ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

§ 1. Интеграл от внешней формы по сингулярному кубу

п° 1. Пусть $\mathbb{R}^k$ — декартово координатное представление k-мерного евклидова пространства. Будем обозначать произвольную точку в $\mathbb{R}^k$ буквой t, а координаты ее — той же буквой t с надлежащими индексами

$$t=(t^1, \ldots, t^k) \in \mathbb{R}^k.$$

Обозначим через h так называемый стандартный куб в $\mathbb{R}^k$, т. е. единичный координатный куб $[0, 1]^k$

$$h=[0, 1]^k.$$

По определению

$$[0, 1]^k \Leftrightarrow 0 \leqslant t^i \leqslant 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, k).$$

Рассмотрим произвольную область U, $U \in \mathbb{R}^k$, содержащую куб h, и допустим, что в области U задана внешняя дифференциальная форма σ степени k. Координатная запись k-формы в k-мерном пространстве имеет одночленный вид

$$\sigma=g(t^1, \ldots, t^k)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k. \tag{1}$$

Предположим, что σ непрерывна в U; это равносильно предположению непрерывности функции $g(t^1, \ldots, t^k)$. При этом условии функция $g(t^1, \ldots, t^k)$ заведомо интегрируема в h.

п° 2. Интеграл по кубу $h=[0, 1]^k$ от формы σ, заданной в пространстве $\mathbb{R}^k$, определяется равенством

$$\int_h \sigma = \int_{[0, 1]^k} g(t^1, \ldots, t^k)\, dt^1 \ldots dt^k, \tag{2}$$

где справа написан обычный k-кратный интеграл по $h=[0, 1]^k$.

п° 3. Пусть теперь ω — внешняя дифференциальная k-форма, заданная и непрерывная в некоторой области V пространства E. Обозначим размерность E через n, считая $n \geqslant k$.

Рассмотрим непрерывно-дифференцируемое отображение

$$c\colon U \to V \subset E.$$

Вместе с ним определено его сужение на h, которое мы обозначим той же буквой c:

$$c\colon h \to V. \tag{3}$$

Отображение (3) называется *k-мерным сингулярным кубом* в пространстве E, или в области $V \subset E$. Подчеркнем, что сингулярный куб c представляет собой не образ куба h в пространстве E, а само отображение (3). Можно сказать, что сингулярный куб c представляет собой множество пар вида (x, t), где $t \in h$, $x = c(t) \in E$; две пары (x_1, t_1) и (x_2, t_2) считаются различными, если различны хотя бы только t_1 и t_2. Название сингулярного куба (именно, прилагательное: «сингулярный») связано с тем, что отображение (3) может иметь особенности; например, не исключается, что h отобразится в одну точку.

Вместе с сингулярным кубом c определено для каждой точки $t \in h$ линейное отображение

$$c'\colon T_t \to T_x, \tag{4}$$

т. е производная от c; здесь $T_t = T_t(\mathbb{R}^k)$ — касательное пространство к $\mathbb{R}^k$ в точке t, $T_x = T_x(E)$ — касательное пространство к E в точке $x = c(t)$. Отображение (4) в свою очередь индуцирует известное нам линейное отображение

$$c^*\colon \Lambda^k(T_x) \to \Lambda^k(T_t). \tag{5}$$

Таким образом, с каждой k-формой ω в области $V \subset E$ сопоставляется k-форма $c^*\omega$ на стандартном кубе $h \subset \mathbb{R}^k$. Форма $c^*\omega$ определена инвариантно в том смысле, что ее определение не использует координатных систем в E. Ее координатное представление в $\mathbb{R}^k$ является одночленным (см. (1) в п° 1).

п° 4. *Интегралом от внешней дифференциальной k-формы* ω по сингулярному k-мерному кубу c в области V называется число, которое обозначается и определяется согласно следующему равенству:

$$\int_c \omega = \int_h c^*\omega. \tag{6}$$

Правая часть этого равенства уже определена равенством (2); в данном случае $\sigma = c^*\omega$. Для сохранения стандарта терминологии можно считать, что в правой части (6) буква h обозначает сингулярный куб I: $h \to h$, где I — тождественное отображение. Определение интеграла от ω по c, как мы видим, инвариантно. В частном случае $k = 0$ нульмерным сингулярным кубом называется отображение в E стандартного куба нульмерного пространства, состоящего из одной точки

$$c\colon \{0\} \to E.$$

Пусть $c(0)$ — образ точки $\{0\}$ в E $(c(0) \in E)$. Если ω — нульмерная форма в E, т. е. функция $\omega = \omega(x)$, $x \in E$, то по определению

$$\int_c \omega = \omega(c(0)).$$

п° 5. Допустим, что в пространстве E введены декартовы прямоугольные координаты; будем для точки пространства E и для ее координат употреблять букву x: $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

Тогда отображение c получит координатное представление:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= c^1(t^1, \ldots, t^k), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^k &= c^k(t^1, \ldots, t^k), \\ x^{k+1} &= c^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^n &= c^n(t^1, \ldots, t^k). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Теперь все сказанное выше мы сведем в один (простой) рецепт для вычисления $c^*\omega$ и интеграла от ω по c. Для простоты записи возьмем в E одночленную k-форму

$$\omega = G(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k. \tag{8}$$

Согласно § 7 главы II имеем

$$e^*\omega = (G \circ c)\, c^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) =$$
$$= (G \circ c)\, c^* dx^1 \wedge \ldots \wedge c^* dx^k, \qquad (9)$$
$$c^* dx^i = (D_1 c^i)\, dt^1 + \ldots + (D_k c^i)\, dt^k. \qquad (10)$$

Таким образом, получение $c^*\omega$ фактически сводится к подстановке в (8) вместо $x^1, \ldots, x^n$ их выражений из (7).

п° 6. Из (9) и (10)

$$c^*\omega = (G \circ c) \det\left(\frac{x^1, \ldots, x^k}{t^1, \ldots, t^k}\right) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k \qquad (11)$$

(см. § 14 главы I в частном случае $n = k$; см. также п° 11 § 6 главы II).

Из (11) получаем для одночленной формы (8)

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} G(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \det\left(\frac{x^1, \ldots, x^k}{t^1, \ldots, t^k}\right) dt^1 \ldots dt^k. \qquad (12)$$

Формула (12) написана с полной подробностью и может быть положена в основу фактического вычисления интегралов от внешних форм по сингулярному кубу.

п° 7. Отметим простейший случай применения формулы (12) для интеграла от линейной формы

$$\omega = P\, dx^1,$$

где $P = P(x^1, x^2, x^3)$. В данном случае интегрирование должно вестись по одномерному сингулярному кубу c, который обычно называют ориентированной дугой

$$c: \begin{cases} x^1 = c^1(t), \\ x^2 = c^2(t), \\ x^3 = c^3(t). \end{cases}$$

Если мы для удобства записи положим $P(t) = P(c^1(t), c^2(t), c^3(t))$, то формула (12) в этом частном случае дает

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]} P(t) \frac{dx^1}{dt}\, dt.$$

п° 8. Формуле (12) можно придать более краткую запись. С этой целью обозначим через $\hat{c}$ отображение,

которое состоит из c и последующего проектирования образа на координатное k-мерное подпространство первых по счету осей. Мы будем рассматривать это подпространство, отвлекаясь от остальных осей. Тогда для отображения $\hat{c}$ имеем координатное представление (см. (7)):

$$x^1 = c^1(t^1, \ldots, t^k),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^k = c^k(t^1, \ldots, t^k).$$

Для краткости напишем

$$\det\left(\frac{x^1, \ldots, x^k}{t^1, \ldots, t^k}\right) = \det \hat{c}'.$$

Отсюда из (12)

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} (G \circ c)(\det \hat{c}'); \tag{13}$$

здесь снова полезно вспомнить п° 11 § 6 главы II. Равенство (13) и есть та формула, которую мы имели в виду написать. В ней, как часто делается, не написан элемент объема.

Замечание. Если одночленная k-форма имеет вид

$$\omega = G(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

то в правой части (13) в качестве $\hat{c}$ следует брать отображение

$$x^{i_1} = c^{i_1}(t^1, \ldots, t^k),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{i_k} = c^{i_k}(t^1, \ldots, t^k).$$

Замечание. Интеграл от формы общего вида вычисляется согласно (13) почленно (с учетом предыдущего замечания).

п° 9. Для дальнейшего нам нужно вспомнить теорему и формулу замены переменных в кратном интеграле [1]).

Пусть U — некоторая область в $\mathbb{R}^n$ и $y = s(x)$ ($x \in U$, $y \in \mathbb{R}^n$) непрерывно-дифференцируемое отображение $U \to$

---

[1]) В связи с приводимой здесь формулировкой этой теоремы см. [3].

$\to \mathbb{R}^n$, инъективное, т. е. взаимно однозначное на образ $s(U)$:

$$s: \begin{cases} y^1 = s^1(x^1, \ldots, x^n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y^n = s^n(x^1, \ldots, x^n). \end{cases}$$

Тогда, если $\det s'(x) \neq 0$ в области U, то для любой интегрируемой функции $f(y)$, $y \in s(U)$, имеет место равенство

$$\int\limits_{s(U)} f(y)\, dy^1 \ldots dy^n = \int\limits_U f(s(x)) \,|\det s'(x)|\, dx^1 \ldots dx^n.$$

В более короткой записи:

$$\int\limits_U (f \circ s) \,|\det s'| = \int\limits_{s(U)} f.$$

Нам эта формула потребуется в частном случае, когда $s(U)$ совпадает с U. В этом случае.

$$\int\limits_U (f \circ s) \,|\det s'| = \int\limits_U f. \tag{14}$$

п° 10. Пусть c и $\tilde{c}$ — два k-мерных сингулярных куба:

$$c\colon h \to E, \qquad \tilde{c}\colon h \to E.$$

Предположим, что существует взаимно однозначное гладкое отображение p стандартного куба h на себя, которое имеет положительный определитель ($\det p' > 0$) и для которого $\tilde{c} = c \circ p$. В таком случае говорят, что $\tilde{c}$ получен из c изменением параметризации. Мы будем говорить также, что $\tilde{c}$ эквивалентен c и будем писать: $\tilde{c} \sim c$.

Замечание. Так как $\tilde{c} = c \circ p$, то образ $\tilde{c}(h)$ куба h совпадает с его образом $c(h)$. Тем самым переход от c к $\tilde{c}$ означает только смену прообразов произвольной точки $x \in c(h) \equiv \tilde{c}(h)$. Пусть $x = c(t)$, $t \in h$ и $x = \tilde{c}(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in h$. Если $t = (t^1, \ldots, t^k)$, то числа $t^1, \ldots, t^k$ можно назвать криволинейными координатами точки x в координатной системе $c\colon h \to E$ (см. п° 13 § 7 главы II); если $\tilde{t} = (\tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^k)$, то числа $\tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^k$ являются криволинейными координатами той же точки x в другой координатной системе $\tilde{c}\colon h \to E$. Тем самым, дело заключается в преобразовании криволинейных координат по формуле $t = p(\tilde{t})$. Криволинейные координаты часто называют

параметрами. Отсюда — выражение, которое мы употребили выше: $\tilde{c}$ получен из c изменением параметризации.

п° 11. Легко показать, что 1) $c \sim c$; 2) если $\tilde{c} \sim c$, то $c \sim \tilde{c}$; 3) если $\tilde{c} \sim c$, $\tilde{\tilde{c}} \sim \tilde{c}$, то $\tilde{\tilde{c}} \sim c$.

п° 12. Будем говорить, что сингулярный куб $\tilde{c}$ эквивалентен сингулярному кубу c после изменения ориентации, и писать $\tilde{c} \sim -c$, если существует отображение p, для которого $\tilde{c} = c \circ p$ и $\det p' < 0$ при сохранении остальных условий.

п° 13. Имеют место следующие предложения:

1) *Если $\tilde{c} \sim c$, то для любой k-формы ω*

$$\int_{\tilde{c}} \omega = \int_{c} \omega.$$

Доказательство. Возьмем для простоты в качестве формы ω одночленную форму (8). Имеем согласно формуле (13)

$$\int_{\tilde{c}} \omega = \int_{c \circ p} \omega = \int_{h} (c \circ p)^* \omega = \int_{h} (G \circ (c \circ p)) \det (\widehat{c \circ p})' =$$
$$= \int_{h} ((G \circ c) \circ p) (\det \hat{c}' \circ p) \det p'.$$

Здесь учтено, что $\hat{p} = p$. Теперь, поскольку $\det p' > 0$, имеем по теореме о замене переменных

$$\int_{\tilde{c}} \omega = \int_{h} ((G \circ c) \circ p) \det \hat{c}' \circ p) | \det p' | =$$
$$= \int_{h} (G \circ c) \det \hat{c}' = \int_{h} c^* \omega = \int_{c} \omega.$$

2) *Если $\tilde{c} \sim -c$, то для любой k-формы ω*

$$\int_{\tilde{c}} \omega = -\int_{c} \omega.$$

Доказательство легко усматривается из предыдущего с учетом условия $\det p' < 0$.

п° 14. Только что доказанные теоремы выражают особую роль косой симметрии формы для ее интегрирования. Именно косая симметрия формы вызывает появление определителя в правой части формулы (13), что вместе с теоремой о замене переменных обеспечивает инвариантность интеграла относительно изменения параметризации.

§ 2. Понятие цепи. Интеграл от формы по цепи

п° 1. В качестве наглядного источника общего понятия цепи в евклидовом пространстве E можно указать дугу A_0A_p, составленную из нескольких ориентированных дуг A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{p-1}A_p$. Каждая ориентированная дуга $A_{i-1}A_i$ представляет собой некоторый одномерный сингулярный куб; обозначим его для краткости через c_i. Тогда дугу A_0A_p можно рассматривать как набор одномерных сингулярных кубов $c_1, c_2, \ldots, c_p$. По некоторым соображениям, смысл которых выяснится чуть дальше, этот набор обозначают в виде суммы $c_1 + c_2 + \ldots + c_p$. Такую сумму назовем формальной (поскольку пока это лишь символ, обозначающий набор $c_1, \ldots, c_p$). Порядок записи слагаемых в формальной сумме для нас безразличен. Это естественно. В самом деле, переставляя в записи суммы, например, c_1 и c_2, мы в действительности никаких изменений с этими сингулярными кубами не делаем; поэтому $c_1 + c_2 + \ldots + c_p$ и $c_2 + c_1 + \ldots + c_p$ обозначают одну и ту же дугу A_0A_p. Формальная сумма $c_1 + c_2 + \ldots + c_p$ представляет собой пример одномерной цепи. Общее понятие одномерной пепи легко уяснить себе, хотя бы в главных чертах, исходя из этого примера путем некоторых обобщений. Прежде всего, мы допустим, что одномерные сингулярные кубы $c_1, \ldots, c_p$ могут быть выбраны произвольно (не обязательно в виде ориентированных дуг, которые в пространстве последовательно приложены друг к другу). Затем мы будем брать сингулярные кубы $c_1 + \ldots + c_p$ с произвольными действительными коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$; эти коэффициенты пока будут писаться также формально. Таким образом, *одномерной цепью* мы назовем любую формальную сумму $\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_p c_p$ (любую в том смысле, что одномерные сингулярные кубы $c_1, \ldots, c_p$ и действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ могут быть выбраны как угодно). Содержательный смысл этих понятий выяснится путем их связи с теорией интегрирования.

п° 2. Теперь мы будем рассматривать цепи любой размерности. Пусть $c_1, \ldots, c_p$ — некоторый набор k-мерных сингулярных кубов в E, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — набор действительных чисел; при этом мы считаем, что число λ_i

сопоставлено с кубом c_i ($i=1, 2, \ldots, p$). Совокупность таких двух наборов мы назовем *k-мерной цепью* в пространстве E. Обозначая цепь буквой C, запишем ее в виде формальной суммы

$$C=\lambda_1 c_1+\ldots+\lambda_p c_p.$$

Пусть даны две цепи:

$$C=\lambda_1 c_1+\ldots+\lambda_p c_p,$$
$$\tilde{C}=\mu_1 \tilde{c}_1+\ldots+\mu_q \tilde{c}_q.$$

Определим линейные операции следующими равенствами:

$$C+\tilde{C}=\lambda_1 c_1+\ldots+\lambda_p c_p+\mu_1 \tilde{c}_1+\ldots+\mu_q \tilde{c}_q,$$
$$\alpha C=(\alpha\lambda_1)\, c_1+\ldots+(\alpha\lambda_p)\, c_p.$$

Очевидно, что

$$(C+\tilde{C})+\tilde{\tilde{C}}=C+(\tilde{C}+\tilde{\tilde{C}}),$$
$$1\cdot C=C,$$
$$\alpha(\beta C)=(\alpha\beta)\, C.$$

Здесь всюду знак равенства употреблен в смысле тождественного совпадения объектов.

п° 3. Пусть ω — внешняя дифференциальная форма степени k, определенная в области $U \Subset E$; пусть c_1 — сингулярный куб (c_1: $h \to E$) такой, что образ $c_1(h)$ лежит в U; пусть C — специальная k-мерная цепь вида $C=1\cdot c_1$.

Интеграл от ω по этой цепи определяется равенством

$$\int_C \omega=\int_{c_1} \omega.$$

Вспомним, что интеграл по сингулярному кубу нами уже определен раньше. В общем случае, если

$$C=\lambda_1 c_1+\ldots+\lambda_p c_p,$$

положим, по определению,

$$\int_C \omega=\lambda_1 \int_{c_1} \omega+\ldots+\lambda_p \int_{c_p} \omega.$$

п° 4. Определение. Две k-мерные цепи C и $\tilde{C}$ будем называть *равными*, если

$$\int_{\tilde{C}} \omega = \int_{C} \omega$$

для любой внешней дифференциальной формы ω степени k.

Замечание. Отсюда и далее равенство

$$\tilde{C} = C$$

будет пониматься в смысле только что высказанного определения. Отметим, что равенства, которые были написаны в п° 2, остаются в силе.

Теорема. *Пусть c и $\tilde{c}$ — два k-мерных сингулярных куба, C и $\tilde{C}$ — две k-мерные цепи: $C = 1 \cdot c$, $\tilde{C} = 1 \cdot \tilde{c}$. Тогда, если $\tilde{c} \sim c$, то $\tilde{C} = C$, если $\tilde{c} \sim -c$, то $\tilde{C} = (-1) C$.*

Замечание. Знак $\sim$ означает эквивалентность в смысле определений п° 10 и 12 параграфа § 1.

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из п° 13 § 1.

п° 5. Определение. Назовем k-мерную цепь θ *нулевой*, если

$$\int_{\theta} \omega = 0$$

для любой k-мерной формы ω.

Теорема. *Если θ — нулевая k-мерная цепь и $c_1, \ldots, c_p$ любые k-мерные сингулярные кубы, то*

$$\theta = 0 \cdot c_1 + \ldots + 0 \cdot c_p.$$

Обратно, цепь, написанная здесь справа, является нулевой.

Доказательство очевидно.

п° 6. Теперь легко убедиться, что k-мерные цепи, точнее, их классы эквивалентности, образуют линейное пространство.

Для этого следует проверить пять аксиом линейного пространства, остающиеся после трех аксиом, которые проверены в конце п° 2.

Имеем

$$C + \tilde{C} = \tilde{C} + C,$$

как прямое следствие определения п° 4. Далее,

$$C+\theta=C$$

и

$$C+(-1)C=\theta,$$

что следует из теоремы п° 5.

Наконец,

$$(\alpha+\beta)C=\alpha C+\beta C, \qquad \alpha(C+\tilde{C})=\alpha C+\alpha\tilde{C}.$$

Чтобы установить эти соотношения, достаточно убедиться в равенстве соответствующих интегралов от произвольной формы ω степени k.

п° 7. Обозначим линейное пространство k-мерных цепей в E через S^k. Легко убедиться, что пространство S^k бесконечномерно. В самом деле, пусть p — любое натуральное число. Построим k-мерные сингулярные кубы $c_1, \ldots, c_p$ любым образом при соблюдении следующих двух условий:

1) $c_1(h), \ldots, c_p(h)$ лежат соответственно в попарно непересекающихся областях $U_1, \ldots, U_p$;

2) цепи $C_1=1\cdot c_1, \ldots, C_p=1\cdot c_p$ являются ненулевыми.

Тогда цепи $C_1, \ldots, C_p$ линейно-независимы. Чтобы доказать это, заметим, что существуют формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ степени k такие, что

$$\int_{c_j}\omega_j\neq 0 \qquad (j=1, \ldots, p).$$

Существование таких форм прямо следует из второго условия. Обозначим через ψ_j гладкую функцию в E, которая равна единице на образе $c_j(h)$ и равна нулю вне области U_j. Положим $\sigma_j=\psi_j\omega_j$. Тогда

$$\int_{c_j}\sigma_j=\int_{c_j}\omega_j\neq 0 \qquad (j=1, \ldots, p).$$

Но при любом $s\neq j$ будет

$$\int_{c_s}\sigma_j=0.$$

Допустим, что имеет место соотношение

$$\lambda_1C_1+\ldots+\lambda_pC_p=\theta,$$

где θ — нулевая цепь. Тогда

$$\lambda_1 \int\limits_{C_1} \sigma_j + \ldots + \lambda_p \int\limits_{C_p} \sigma_j = \int\limits_{\theta} \sigma_j = 0,$$

где $j = 1, 2, \ldots, p$. Отсюда и из предыдущего следует, что $\lambda_j = 0$. Тем самым линейная независимость цепей $C_1, \ldots, C_p$ доказана.

п° 8. Обозначим через W^k линейное пространство всех внешних дифференциальных форм степени k, определенных и гладких (бесконечно дифференцируемых) в евклидовом пространстве E. Таким образом, мы теперь предполагаем, что область, в которой даны объекты наших рассмотрений, совпадает со всем пространством (по сути дела, это ограничение существенно лишь в §§ 5 и 6). Легко убедиться, что пространство W^k бесконечномерно. В самом деле, пусть p — любое натуральное число. Построим формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ степени k как-нибудь при соблюдении следующих двух условий:

1) форма ω_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ не равна тождественно нулю;

2) форма ω_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ равна нулю во всех точках, лежащих вне некоторой области U_j, причем области $U_1, \ldots, U_p$ попарно не пересекаются.

Тогда формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ линейно-независимы. Это очевидно, так как в силу двух указанных условий из соотношения

$$\lambda_1\omega_1 + \ldots + \lambda_p\omega_p = 0.$$

непосредственно следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.

п° 9. Если евклидово пространство E имеет размерность n, то определен набор бесконечномерных линейных пространств $S^0, S^1, \ldots, S^n$, а также $W^0, W^1, \ldots, W^n$. Согласно предыдущему S^k имеет в качестве своих элементов классы эквивалентности k-мерных цепей в E; элементами W^k являются формы степени k. Если $k > n$, то W^k состоит только из одной формы, тождественно равной нулю. Отсюда следует, что S^k при $k > n$ содержит только один класс эквивалентности, состоящий из нулевых цепей.

Замечание. Если C — некоторая k-мерная цепь, то мы позволим себе писать $C \in S^k$ (хотя следовало бы писать $C \in \{C\} \in S^k$, где $\{C\}$ — класс эквивалентности).

п° 10. Зафиксируем k, считая $0 \leqslant k \leqslant n$, и рассмотрим линейные пространства S^k и W^k. Пусть $C \in S^k$, $\omega \in W^k$. Будем обозначать через (ω, C) интеграл от формы ω по цепи C:

$$(\omega, C) = \int_C \omega.$$

Имеем для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in W^k$, $C, C_1, C_2 \in S^k$:

1) $(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2, C) = \alpha_1(\omega_1, C) + \alpha_2(\omega_2, C)$;

2) $(\omega, \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2) = \alpha_1(\omega, C_1) + \alpha_2(\omega, C_2)$.

Доказательство очевидно.

Далее:

3) Если $(\omega, C) = 0$ для любой цепи $C \in S^k$, то $\omega = 0$.

Доказательство от противного. Пусть

$$\omega = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

и хотя бы один коэффициент этой формы в какой-нибудь точке отличен от нуля. Для определенности будем считать $\omega_{1 \ldots k}(x_0) > 0$, где x_0 — нулевая точка $(0, \ldots, 0)$. Возьмем k-мерную координатную плоскость E^k: $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$ и обозначим через h стандартный куб в E^k, через c — преобразование подобия пространства E^k с центром x_0 и с коэффициентом λ $(\lambda > 0)$. Имеем

$$c^*\omega = \omega_{1 \ldots k}(\lambda x)\, \lambda^k\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k,$$

где $x \in E^k$. При достаточно малом λ для $x \in h$ будет $\omega_{1 \ldots k}(\lambda x) > 0$. Поэтому, беря цепь $C = 1 \cdot c$, получим

$$(\omega, C) = \int_h c^*\omega > 0,$$

что противоречит предположению.

4) Если $(\omega, C) = 0$ для любой формы $\omega \in W^k$, то $C = 0$.

Последнее утверждение справедливо, поскольку именно так мы и определили равенство нулю k-мерной цепи.

п° 11. Свойства 1) и 2) означают билинейный характер функции (ω, C), свойства 3) и 4) означают ее невырожденность. Невырожденная билинейная функция (ω, C) называется *сверткой* элементов ω и C $(\omega \in W^k, C \in S^k)$.

Пространства W^k и S^k называются *сопряженными* относительно свертки (ω, C); см. § 2 главы I.

п° 12. Выше мы определили линейный оператор внешнего дифференцирования d. Именно, если ω — внешняя дифференциальная форма степени k, то при известных условиях определен ее внешний дифференциал $d\omega$, который является внешней дифференциальной формой степени $k+1$. Если $\omega \in W^k$, то $d\omega \in W^{k+1}$. Таким образом, мы имеем отображение

$$d\colon W^k \to W^{k+1}. \tag{1}$$

Наряду с этим существует линейный оператор ∂, который с произвольной k-мерной цепью C сопоставляет некоторую $k-1$-мерную цепь ∂C, называемую *границей* цепи C. Если $C \in S^k$, то $\partial C \in S^{k-1}$. Таким образом, мы имеем отображение

$$\partial\colon S^k \to S^{k-1}. \tag{2}$$

Для удобства сравнения с соотношением (1) можно вместо (2) написать также

$$\partial\colon S^{k+1} \to S^k. \tag{3}$$

Согласно (1) и (3) операторы d и ∂ действуют в сопряженных пространствах. Более того, эти операторы оказываются сопряженными. Именно, для любой формы $\omega \in W^k$ и для любой цепи $C \in S^{k+1}$ справедливо равенство

$$(d\omega, C) = (\omega, \partial C), \tag{4}$$

которое и означает сопряженность операторов d и ∂. Равенство (4) называется *формулой Стокса*. Мы докажем ее чуть позднее. Сначала определим границу цепи, т. е. оператор ∂.

§ 3. Граница цепи

п° 1. Прежде всего определим границу сингулярного куба, точнее, границу цепи $C = 1 \cdot c$, где c — сингулярный куб.

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E задан k-мерный сингулярный куб $c\colon h \to E$, где h, как обычно, стандартный куб в $\mathbb{R}^k$. Буквой t мы по-прежнему обо-

значаем произвольную точку пространства $\mathbb{R}^k$: $t = (t^1, \ldots, t^k) \in \mathbb{R}^k$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^k$ координатную гиперплоскость, в которой лежат точки вида $t = (t^1, \ldots, t^{i-1}, 0, t^{i+1}, \ldots, t^k)$. Обозначим ее через $\mathbb{R}^{k-1}_{i,0}$ и введем в ней координатную систему, в которой числа $t^1, \ldots, t^{i-1}, t^{i+1}, \ldots, t^k$ суть координаты точки $t \in \mathbb{R}^{k-1}_{i,0}$. Тем самым $\mathbb{R}^{k-1}_{i,0}$ становится $k-1$-мерным евклидовым пространством с данным координатным представлением. Одновременно в $\mathbb{R}^{k-1}_{i,0}$ определится стандартный куб, который мы обозначим через $h_{i,0}$. Аналогичным образом рассмотрим гиперплоскость $\mathbb{R}^{k-1}_{i,1}$, содержащую точки вида $t = (t^1, \ldots, t^{i-1}, 1, t^{i+1}, \ldots, t^k)$; в качестве координат $t \in \mathbb{R}^{k-1}_{i,1}$ примем числа $t^1, \ldots, t^{i-1}, t^{i+1}, \ldots, t^k$. Определяемый при этом в $\mathbb{R}^{k-1}_{i,1}$ стандартный куб обозначим через $h_{i,1}$. Ясно, что $h_{i,0}$, $h_{i,1}$ есть пара противоположных $k-1$-мерных граней куба h. Обозначим через $c_{i,0}$ и $c_{i,1}$ отображение c: $h \to E$, суженное на грани $h_{i,0}$ и $h_{i,1}$:

$$c_{i,0}\colon h_{i,0} \to E, \quad c_{i,1}\colon h_{i,1} \to E.$$

Таким путем одновременно с k-мерным сингулярным кубом c определены $k-1$-мерные сингулярные кубы $c_{i,0}$ и $c_{i,1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Их можно назвать $k-1$-мерными гранями сингулярного куба c. Граница ∂c сингулярного куба c (точнее, цепи $1 \cdot c$) определяется как $k-1$-мерная цепь, составленная из его $k-1$-мерных граней с коэффициентами по следующему правилу:

$$\partial c = \sum_{i=1}^{k} \{(-1)^i c_{i,0} + (-1)^{i+1} c_{i,1}\}. \tag{1}$$

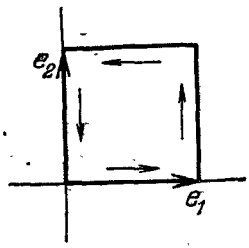

Рис. 1.

Если $(-1)^i c_{i,0}$ и $(-1)^{i+1} c_{i,1}$ назвать ориентированными ($k-1$-мерными) гранями сингулярного куба c, то можно сказать, что граница ∂c есть сумма ориентированных граней куба c. При $k = 2$ наглядная иллюстрация определения границы дается рис. 1, где ориентированные одномерные грани изображены в виде внутренних стрелок (на рис. 1 сингулярный куб c есть тождественное отображение стандартного куба h на себя). Говоря

о сингулярном кубе c, мы здесь всюду имеем в виду цепь $1 \cdot c$ (как элемент линейного пространства S^k). Для произвольной k-мерной цепи

$$C = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_p c_p \tag{2}$$

граница определяется формулой

$$\partial C = \lambda_1 \partial c_1 + \ldots + \lambda_p \partial c_p. \tag{3}$$

п° 2. Из определения ∂C непосредственно следует, что для любых $C_1, C_2 \in S^k$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\partial(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2) = \alpha_1 \partial C_1 + \alpha_2 \partial C_2.$$

Таким образом, ∂ есть линейный оператор, отображающий S^k в S^{k-1}. Основные свойства оператора ∂ будут изложены дальше (в частности, в § 4 будет показано, что равные цепи имеют равные границы).

§ 4. Доказательство формулы Стокса для цепи

п° 1. Мы должны доказать формулу

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega, \tag{1}$$

где $\omega \in W^{k-1}$, $C \in S^k$. Достаточно рассмотреть цепь $C = 1 \cdot c$, где c — некоторый k-мерный сингулярный куб в E. Мы имеем отображение $c\colon h \to E$, $h \subset \mathbb{R}^k$. Как обычно, обозначим через t точку в $\mathbb{R}^k$: $t = (t^1, \ldots, t^k)$. Поскольку $\omega \in W^{k-1}$, то

$$c^*\omega = a(t^1, \ldots, t^k)\, dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^k + \ldots, \tag{2}$$

где многоточие обозначает члены, содержащие dt^1. Положим

$$\omega^{(1)} = a(t^1, \ldots, t^k)\, dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^k. \tag{3}$$

Аналогично обозначим через $\omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(k)}$ остальные (обозначенные многоточием) члены в правой части (2) так, что $\omega^{(i)}$ представляет собой некоторую функцию от $t^1, \ldots, t^k$, умноженную на внешнее произведение

дифференциалов $dt^1, \ldots, dt^k$, где пропущен сомножитель dt^i. Тогда взамен (2) получаем

$$c^*\omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots + \omega^{(k)}. \tag{4}$$

Согласно теореме § 6 главы II (см. п° 12)

$$c^*(d\omega) = d(c^*\omega) = d\omega^{(1)} + \ldots + d\omega^{(k)}. \tag{5}$$

Напишем подробно $d\omega^{(1)}$:

$$d\omega^{(1)} = \frac{\partial a(t^1, \ldots, t^k)}{\partial t^1} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^k. \tag{6}$$

Отсюда

$$\int_h d\omega^{(1)} = \int_h \frac{\partial a(t^1, \ldots, t^k)}{\partial t^1} dt^1 dt^2 \ldots dt^k =$$

$$= \int_{h_1} a(1, t^2, \ldots, t^k) dt^2 \ldots dt^k -$$

$$- \int_{h_1} a(0, t^2, \ldots, t^k) dt^2 \ldots dt^k, \tag{7}$$

где h_1 — проекция куба h на координатную плоскость, содержащую оси $Ot^2, \ldots, Ot^k$ (h_1 рассматривается как область интегрирования).

Равенству (7) можно придать вид

$$\int_h d\omega^{(1)} = (-1) \int_{h_{1,0}} \omega^{(1)} + (-1)^2 \int_{h_{1,1}} \omega^{(1)},$$

где $h_{1,0}$ и $h_{1,1}$ определены в предыдущем параграфе. В общем случае, как легко проверить,

$$\int_h d\omega^{(i)} = (-1)^{i-1} \left\{ (-1) \int_{h_{i,0}} \omega^{(i)} + (-1)^2 \int_{h_{i,1}} \omega^{(i)} \right\}. \tag{8}$$

Множитель $(-1)^{i-1}$ появляется потому, что в общем случае в правой части формулы, аналогичной (6), на первом месте будет стоять dt^i; его придется переместить на i-е место. Заметим, далее, что на $h_{i,0}$ и на $h_{i,1}$

(т. е. при $dt^i=0$) значения $\omega^{(i)}$ и $c^*\omega$ совпадают. Поэтому из (8)

$$\int_h d\omega^{(i)}=(-1)^i\int_{h_{i,0}} c^*\omega+(-1)^{i+1}\int_{h_{i,1}} c^*\omega=$$
$$=(-1)^i\int_{c_{i,0}}\omega+(-1)^{i+1}\int_{c_{i,1}}\omega. \qquad (9)$$

Из (5) и (9)

$$\int_c d\omega=\int_h c^*(d\omega)=\sum_{i=1}^k\int_h d\omega^{(i)}=$$
$$=\sum_{i=1}^k\left\{(-1)^i\int_{c_{i,0}}\omega+(-1)^{i+1}\int_{c_{i,1}}\omega\right\}=\int_{\partial c}\omega. \qquad (10)$$

Последнее равенство в соотношениях (10) имеет место согласно формуле (1) § 3. Тем самым формула Стокса доказана для сингулярного куба. После этого она тривиально переносится на произвольную цепь.

п° 2. Из формулы Стокса сразу следует важное утверждение: *равные цепи имеют равные границы.*

Доказательство. Пусть k-мерные цепи C_1, C_2 равны друг другу, пусть ω — произвольная форма степени $k-1$. Так как $C_2=C_1$, то

$$\int_{C_2} d\omega=\int_{C_1} d\omega.$$

Отсюда по формуле Стокса имеем

$$\int_{\partial C_2}\omega=\int_{\partial C_1}\omega.$$

Следовательно, $\partial C_2=\partial C_1$.

§ 5. Оператор проектирования

п° 1. Пусть $c\colon h\to E$ — какой-нибудь k-мерный сингулярный куб в E. Будем рассматривать h как стандартный куб в $\mathbb{R}^k$, считая при этом, что $\mathbb{R}^k$ есть координатная гиперплоскость в $\mathbb{R}^{k+1}$. Произвольную точку в $\mathbb{R}^{k+1}$ запишем в виде $\tilde{t}=(t^1,\ldots,t^k,u)$, стандартный куб в $\mathbb{R}^{k+1}$ обозначим через $\tilde{h}$. В таком случае перво-

начально данный стандартный куб h в $\mathbb{R}^k$ следует представлять себе в виде нижней грани куба $\tilde{h}$ (при $u=0$).

Возьмем в евклидовом пространстве E произвольную точку O. По данному сингулярному k-мерному кубу c и по данной точке O определим некоторым специальным образом $k+1$-мерный сингулярный куб $\tilde{c}$. Именно, если для произвольной точки $t=(t^1, \ldots, t^k, 0) \in h$ дано $x=c(t) \in E$, то для произвольной точки $\tilde{t}=(t^1, \ldots, t^k, u) \in \tilde{h}$ мы определим $\tilde{x}=\tilde{c}(\tilde{t})$ равенством

$$O\tilde{x}=(1-u)\,Ox,$$

где Ox — вектор в E, идущий из точки O в точку x. Заметим, что при отображении $\tilde{c}$ вся верхняя грань куба $\tilde{h}$ (определяемая равенством $u=1$), отображается в одну точку O.

Будем говорить, что $k+1$-мерный сингулярный куб $\tilde{c}$ проектирует из точки O данный k-мерный сингулярный куб c; будем обозначать $\tilde{c}$ также символом $O \times c$.

Пусть дана k-мерная цепь

$$C=\lambda_1 c_1+ \ldots +\lambda_p c_p. \tag{1}$$

Будем говорить, что $k+1$-мерная цепь

$$\tilde{C}=\lambda_1 \tilde{c}_1+ \ldots +\lambda_p \tilde{c}_p \tag{2}$$

проектирует из точки O данную k-мерную цепь C; будем обозначать $\tilde{C}$ также символом $O \times C$.

п° 2. Имеет место следующая теорема:

Если

$$C_2=C_1 \ (C_1,\ C_2 \in S^k),$$

то

$$O \times C_2=O \times C_1.$$

Иначе говоря, равные цепи проектируются равными цепями.

Из определения $O \times C$ с помощью равенств (1) и (2) следует, что

$$O \times (C_1+C_2)=O \times C_1+O \times C_2 \tag{3}$$

и

$$O \times (\alpha C)=\alpha\,(O \times C), \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Ввиду этих соотношений сформулированная теорема равносильна следующему утверждению: если $C=\theta \in S^k$,

то $O \times C = \theta \in S^{k+1}$, т. е. если C является k-мерной нулевой цепью, то $O \times C$ будет $k+1$-мерной нулевой цепью.

Замечание. Не следует думать, что последнее утверждение вытекает из равенства (4) при $\alpha = 0$. В самом деле, чтобы воспользоваться равенством (4), нужно в его левой части произвольную k-мерную нулевую цепь θ заменить цепью $0 \cdot C$, которая равна θ. Но то, что после этой замены левая часть (4) будет равна своему первоначальному значению, как раз и требуется доказать.

п° 3. Доказательство теоремы будет проведено после некоторых предварительных конструкций. Прежде всего введем в E декартовы координаты с начальной точкой O. Тогда отображения c и $\tilde{c}$ представятся в координатах:

$$\left.\begin{array}{l} c: \left\{\begin{array}{l} x^1 = c^1(t^1, \ldots, t^k), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n = c^n(t^1, \ldots, t^k), \end{array}\right. \\ \tilde{c}: \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}^1 = (1-u)\, c^1(t^1, \ldots, t^n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{x}^n = (1-u)\, c^n(t^1, \ldots, t^n). \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Рассмотрим произвольную форму степени $k+1$:

$$\omega^{k+1} = * \sum \omega_{i_1 \ldots i_{k+1}}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}}.$$

Нам достаточно показать, что если C — нулевая k-мерная цепь и $\tilde{C} = O \times C$, то

$$\int_{\tilde{C}} \omega^{k+1} = 0.$$

К этому и будут направлены наши выкладки. Чтобы упростить запись дальнейших соотношений, возьмем сначала в качестве ω^{k+1} форму одночленного вида

$$\omega^{k+1} = g(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}}.$$

Здесь

$$g(x) = g(x^1, \ldots, x^n).$$

Положим

$$g(x, u) = g((1-u)\, x^1, \ldots, (1-u)\, x^n)$$

и рассмотрим форму $\omega^k(u)$ степени k, которая зависит от параметра u и определяется равенством

$$\omega^k(u) = g(x, u)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge e^{i_{k+1}}(x), \tag{6}$$

где $e^{i_{k+1}}$ — известная нам базисная форма в касательном пространстве точки x. Запись $e^{i_{k+1}}$ вместо символа dx^{k+1} означает, что при подсчете внешнего произведения $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge e^{i_{k+1}}(x)$ последний сомножитель берется на векторе, который равен радиус-вектору точки x. Полное объяснение этой записи дает формула (2) § 13 главы I, согласно которой

$$\begin{aligned} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge e^{i_{k+1}}(x) = \\ = (-1)^k \{ (dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}})\, x^{i_1} - \\ - (dx^{i_1} \wedge dx^{i_3} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k+1}})\, x^{i_2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^k (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k})\, x^{i_{k+1}} \}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $(\ldots, x^{i_1}, \ldots, x^{i_{k+1}}, \ldots)$ — координаты радиус-вектора точки x (те самые координаты, которые являются аргументами функции $g(x^1, \ldots, x^n)$). Введем для произвольного k-мерного сингулярного куба c функцию

$$f_c(u) = (\omega^k(u), c) = \int_c \omega^k(u). \tag{8}$$

Покажем, что имеет место равенство

$$(\omega^{k+1}, O \times c) = -\int_0^1 (1-u)^k f_c(u)\, du. \tag{9}$$

Из него мы легко получим интересующую нас теорему. Имеем

$$\begin{aligned} (\omega^{k+1}, O \times c) = \int_{O \times c} \omega^{k+1} = \int_{\tilde{h}} \tilde{c}^* \omega^{k+1} = \\ = \int_{\tilde{h}} g(\tilde{c}(\tilde{t})) \det \left(\frac{\tilde{x}^{i_1}, \ldots, \tilde{x}^{i_k}, \tilde{x}^{i_{k+1}}}{t^1, \ldots, t^k, u} \right) dt^1 \ldots dt^k\, du. \end{aligned} \tag{10}$$

Из формул (5)

$$\det\left(\frac{\tilde{x}^{i_1},\ldots,\tilde{x}^{i_k},\tilde{x}^{i_{k+1}}}{t^1,\ldots,t^k,u}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} (1-u)\dfrac{\partial c^{i_1}}{\partial t^1} & \ldots & (1-u)\dfrac{\partial c^{i_1}}{\partial t^k} & (-1)\,c^{i_1} \\ (1-h)\dfrac{\partial c^{i_2}}{\partial t^1} & \ldots & (1-u)\dfrac{\partial c^{i_2}}{\partial t^k} & (-1)\,c^{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-u)\dfrac{\partial c^{i_{k+1}}}{\partial t^1} & \ldots & (1-u)\dfrac{\partial c^{i_{k+1}}}{\partial t^k} & (-1)\,c^{i_{k+1}} \end{vmatrix}=$$

$$=-(1-u)^k(-1)^k\left\{c^{i_1}\det\left(\frac{c^{i_2},\ldots,c^{i_{k+1}}}{t^1,\ldots,t^k}\right)-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^k c^{i_{k+1}}\det\left(\frac{c^{i_1},\ldots,c^{i_k}}{t^1,\ldots,t^k}\right)\right\}. \quad (11)$$

Отсюда и из (10)

$$(\omega^{k+1},\ O\times c)=-\int_0^1(1-u)^k\times$$

$$\times\left[\int_C(-1)^k\{g(x,u)\,x^{i_1}(dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k+1}})-\ldots\}\right]du. \quad (12)$$

В правой части (12) мы написали внутри фигурных скобок только один член. Остальные легко получаются из (11); легко усмотреть, что внутри фигурных скобок находится правая часть (7), умноженная на $g(x, u)$. Таким образом, равенство (9) вытекает из (7) и (12).

Вернёмся к случаю, когда ω^{k+1} — произвольная форма степени $k+1$. Положим

$$\omega^k(u)=$$

$$=*\sum\omega_{i_1\ldots i_{k+1}}(x,u)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge e^{i_{k+1}}(x), \quad (13)$$

где $\omega_{i_1\ldots i_{k+1}}(x, u)=\omega_{i_1\ldots i_{k+1}}((1-u)x)$ и снова определим $f_c(u)$ по формуле (8), беря теперь в качестве $\omega^k(u)$ выражение (13). Формула (9) сохранит силу. Это ясно, поскольку левая часть (9) линейна относительно ω^{k+1},

а правая — относительно $\omega^k(u)$. Рассмотрим цепь

$$C = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_p c_p.$$

Введем функции

$$\left.\begin{aligned} f_{c_j}(u) &= \int\limits_{c_j} \omega^k(u), \\ f(u) = \lambda_1 f_{c_1}(u) + \ldots + \lambda_p f_{c_p}(u) &= \\ = \int\limits_C \omega^k(u) &= (\omega^k(u),\ C). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Тогда из (3), (4) и (9) имеем

$$(\omega^{k+1}, O \times C) = \lambda_1 (\omega^{k+1}, O \times c_1) + \ldots + \lambda_p (\omega^{k+1}, O \times c_p) =$$

$$= -\lambda_1 \int\limits_0^1 (1-u)^k f_{c_1}(u)\, du - \ldots - \lambda_p \int\limits_0^1 (1-u)^k f_{c_p}(u)\, du =$$

$$= -\int\limits_0^1 (1-u)^k f(u)\, du. \qquad (15)$$

п° 4. Докажем теорему п° 2 во второй формулировке.

Пусть C — нулевая k-мерная цепь. Возьмем произвольно ω^{k+1}. Из (14) имеем $f(u) = 0$ при любом u, $0 \leqslant u \leqslant 1$ (поскольку C — нулевая). Отсюда и из (15) имеем $(\omega^{k+1}, O \times C) = 0$. Следовательно, $O \times C$ — нулевая $k+1$-мерная цепь. Теорема доказана.

п° 5. Положим

$$\Pi(C) = (-1)^{k+1} (O \times C). \qquad (16)$$

Из равенств (3), (4) и из только что доказанной теоремы следует, что $\Pi(C)$ есть линейный оператор, определенный на всех k-мерных цепях, зависящий от выбора точки O. Его значением является $k+1$-мерная цепь, которая разве лишь знаком отличается от проектируемой цепи $O \times C$. Таким образом,

$$\Pi\colon\ S^k \to S^{k+1}.$$

Заметим, что S^k и S^{k+1} по точному смыслу своего определения имеют в качестве элементов не цепи, а классы их эквивалентности. Поэтому (довольно длинное) доказательство теоремы п° 2 играет фундаментальную роль для определения оператора Π. Только на

основании этой теоремы П определен как оператор, отображающий S^k в S^{k+1}. Мы назовем линейный оператор П *оператором проектирования*.

п° 6. Имеет место следующее тождество:

$$C = \partial\Pi(C) + \Pi(\partial C), \tag{17}$$

где ∂ — оператор, который дает границу цепи.

Доказательство с очевидностью усматривается для одного сингулярного куба c. В самом деле, применяя обозначения § 3 этой главы, получаем по формуле (1) § 3:

$$\partial(O \times c) = \sum_{i=1}^{k+1} \{(-1)^i \tilde{c}_{i,0} + (-1)^{i+1} \tilde{c}_{i,1}\}, \tag{18}$$

где при $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\tilde{c}_{i,0} = O \times c_{i,0}, \quad \tilde{c}_{i,1} = O \times c_{i,1}.$$

При $i = k+1$ имеем $\tilde{c}_{k+1,0} = c$ (т. е. первоначально данный k-мерный сингулярный куб), а $\tilde{c}_{k+1,1}$ представляет собой нулевой k-мерный куб. Таким образом, из формулы (18) с учетом (3) и (4) следует, что

$$\partial(O \times c) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \{(-1)^i (O \times c_{i,0}) + (-1)^{i+1} (O \times c_{i,1})\} + (-1)^{k+1} c =$$

$$= O \times \partial c + (-1)^{k+1} c. \tag{19}$$

Теперь, если дана произвольная цепь

$$C = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_p c_p,$$

то из (19) стандартным образом получаем для цепи

$$\partial(O \times C) = O \times \partial C + (-1)^{k+1} C. \tag{20}$$

Поскольку

$$\partial\Pi(C) = (-1)^{k+1} \partial(O \times C); \quad \Pi(\partial C) = (-1)^k \{O \times \partial C\},$$

то (17) доказано как следствие (20) и (16).

п° 7. Теперь мы введем в рассмотрение некоторый линейный оператор

$$I\colon W^{k+1} \to W^k,$$

который во многих отношениях аналогичен оператору П.

Именно, пусть во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ дана форма $\omega \in W^{k+1}$. Как и раньше, рассмотрим зависящую от па-

раметра u форму $\omega^k(u) \in W^k$, определяемую равенством (13). Оператор I задается формулой

$$I(\omega) = (-1)^k \int_0^1 (1-u)^k \omega^k(u)\, du. \tag{21}$$

Согласно этому определению $I(\omega)$ есть внешняя форма в $\mathbb{R}^n$ степени k ($I(\omega) \in W^k$).

Замечание. Для определения $I(\omega)$ нет необходимости иметь ω во всем пространстве $\mathbb{R}^n$; достаточно, чтобы форма ω была задана в какой-нибудь области, звездной относительно точки O (поскольку $\omega^k(u)$ определяется по лучам, исходящим из точки O). В такой области будут верны и дальнейшие выводы.

n° 8. Теорема. *Операторы* Π *и* I *являются сопряженными.*

В самом деле, имеем для цепи $C \in S^k$ и для $\omega \in W^{k+1}$

$$(I(\omega), C) = \int_C I(\omega) = (-1)^k \int_0^1 \left\{ (1-u)^k \int_C \omega^k(u) \right\} du =$$

$$= (-1)^k \int_0^1 (1-u)^k f(u)\, du. \tag{22}$$

Но по формуле (9)

$$(\omega, O \times C) = -\int_0^1 (1-u)^k f(u)\, du.$$

Отсюда

$$(I(\omega), C) = (-1)^{k+1} (\omega, O \times C). \tag{23}$$

Из (22) и (16) имеем для любых $\omega \in W^{k+1}$, $C \in S^k$

$$(I(\omega), C) = (\omega, \Pi(C)), \tag{24}$$

что и означает сопряженность операторов

$$\Pi\colon S^k \to S^{k+1}, \quad I\colon W^{k+1} \to W^k.$$

n° 9. Вследствии (24) следующие два тождества равносильны:

$$C = \partial\Pi(C) + \Pi(\partial C), \tag{25}$$

$$\omega = dI(\omega) + I(d\omega). \tag{26}$$

Так как тождество (25) уже доказано, выведем из него тождество (26).

Доказательство тождества (26). Имеем согласно (24) для любой цепи $C \in S^{k+1}$ и для любой формы $\omega \in W^{k+1}$

$$(I(d\omega), C) = (d\omega, \Pi(C)).$$

Отсюда и по формуле Стокса

$$(I(d\omega), C) = (\omega, \partial\Pi(C)). \tag{27}$$

Далее

$$(dI(\omega), C) = (I(\omega), \partial C) = (\omega, \Pi(\partial C)). \tag{28}$$

Из (27) и (28)

$$(\omega - dI(\omega) - I(d\omega), C) = (\omega, C - \Pi(\partial C) - \partial\Pi(C)).$$

Правая часть этого равенства равна нулю в силу (25). Отсюда и вследствие произвольности $C \in S^{k+1}$ получаем (26).

§ 6. Теорема Пуанкаре и некоторые другие предложения

п° 1. Теорема. *Для любой цепи $C \in S^k$ граница границы есть нулевая цепь*:

$$\partial\partial C = \theta \in S^{k-2}.$$

Доказательство. Возьмем произвольно $\omega \in W^{k-2}$. Имеем по формуле Стокса

$$(\omega, \partial\partial C) = (d\omega, \partial C) = (d\,d\omega, C) = 0,$$

поскольку $d\,d\omega = 0$. Теорема доказана.

Замечание. В случае трехмерного стандартного куба эта теорема иллюстрируется рис. 2.

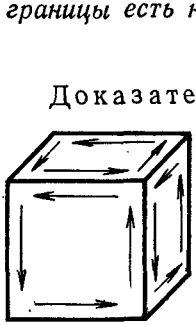

Рис. 2.

п° 2. Определение. Цепь $C \in S^k$ называется *замкнутой цепью* или *циклом*, если $\partial C = \theta$ (θ — нулевая цепь в S^{k+1}).

Теорема. *Каждая граница есть цикл.*

Доказательство. Пусть $C' = \partial C$. Тогда

$$\partial C' = \partial\partial C = \theta.$$

п° 3. Определение. Цикл называется *гомологичным нулю*, если он является границей.

Теорема. *В евклидовом пространстве каждый цикл гомологичен нулю.*

Доказательство. Пусть $\partial C = \theta$. Тогда из формулы (25) § 5 имеем

$$C = \partial \Pi (C),$$

т. е. цикл C гомологичен нулю, поскольку он является границей цепи $\Pi(C)$.

п° 4. Определение. Форма $\omega \in W^k$ называется *замкнутой формой*, или *коциклом*, если $d\omega = 0$.

Определение. Форма $\omega \in W^k$ называется *точной формой*, или *формой, когомологичной нулю*, если она является внешним дифференциалом некоторой формы.

Теорема (Пуанкаре). *В евклидовом пространстве всякая замкнутая форма является точной.*

Доказательство. Пусть $d\omega = 0$. Тогда из формулы (26) § 5 имеем $\omega = d\mu$, где $\mu = I(\omega)$.

Замечание. Можно сказать, что в евклидовом пространстве замкнутая форма $\omega \in W^k$ имеет потенциал

$$\mu = I(\omega) \in W^{k-1}.$$

Замечание. Мы имеем сопряженные отображения:

$$\partial\colon S^{k+1} \to S^k, \qquad d\colon W^k \to W^{k+1}.$$

Можно, однако, написать более содержательные соотношения:

$$\partial\colon S^{k+1} \to C(S^k), \tag{1}$$

$$d\colon W^k \to C(W^{k+1}), \tag{2}$$

где $C(S^k)$ — линейное подпространство циклов в S^k, $C(W^{k+1})$ — линейное подпространство замкнутых форм в W^{k+1}. Теорема Пуанкаре и предыдущая ей теорема утверждают, что оба отображения в евклидовом пространстве сюръективны (являются отображениями «на»). Утверждение Пуанкаре и приведенное доказательство остаются в силе, если объекты даны в звездной области евклидова пространства (не обязательно во всем евклидовом пространстве).

п° 5. Теорема. *В евклидовом пространстве интеграл от замкнутой формы степени k по любому k-мерному циклу равен нулю.*

Доказательство. Пусть $\omega \in W^k$, $C \in S^k$ и $d\omega = 0$, $\partial C = \theta$. Так как $\partial C = \theta$, то по теореме п° 3 найдется цепь $\tilde{C}$ такая, что $C = \partial \tilde{C}$. Тогда по теореме Стокса имеем

$$(\omega, C) = (\omega, \partial \tilde{C}) = (d\omega, \tilde{C}) = 0,$$

поскольку $d\omega = 0$.

Замечание. Доказательство можно провести также с помощью теоремы Пуанкаре. Именно, так как $d\omega = 0$, то найдется форма $\tilde{\omega}$ такая, что $\omega = d\tilde{\omega}$. Тогда

$$(\omega, C) = (d\tilde{\omega}, C) = (\tilde{\omega}, \partial C) = 0,$$

поскольку $\partial C = \theta$.

§ 7. Регулярное погружение. Комбинаторная поверхность

п° 1. *Регулярным погружением* k-мерного стандартного куба h ($h \subset \mathbb{R}^k$) в пространство $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant k$, называется отображение

$$\varphi\colon h \to \mathbb{R}^n$$

при условии, что производная отображения φ во всех точках куба h имеет ранг $= k$. Регулярное погружение φ ($h \to \mathbb{R}^n$) мы будем называть также *регулярным кубом* в $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, что регулярный куб является частным случаем сингулярного. Поэтому к регулярным кубам применимы все понятия и утверждения, высказанные в предыдущих параграфах.

п° 2. Пусть дано гладкое отображение $\varphi\colon h \to \mathbb{R}^n$. Обозначим через H образ куба h в $\mathbb{R}^n$. Пусть t — произвольная точка куба h, $x = \varphi(t)$ — ее образ. Не исключено, что имеется еще точка $t' \in h$, отличная от точки t, образ которой также есть точка x (не исключено, что имеется даже бесконечное множество таких точек). Иначе говоря, не исключено, что отображение куба h на его образ H не является взаимно однозначным. Это обстоятельство в равной мере относится и к случаю, когда $\varphi\colon h \to \mathbb{R}^n$ есть сингулярный куб, и к случаю регулярного куба. Ввиду этого обстоятельства ни сингулярный, ни регулярный куб нельзя определять как образ H ($H = \varphi(h)$); и тот и другой определяются как отображение h на H (с последующим установлением условий, при которых два отображения $h \to H$ и $h_1 \to H$

считаются одним и тем же сингулярным или одним и тем же регулярным кубом.

Допустим, что отображение φ: $h \to \mathbb{R}^n$ является регулярным кубом. В этом случае любая точка $t \in h$ имеет окрестность U_t, которая отображается на свой образ в $\mathbb{R}^n$ взаимно однозначно. Таким образом, куб h локально гомеоморфно отображается на свой образ H.

п° 3. При $k=1$ регулярный или сингулярный куб называют *ориентированной дугой* (т. е. направленной дугой, соответственно регулярной или сингулярной). Ориентированная дуга c есть гладкое отображение в $\mathbb{R}^n$ ориентированного отрезка h. Если дуга c регулярна, то отображение локально гомеоморфно и образ h не имеет локальных особенностей (точек возврата, угловых точек и т. п.). Однако в целом отображение может не быть гомеоморфным, т. е. для образа возможны самопересечения. Например, возможна картина, которая изображена на рис. 3. Здесь t_1 и t_2 — две точки отрезка h, которые отображаются в одну точку x; вместе с тем каждая из точек t_1, t_2 имеет окрестность, которая отображается на свой образ взаимно однозначно. На рис. 3 эти окрестности в их образы изображены жирными линиями.

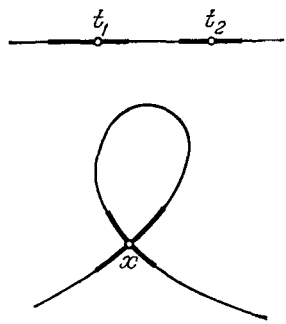

Рис. 3.

п° 4. Важный пример сингулярного куба при $k=2$, $n=2$ дает отображение

$$x = ar\cos b\theta, \quad y = ar\sin b\theta,$$

считая, что куб (квадрат) h задан в осях Or, $O\theta$ неравенствами $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ (рис. 4). Здесь мы имеем именно сингулярный куб, поскольку вся сторона $r=0$ отображается в одну точку (0, 0) плоскости (x, y). Образом h в плоскости (x, y) является круговой сектор H; внутренние стрелки на h и на H указывают ориентацию границы рассматриваемого сингулярного куба (квадрата, поскольку $k=2$).

Заметим, что получить круговой сектор в качестве образа регулярного куба невозможно. Тем самым уже этот пример поясняет целесообразность рассмотрения сингулярных кубов.

п° 5. Мы подробно изложили интегрирование формы по цепи. В задачах анализа, однако, интегрируют также по кривой или по поверхности (что можно не различать, имея в виду k-мерную поверхность). Для конкретных задач анализа (и его приложений) может быть достаточным понятие, которое мы назовем *комбинаторной*

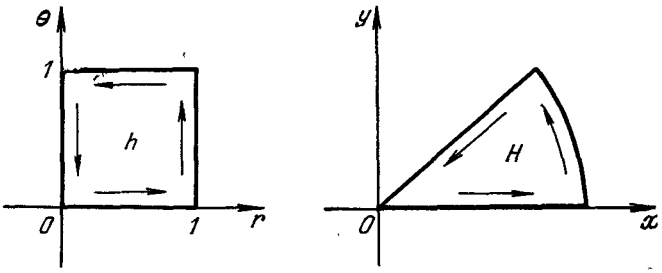

Рис. 4.

поверхностью. Ее можно рассматривать как частный случай цепи с коэффициентами ± 1, сингулярные кубы которой не как угодно набросаны в пространстве, а приложены друг к другу с соблюдением некоторых условий. Мы не станем перечислять эти условия и ограничимся отсылкой читателя к рис. 5. На рис. 5 изображена двумерная поверхность с краем; будем ее представлять себе как некоторый сферический сегмент H. Он составлен из шести сферических треугольников, которые мы представим себе в качестве образов шести двумерных сингулярных кубов: c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 (см. п° 4). Стрелки показывают ориентацию их границ. Для каждого c_i граница состоит из двух внутренних одномерных граней (к каждой из которых примыкает соседний сингулярный куб) и одной краевой одномерной грани (вдоль которой соседнего куба нет). Рассмотрим цепь

Рис. 5.

$$C = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_6 c_6,$$

считая $\lambda_j = \pm 1$. Существенно следующее обстоятельство: судя по рисунку, в данном случае λ_j можно выбрать так, что все внутренние одномерные грани попарно уничтожатся. Именно так будет, например, при $\lambda_j = 1$. Тогда граница C будет одномерной цепью

$$\partial C = \lambda_1 \partial c_1 + \ldots + \lambda_6 \partial c_6,$$

образ которой есть край H (с заданной ориентацией, показанной стрелками). В таком случае мы скажем, что цепь C есть комбинаторная поверхность, представляющая сегмент H. Если в пространстве дана 2-форма ω, то в качестве интеграла от ω по поверхности H примем интеграл от ω по представляющей H комбинаторной поверхности, т. е. по цепи C.

Однако ясно, что наряду с $\lambda_j = +1$ в равной мере пригодны $\lambda_j = -1$ (при всех j). Таким образом, H представляется также комбинаторной поверхностью $-C$. Таким образом, интеграл от ω по H определен с точностью до знака. Выбор C или $-C$ есть выбор ориентации H; после этого выбора интеграл определен вполне, поскольку при любом другом выборе $\lambda_j = \pm 1$ не будет происходить попарного уничтожения всех внутренних одномерных граней кубов c_j. Следовательно, при данном наборе $c_1, \ldots, c_6$ существуют только две комбинаторные поверхности, представляющие сегмент H: C и $-C$. К сожалению, так обстоит дело лишь для заданного набора сингулярных кубов. Возможно бесконечное множество других наборов других сингулярных кубов в любом числе, с помощью которых H также можно представить в виде комбинаторной поверхности. Можно обойтись, например, всего одним сингулярным кубом. Но доказать, что во всех этих случаях мы будем получать с точностью до знака одно и то же значение интеграла формы ω, трудно даже в частном примере сферического сегмента H. Для общего изложения теории интеграла формы по поверхности проще оказывается другой путь, идущий через понятие многообразия (см. [1]); см. также [2] — [4].

п° 6. В заключение еще несколько слов по поводу одного класса в некотором смысле элементарных поверхностей. Обычно именно их имеют в виду в элемен-

тарном анализе, когда рассматривают интеграл по поверхности.

Пусть $H = c(h)$ — образ в n-мерном евклидовом пространстве E некоторой области $h \subset \mathbb{R}^k$, $k \leqslant n$, при отображении c: $\mathbb{R}^k \to E$. Обозначая здесь и далее той же буквой c суже́ние c на h, предположим, что отображение c: $h \to H$ взаимно однозначно. При этом условии мы можем H назвать k-мерной поверхностью в E. Заметим, что на этот раз буква h обозначает не стандартный куб, а произвольную область в $\mathbb{R}^k$. Поэтому класс поверхностей, о котором идет речь, довольно широк (но, конечно, не исчерпывает всего, что называют k-мерными поверхностями в E).

Пусть в E в окрестности H задана внешняя форма ω степени k. Для простоты записи будем считать, что ω имеет в E одночленное координатное представление с коэффициентом G. Тогда мы можем определить интеграл от ω по H так же, как в свое время определяли интеграл по сингулярному кубу. Именно,

$$\int_H \omega = \int_h c^*\omega = \int_h (G \circ c) \det \hat{c}'. \tag{1}$$

Мы сохранили обозначения, которые применялись в § 1, п° 8, главы III (см. формулу (13)); изменен только смысл h. Справа в (1) h обозначает область k-кратного интегрирования в $\mathbb{R}^k$.

Естественно поставить вопрос об инвариантности этого определения: если $H = c_1(h_1)$, где c_1, h_1 — другое отображение и другая область, подчиненные тем же условиям, что c и h, будет ли

$$\int_{h_1} c_1^*\omega = \int_h c^*\omega \tag{2}$$

верным равенством? На этот вопрос можно ответить утвердительно, если c_1 и c имеют одинаковую ориентацию относительно $\mathbb{R}^k$, именно, если композиция $c_1^{-1} \circ c$ имеет производную с положительным определителем. (Напомним, что c и c_1 обозначают отображения, суже́нные

на h и h_1.) В этом случае

$$\int_{h_1} c_1^*\omega = \int_{h_1} (G \circ c_1) \det \hat{c}_1' =$$

$$= \int_h (((G \circ c_1) \det \hat{c}_1') \circ (c_1^{-1} \circ c)) ((\det \hat{c}_1')^{-1} \circ (c_1^{-1} \circ c)) \det \hat{c}' =$$

$$= \int_h (G \circ c) \det \hat{c}' = \int_h c^*\omega.$$

Тем самым равенство (2) доказано.

Если пренебречь условием насчет ориентации, то интеграл будет определен с точностью до знака.