_{i_1 \ldots i_k}) f^*(dy^{i_1}) \wedge \ldots \wedge f^*(dy^{i_k}).$$

Вследствие (17)

$$df^*(dy^i) = 0.$$

Отсюда и на основании (23)

$$d(f^*\omega) = * \sum d(f^*\omega_{i_1 \ldots i_k}) \wedge f^*(dy^{i_1}) \wedge \ldots \wedge f^*(dy^{i_k}) =$$
$$= * \sum f^*(d\omega_{i_1 \ldots i_k}) \wedge f^*(dy^{i_1}) \wedge \ldots \wedge f^*(dy^{i_k}) = f^*(d\omega).$$

Теорема доказана.

п° 13. Пусть, как и раньше, $f\colon U \to \tilde{E}$, $U \subset E$; пусть $\tilde{U}$ обозначает образ области U в пространстве $\tilde{E}$. Предположим, что $m = n$ и что отображение $f\colon U \to \tilde{U}$ диффеоморфно. Допустим, что в E и $\tilde{E}$ введены декартовы прямоугольные координаты. Тогда f получает координатное представление: $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тем самым набор чисел $(x^1, \ldots, x^n) = x \in U$ определяет точку $y = (y^1, \ldots, y^n) = f(x) \in \tilde{U}$. Числа $(x^1, \ldots, x^n)$ называют *криволинейными координатами* точки $y \in \tilde{U}$.

Пусть в области $\tilde{U} \subset \tilde{E}$ задана форма ω и дано ее координатное представление в координатах $y^1, \ldots, y^m$. Тогда координатное представление формы $f^*\omega$ в пространстве E в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ называется записью формы ω в криволинейных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ в пространстве $\tilde{E}$.

п° 14. Пример. Пусть роль $\tilde{E}$ играет двумерная плоскость с декартовыми координатами (y^1, y^2). Роль E — двумерная плоскость с декартовыми координатами (ρ, θ) и отображение f дано формулами

$$y^1 = \rho \cos\theta, \quad y^2 = \rho \sin\theta \quad (\rho > 0).$$

Тогда (ρ, θ) — криволинейные (полярные) координаты в плоскости $\tilde{E}$. Рассмотрим форму $\omega = dy^1 \wedge dy^2$. Ее запись в криволинейных (полярных) координатах будет

$$f^*\omega = (\cos\theta\, d\rho - \rho \sin\theta\, d\theta) \wedge (\sin\theta\, d\rho + \rho \cos\theta\, d\theta) =$$
$$= \rho\,(d\rho \wedge d\theta).$$

п° 15. Пусть в декартовых координатах даны форма ω и ее внешний дифференциал $d\omega$. Их записи в криволинейных координатах будут соответственно $f^*\omega$ и $f^*d\omega$. Но $f^*d\omega = df^*\omega$. Поэтому вычисление внешнего дифференциала в криволинейных координатах можно проводить в пространстве $\tilde{E}$ непосредственно по координатной записи формы $f^*\omega$, не обращая внимания на криволинейный характер координат, в которых она записана.

п° 16. В заключение этой главы мы рассмотрим координатное представление индуцированного отображения f^*, причем для любых тензоров (т. е. для любых полилинейных форм, не обязательно внешних).

Пусть, как и в п° 13, дано $f\colon U \to \tilde{E}$ $(m=n)$, или $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Вместе с f определена производная f' как линейное отображение $\eta = f'\xi$ векторов из касательного пространства T_x $(\xi \in T_x)$ в касательное пространство T_y $(y = f(x))$: $\xi \mapsto \eta \in T_y$. В координатной записи имеем:

$$\eta^i = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \xi^\alpha;$$

частные производные подсчитаны в точке x.

Можно написать также

$$f^* dy^i = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha.$$

где $dx^1, \ldots, dx^n$ — координатные формы в T_x, $dy^1, \ldots, dy^n$ — координатные формы в T_y.

Пусть в T_y задан k-тензор, т. е. полилинейная форма $\in \overset{\otimes}{T}{}_y^k$:

$$a = \sum a_{i_1 \ldots i_k} dy^{i_1} \otimes \ldots \otimes dy^{i_k}.$$

Отсюда и из предыдущего

$$f^* a = \sum a_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{\alpha_k}} dx^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\alpha_k}.$$

Таким образом, если положить

$$f^* a = \sum \tilde{a}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} dx^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\alpha_k},$$

то f^* представится в координатах формулами

$$\tilde{a}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \sum a_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{\alpha_k}}. \tag{24}$$

Еще раз подчеркнем, что f^* зависит от k (ясно, что от k зависит и число формул (24) и число слагаемых в их правых частях).

Заметим, наконец, что f можно рассматривать не как отображение точек, а как преобразование координат. Тогда формулы (24) выражают «ковариантный закон» преобразования координат тензора при переходе к новой координатной системе.