1. Введение в теорию групп Ли

Грубо говоря, группа Ли — это группа, являющаяся также многообразием. Конечно, чтобы придать смысл этому определению, мы должны разъяснить оба эти понятия и то, как они должны быть связаны. Группы возникают как алгебраическая абстракция понятия симметрии; важный пример — группа вращений плоскости или трехмерного пространства. Многообразия — фундаментальные объекты дифференциальной геометрии — обобщают известные понятия кривой и поверхности в трехмерном пространстве. Вообще говоря, многообразие — это пространство, которое локально выглядит как евклидово пространство, но глобально может быть совершенно непохожим на него. Сочетание этих двух по внешнему виду в корне различных математических понятий соединяет и значительно расширяет и алгебраические методы теории групп, и анализ многих переменных, использующийся в аналитической геометрии. Получающуюся в результате теорию, в частности мощную инфинитезимальную технику, можно применять к широкому кругу физических и математических задач.

Цель этой главы — относительно быстро и безболезненно ввести читателя в теорию многообразий и групп Ли в том виде, который позволит применить ее к дифференциальным уравнениям. Никаких предварительных знаний ни из теории групп, ни из дифференциальной геометрии не требуется, однако предполагается хорошее знакомство с основами математического анализа, включая теоремы о неявной и об обратной функциях. По необходимости доказательства большинства «трудных» теорем теории групп Ли будут опускаться; ссылки на литературу можно найти в замечаниях в конце главы.

В этой главе я старался найти «золотую середину» между картиной в локальных координатах, где многообразие выглядит в точности как открытое подмножество некоторого евклидова пространства, и более современным глобальным изложением теории. Каждый из этих подходов имеет свои особые применения и преимущества, и было бы ошибкой чересчур переоценивать тот или другой. Читатель, ориентирующийся на приложения, может усомниться в том, что сюда нужно включать глобальную структуру, поскольку большинство представленных в нашей книге приложений этой теории относится к открытым подмножествам евклидова пространства. Но достаточно сказать, что геометрическая интуиция и понимание, которые дает общее понятие многообразия, с лихвой вознаграждают относительно небольшие усилия, требующиеся для усвоения этого определения. Однако если нам все же не удалось убедить читателя, он может заменять слово «многообразие» там, где оно встречается, на «открытое подмножество евклидова пространства», не очень теряя аромат этой теории и не слишком сужая пределы ее применимости. При таком подходе можно ограничиться параграфами, относящимися к локальным группам Ли (на самом деле именно этим путем сам Ли пришел к группам Ли), и использовать локальные группы Ли как основные объекты изучения.

В первом параграфе дается основное описание общего понятия многообразия, во втором делается то же самое для групп Ли, и локальных, и глобальных. Практически группы Ли возникают как группы симметрий некоторого объекта, или, более точно, как локальные группы преобразований, действующих на некотором многообразии; в § 2 дается краткий обзор этого подхода. Наиболее важное понятие всей теории — понятие векторного поля, которое выступает как инфинитезимальная образующая некоторой однопараметрической группы Ли преобразований. Это понятие является фундаментальным и для развития теории групп Ли, и для приложений к дифференциальным уравнениям. Оно играет решающую роль в замене сложных нелинейных условий симметрии некоторого объекта относительно группы преобразований легко проверяемыми линейными условиями, отражающими его инфинитезимальную симметрию относительно соответствующих векторных полей. Эта техника будет глубоко исследована для систем алгебраических и дифференциальных уравнений во второй главе. Понятие векторного поля приводит затем к понятию алгебры Ли, которую можно представлять себе как инфинитезимальную образующую самой группы Ли. Соответствующая теория развита в § 1.4. Последний параграф этой главы дает краткое введение в дифференциальные формы и интегрирование на многообразиях.

1.1. МНОГООБРАЗИЯ

Почти везде в этой книге нас будут в основном интересовать объекты (такие, как дифференциальные уравнения, группы симметрий и т. д.), заданные на открытых подмножествах евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Основные геометрические черты этих объектов не будут зависеть от того, какая система координат использовалась для их определения. Поэтому очень важно освободиться от зависимости от конкретных локальных координат, так чтобы наши объекты стали по существу «бескоординатными». Точнее, если $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $\psi: U \to V$, где $V \subset \mathbb{R}^m$ открыто, — произвольный диффеоморфизм (т. е. ψ — бесконечно дифференцируемое отображение и обратное к нему отображение также бесконечно дифференцируемо), то объектам, определенным на U, будут соответствовать эквивалентные объекты на V. Хотя явные формулы для объекта на U и соответствующего ему объекта на V будут, вообще говоря, разными, существенные основные свойства останутся теми же. Расставшись с зависимостью от координат, мы должны сделать лишь маленький шаг, чтобы прийти к общему понятию гладкого многообразия. С этой точки зрения многообразия доставляют естественную среду для изучения объектов, не зависящих от координат.

Определение 1.1. *m-мерное многообразие* — это множество M вместе со счетным набором подмножеств $U_\alpha \subset M$, называемых *координатными картами*, и взаимно однозначных функций χ_α: $U_\alpha \to V_\alpha$, где V_α — открытые связные подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, называемых *локальными координатными отображениями* (или *локальными координатами*)[1]), которые обладают следующими свойствами:

(a) Координатные карты покрывают M:

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M.$$

(b) Для пересечения любой пары координатных карт $U_\alpha \cap U_\beta$ композиция отображений (*функция перехода*)

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}: \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \chi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

является гладкой (бесконечно дифференцируемой) функцией.

(c) Если $x \in U_\alpha$, $\tilde{x} \in U_\beta$ — разные точки множества M, то существуют открытое подмножество W в V_α, содержащее точку $\chi_\alpha(x)$, и открытое подмножество $\tilde{W}$ в V_β содержащее точку $\chi_\beta(\tilde{x})$, такие, что

$$\chi_\alpha^{-1}(W) \cap \chi_\beta^{-1}(\tilde{W}) = \varnothing.$$

Координатные карты χ_α: $U_\alpha \to V_\alpha$ снабжают многообразие M структурой топологического пространства. А именно: мы требуем, чтобы для всякого открытого подмножества $W \subset V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ множество $\chi_\alpha^{-1}(W)$ было открытым подмножеством множе-

[1]) Их автор часто также называет координатными картами.— *Прим. перев.*

ства M. Эти множества образуют *базис* топологии на M, так что множество $U \subset M$ открыто, если и только если для любого $x \in U$ найдется окрестность точки x указанного выше вида, содержащаяся в U; таким образом, $x \in \chi_\alpha^{-1}(W) \subset U$, где χ_α: $U_\alpha \to V_\alpha$ — координатная карта, содержащая x, а W — открытое подмножество множества V_α. В этой топологии требование (с) из определения многообразия — это в точности переформулировка аксиомы отделимости Хаусдорфа: если $x \neq \tilde{x}$ — точки многообразия M, то существуют открытое множество U, содержащее x,

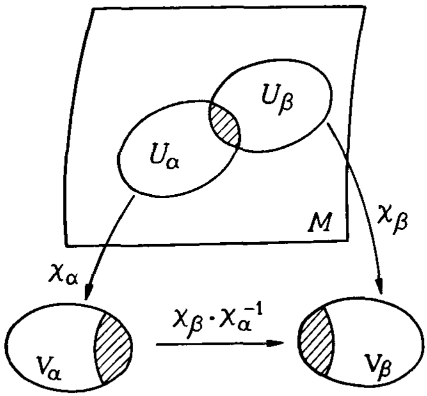

Рис. 1. Координатные карты на многообразии.

и открытое множество $\tilde{U}$, содержащее $\tilde{x}$, такие, что $U \cap \tilde{U} = \varnothing$. В гл. 3 у нас будет случай опустить это свойство и рассмотреть нехаусдорфовы многообразия. Многие результаты из других глав остаются справедливыми в этом более общем контексте, однако, поскольку это приводит к некоторым техническим сложностям, мы будем работать исключительно с хаусдорфовыми многообразиями всюду, кроме соответствующих параграфов гл. 3.

Степень дифференцируемости функций перехода $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ определяет степень гладкости многообразия M. Мы будем в основном интересоваться *гладкими многообразиями*, для которых функции перехода $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ являются гладкими, т. е. функциями класса C^∞, диффеоморфизмами открытых подмножеств из $\mathbb{R}^m$. Если мы требуем, чтобы $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ были вещественными аналитическими функциями, то M называется *аналитическим многообразием*. Большинство классических примеров многообразий являются на самом деле аналитическими Мы можем поступить иначе, ослабив требования дифференцируемости, и рассматривать *C^k-многообразия*, для которых требуется, чтобы функции перехода имели непрерывные производные только до порядка k включительно. Многие наши результаты справедливы и при этих ослабленных требованиях дифференцируемости, однако, чтобы не следить на каждом шагу за тем, сколько именно нам нужно непрерывных производных, мы просто придерживаемся случая гладких или иногда аналитических многообразий. Ослабить предположения о дифференцируемости мы предоставляем заинтересованному читателю. Мы начнем с того, что проиллюстрируем общее определение многообразия несколькими элементарными примерами.

Пример 1.2. Простейшее m-мерное многообразие — это само евклидово пространство $\mathbb{R}^m$. Единственной координатной картой будет $U = \mathbb{R}^m$, а локальным координатным отображением — тождественное отображение $\chi = \mathbb{1}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Более общо, всякое открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$ является m-мерным многообразием с единственной координатной картой — самим множеством U — и тождественным локальным координатным отображением. Обратно, если M — произвольное многообразие с единственной глобальной координатной картой $\chi\colon M \to V \subset \mathbb{R}^m$, мы можем отождествить M с его образом — открытым подмножеством $V \subset \mathbb{R}^m$.

Пример 1.3. Единичная сфера

$$S^2 = \{(x, y, z)\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

— хороший пример нетривиального двумерного многообразия, реализованного поверхностью в $\mathbb{R}^3$. Пусть

$$U_1 = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad U_2 = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$$

— подмножества, полученные удалением северного и южного полюсов соответственно. Пусть

$$\chi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^2 \simeq \{(x, y, 0)\}, \quad \alpha = 1, 2,$$

— стереографические проекции из соответствующих полюсов, так что

$$\chi_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \quad \chi_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right).$$

Легко можно проверить, что на пересечении $U_1 \cap U_2$ отображение

$$\chi_1 \circ \chi_2^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

является гладким диффеоморфизмом, заданным инверсией

$$\chi_1 \circ \chi_2^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Свойство отделимости Хаусдорфа легко следует из того, что этим свойством обладает $\mathbb{R}^3$; поэтому S^2 является гладким (на самом деле аналитическим) двумерным многообразием. Единичная сфера — частный случай общего понятия поверхности в $\mathbb{R}^3$, который исторически доставил главный мотивирующий пример для развития общей теории многообразий.

Пример 1.4. Более легкий пример — единичная окружность

$$S^1 = \{(x, y): \quad x^2 + y^2 = 1\},$$

которая аналогично оказывается одномерным многообразием с двумя координатными картами. Можно поступить иначе, *а именно отождествить точку из* S^1 *с ее угловой координатой* θ, где $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$, причем два угла отождествляются, если они отличаются на целое кратное 2π.

Декартово произведение

$$T^2 = S^1 \times S^1$$

окружности S^1 на себя является двумерным многообразием, называемым *тором*. Его можно представлять себе как поверхность замкнутой трубки. (См. пример 1.6.) Точки на T^2 задаются парами (θ, ρ) угловых координат, причем две пары отождествляются, если они отличаются на целые кратные 2π. Иными словами, (θ, ρ) и $(\tilde\theta, \tilde\rho)$ описывают одну и ту же точку на T^2, если и только если

$$\theta - \tilde\theta = 2k\pi, \quad \rho - \tilde\rho = 2l\pi$$

для некоторых целых k, l. Таким образом, тор T^2 можно покрыть двумя координатными картами

$$U_1 = \{(\theta, \rho): \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \rho < 2\pi\},$$
$$U_2 = \{(\theta, \rho): \quad \pi < \theta < 3\pi, \quad \pi < \rho < 3\pi\}$$

с функцией перехода

$$\chi_1 \circ \chi_2^{-1}(\theta, \rho) = \begin{cases} (\theta, \rho), & \pi < \theta < 2\pi, \quad \pi < \rho < 2\pi, \\ (\theta - 2\pi, \rho), & 2\pi < \theta < 3\pi, \quad \pi < \rho < 2\pi, \\ (\theta, \rho - 2\pi), & \pi < \theta < 2\pi, \quad 2\pi < \rho < 3\pi, \\ (\theta - 2\pi, \rho - 2\pi), & 2\pi < \theta < 3\pi, \quad 2\pi < \rho < 3\pi \end{cases}$$

на пересечении $U_1 \cap U_2$, которое является множеством всех (θ, ρ), таких, что ни θ ни ρ не являются целыми кратными π.

Более общо, m-мерный тор задается m-кратным декартовым произведением $T^m = S^1 \times \ldots \times S^1$ окружности S^1 на себя.

Вообще говоря, если M и N — гладкие многообразия размерностей m и n соответственно, то их декартово произведение $M \times N$, как легко видеть, будет гладким $(m+n)$-мерным многообразием. Если χ_α: $U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ и $\tilde{\chi}_\beta$: $\tilde{U}_\beta \to \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ — координатные карты на M и N соответственно, то их декартовы произведения

$$\chi_\alpha \times \tilde{\chi}_\beta\colon U_\alpha \times \tilde{U}_\beta \to V_\alpha \times \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{m+n}$$

доставляют координатные карты на $M \times N$. Проверка требований определения 1.1 для $M \times N$ предоставляется читателю.

Замена координат

К основным координатным картам χ_α: $U_\alpha \to V_\alpha$ из определения многообразия M всегда можно добавить много дополнительных координатных карт χ: $U \to V \subset \mathbb{R}^m$, подчиняющихся требованию *согласованности* с данными картами. Это означает, что для любого α отображение $\chi \circ \chi_\alpha^{-1}$ является гладким на подмножестве $\chi_\alpha(U \cap U_\alpha)$. Таким образом, ограничение данного множества локальных координат χ_α на меньшую карту $\tilde{U}_\alpha \subset \subset U_\alpha$ также определяет подходящую координатную карту. Дополнительная возможность состоит во взятии композиции данного локального координатного отображения χ_α: $U_\alpha \to V_\alpha$ с произвольным диффеоморфизмом ψ: $V_\alpha \to \tilde{V}_\alpha$ пространства $\mathbb{R}^m$. Такой диффеоморфизм дает нам *замену координат*. Поскольку оба отображения χ_α и $\psi \circ \chi_\alpha$ — одинаково подходящие локальные координаты на карте U_α, никакое свойство многообразия M или объекта, определенного на M, не должно зависеть от выбора локальных координат. (Конечно, явные формулы для данного объекта могут меняться при переходе от одной карты к другой, однако внутренняя характеристика объекта остается бескоординатной.) Если мы предпочитаем определить некоторый объект на многообразии, задавая его формулами в данной координатной карте, то должны проверить, что это определение на самом деле не зависит от используемых координат. Это требует исследования того, как ведет себя объект при заменах координат. Поскольку легче всего проводить вычисления в локальных координатах, часто выбор специальной координатной карты, в которой интересующий нас объект принимает особенно простой вид, позволяет нам значительно упростить многие из таких вычислений. Полезность этой основной техники станет яснее в дальнейшем.

Часто набор координатных карт расширяют так, чтобы включить все карты, согласованные с данными. Полученный набор, называемый *максимальным набором* карт или *атласом* на M, по-прежнему обладает основными свойствами (a), (b), (c) определения 1.1 (но, конечно, уже не будет счетным!). Легкие детали доказательства того, что две карты, согласованные с данными, согласованы между собой, мы оставляем читателю.

Обычно, говоря о локальных координатах на многообразии, мы будем обходиться без точного указания отображения χ_α, определяющего локальную координатную карту, и говорить так, как будто выражения локальных координат совпадают с соответствующими точками на самом многообразии. Таким образом, «пусть $x=(x^1, \ldots, x^m)$ — локальные координаты на M» более точно означает существование локального координатного отображения χ_α: $U_\alpha \to V_\alpha$, где $U_\alpha \subset M$ открыто, $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ открыто, такого, что всякая точка $p \in U_\alpha$ имеет локальные координаты $x=\chi_\alpha(p)$. Поскольку отображение χ_α взаимно однозначно, мы, очевидно, можем отождествить точку p с ее выражением в локальных координатах x. В силу условия согласованности мы знаем, что $y=(y^1, \ldots, y^m)$ — тоже локальные координаты тогда и только тогда, когда на пересечении двух координатных карт существует диффеоморфизм $y=\psi(x)$, определенный на некотором открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$, связывающий эти две координаты. Например, в случае окружности S^1 угол $-\pi<\theta=\operatorname{arctg}(y/x)<\pi$ является локальной координатой на $S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$. Отношение $\rho=y/x$ является локальной координатой на $S^1 \cap \{x>0\}$. На пересечении замена координат дается формулой $\rho=\operatorname{tg}\theta$. Это диффеоморфизм интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ на $\mathbb{R}$.

Отображения многообразий

Пусть M и N — гладкие многообразия. Отображение F: $M \to N$ называется *гладким*, если его выражение в локальных координатах является гладким отображением в каждой координатной карте. Иными словами, для каждой координатной карты χ_α: $U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ на M и каждой карты $\tilde{\chi}_\beta$: $\tilde{U}_\beta \to \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ на N отображение

$$\tilde{\chi}_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-1}\colon\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

является гладким в своей области определения (т. е. на множестве $\chi_\alpha[U_\alpha \cap F^{-1}(\tilde{U}_\beta)]$). Иными словами, гладкое отображение имеет вид $y=F(x)$, где F — гладкая функция на открытых подмножествах, дающих локальные координаты x на M и y на N.

Пример 1.5. Простой пример — отображение $f\colon \mathbb{R} \to S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. В угловых координатах θ на S^1 функция f является линейной: $\theta = t \bmod 2\pi$ и поэтому, очевидно, будет гладкой.

Пример 1.6. В качестве менее тривиального примера мы покажем, как можно гладко отобразить тор T^2 в $\mathbb{R}^3$. Определим отображение $F\colon T^2 \to \mathbb{R}^3$ формулой

$$F(\theta, \rho) = \left((\sqrt{2} + \cos\rho)\cos\theta,\ (\sqrt{2} + \cos\rho)\sin\theta,\ \sin\rho\right).$$

Тогда ясно, что отображение F является гладким по θ и ρ и взаимно однозначным. Его образ — вложенный тор в $\mathbb{R}^3$, заданный единственным уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2\sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

Таким образом, тор T^2 может быть реализован как поверхность в $\mathbb{R}^3$. Локальные координаты (θ, ρ) на T^2 служат параметризацией его образа в $\mathbb{R}^3$.

Условие максимальности ранга

Определение 1.7. Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение m-мерного многообразия M в n-мерное многообразие N. *Ранг* отображения F в точке $x \in M$ — это ранг матрицы Якоби (размера $n \times m$) $(\partial F^i/\partial x^j)$ в точке x, где $y = F(x)$ — запись отображения F в произвольных подходящих локальных координатах вблизи точки x. Отображение F является отображением *максимального ранга* на подмножестве $S \subset M$, если для всякого $x \in S$ ранг отображения F наибольший возможный (т. е. минимум из m и n).

Читатель легко может проверить, что определение ранга отображения F в точке x не зависит от выбора локальных координат на M или на N. Например, ранг отображения $F(x, y) = xy$ на $\mathbb{R}^2$ равен 1 во всех точках, кроме начала координат $(0, 0)$, поскольку матрица Якоби $(F_x, F_y) = (y, x)$ ненулевая при всех x, y, кроме $x = y = 0$. (Здесь и в других местах нижний индекс означает производную, так что $F_x = \partial F/\partial x$ и т. д.)

Теорема 1.8. *Пусть отображение $F\colon M \to N$ имеет максимальный ранг в точке $x_0 \in M$. Тогда существуют локальные координаты $x = (x^1, \ldots, x^m)$ вблизи точки x_0 и $y = (y^1, \ldots, y^n)$ вблизи точки $y_0 = F(x_0)$, такие, что в этих координатах отобра-*

жение F имеет простой вид

$$y=(x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0), \text{ если } n>m,$$

или

$$y=(x^1, \ldots, x^n), \text{ если } n\leqslant m.$$

Эта теорема легко следует из теоремы о неявной функции см. Boothby [1, теорема II. 7.1] [1]), где приводится доказательство. Это первая иллюстрация нашего утверждения, что удачным выбором локальных координат можно значительно упрощать объекты (в этом случае функции) на многообразии.

Подмногообразия

Приведенные примеры поверхностей в $\mathbb{R}^3$ — сфера и тор — частные случаи общего понятия подмногообразия. Интуитивно, для данного гладкого многообразия M подмногообразие $N\subset M$ — это подмножество, само являющееся гладким многообразием. Однако это предварительное определение можно интерпретировать несколькими совершенно различными способами, так что нам нужно быть аккуратнее. Имеется также несколько способов описания подмногообразий: либо неявно — как множества нулей некоторых гладких функций (как это было в случае сферы), либо параметрически — с помощью некоторой локальной параметризации (как это мы сначала делали с тором). Оба метода чрезвычайно полезны; мы начинаем с последнего из них, который приводит к более общему понятию подмногообразий.

Определение 1.9. Пусть M — гладкое многообразие. *Подмногообразие* многообразия M — это подмножество $N\subset M$ вместе с гладким взаимно однозначным отображением $\varphi\colon \tilde{N}\to N\subset M$, всюду удовлетворяющим условию максимальности ранга, где *пространство параметров* $\tilde{N}$ — некоторое другое многообразие и $N=\varphi(\tilde{N})$ — образ отображения φ. В частности, размерность N совпадает с размерностью $\tilde{N}$ и не превышает размерности многообразия M.

Отображение φ часто называют *погружением* или *иммерсией*. Оно служит для определения параметризации подмногообразия N. Такие подмногообразия часто называют *иммерсированными подмногообразиями*, чтобы подчеркнуть отличие этого определения от других понятий подмногообразия. В этой книге под подмногообразием без уточнений всегда понимается иммерсированное подмногообразие в смысле приведенного определе-

[1]) А также, например, книгу У. Рудина «Основы математического анализа» (М.: Мир, 1966). — *Прим. перев*

ния. Условие максимальности ранга нужно, чтобы гарантировать отсутствие у многообразия N особенностей. Например, функция $\varphi(t)=(t^2, t^3)$ является гладким отображением из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$, но ее образ — это кривая $y^2=x^3$, имеющая точку возврата в $(0, 0)$. Матрица Якоби $\dot\varphi(t)=(2t, 3t^2)$ имеет немаксимальный ранг в точке $t=0$, что указывает на появление особенности в образе функции φ.

Следующая серия примеров продемонстрирует, какими могут быть так определяемые подмногообразия. Как увидит читатель, хотя условие максимальности ранга запрещает появление таких особенностей, как точки возврата, подмногообразия общего вида могут все же проявлять довольно причудливые свойства.

Пример 1.10. Во всех этих примерах подмногообразий пространство параметров $\tilde N=\mathbb{R}$ — вещественная прямая, а $\varphi\colon \mathbb{R}\to M$ — параметризация одномерного подмногообразия $N=\varphi(\mathbb{R})$ некоторого многообразия M.

(a) Пусть $M=\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\varphi(t)=(\cos t,\ \sin t,\ t)$$

определяет круговую спираль, закручивающуюся вокруг оси z. Здесь, очевидно, отображение φ взаимно однозначно и $\dot\varphi= (-\sin t,\ \cos t,\ 1)$ никогда не обращается в нуль, так что условие максимальности ранга выполняется.

(b) Пусть $M=\mathbb{R}^2$ и

$$\varphi(t)=((1+e^{-t})\cos t,\ (1+e^{-t})\sin t).$$

Тогда при $t\to\infty$ подмногообразие N накручивается на единичную окружность $x^2+y^2=1$. Аналогично, $\tilde\varphi(t)= (e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t)$ определяет логарифмическую спираль, закручивающуюся в начале координат.

(c) Пусть снова $M=\mathbb{R}^2$. Рассмотрим отображение

$$\hat\varphi(t)=(\sin t,\ 2\sin(2t)).$$

Тогда отображение $\hat\varphi$ параметризует «восьмерку», являющуюся кривой с самопересечением, а именно $\hat\varphi(t)=(0, 0)$, если t есть целое кратное π. Слегка модифицируя это отображение, например, взяв

$$\varphi(t)=(\sin(2\operatorname{arctg} t),\ 2\sin(4\operatorname{arctg} t)),$$

мы можем устроить взаимно однозначную параметризацию, и кривая пройдет через начало координат только однажды. Условие максимальности ранга выполняется всюду. Образ отображения φ — снова «восьмерка», так что мы получили параметризацию подмногообразия с «кажущимся» самопересечением, хотя иммерсия φ взаимно однозначна. Заметим, что эту же фигуру можно параметризовать другим, неэквивалентным, способом:

$$\tilde{\varphi}(t) = (-\sin(2\operatorname{arctg} t),\ 2\sin(4\operatorname{arctg} t)).$$

Образ $\tilde{\varphi}$ тот же, но композиция $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не является* непрерывным отображением!

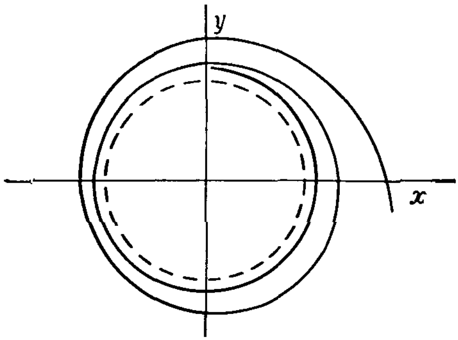

Рис. 2. Примеры подмногообразий.

Этот пример показывает, что, вообще говоря, мы должны указать не только подмножество $N \subset M$, но и иммерсию φ: $\tilde{N} \to M$, чтобы однозначно определить подмногообразие.

(d) Пусть $M = T^2$ — двумерный тор с угловыми координатами (θ, ρ). Пусть φ: $\mathbb{R} \to T^2$ — кривая $\varphi(t) = (t, \omega t)$, где ω — некоторое фиксированное вещественное число, а координаты берутся по модулю целого кратного 2π, как и раньше. Заметим, что $\dot{\varphi} = (1, \omega)$, так что условие максимальности ранга выполняется. Если $\omega = p/q$ — рациональное число, то отображение φ не является взаимно однозначным; в самом деле, $\varphi(t + 2\pi q) = \varphi(t)$, так что образ отображения φ — замкнутая кривая на торе. Она может быть реализована как одномерное подмногообразие, если взять $\tilde{N} = S^1$ в качестве параметризующего многообразия и положить $\tilde{\varphi}(\theta) = (q\theta, \omega q\theta)$, $\theta \in S^1$ (если p и q не имеют общих делителей). Если ω — иррациональное число, то само отображение φ взаимно однозначно и его образ — кривая $N = \varphi(\mathbb{R})$, — как нетрудно показать, является всюду плотным подмногообразием тора T^2, замыкание которого есть весь тор. (См. Boothby [1; p. 86], где приведены детали.) Аналогичный пример можно построить в $\mathbb{R}^3$, взяв композицию отображения φ и отображения F: $T^2 \to \mathbb{R}^3$ из примера 1.6. Для иррационального ω

$$\varphi(t) = ((\sqrt{2} + \cos \omega t) \cos t, \ (\sqrt{2} + \cos \omega t) \sin t, \ \sin \omega t)$$

параметризует одномерное подмногообразие в $\mathbb{R}^3$, замыкание которого является двумерной тороидальной поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2\sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

Регулярные подмногообразия

Примеры 1.10(c) и 1.10(d), возможно, более патологичны, чем объекты, которые хотелось бы рассматривать как подмногообразия. Хотя, как мы увидим, имеются веские причины для того, чтобы выбрать определение 1.9 в качестве общего определения подмногообразия, полезно все же выделить класс примеров так называемых регулярных подмногообразий, которые, возможно, более точно соответствуют интуитивному понятию подмногообразия.

Определение 1.11. *Регулярное подмногообразие* N многообразия M — это подмногообразие, параметризованное отображением φ: $\tilde{N} \to M$, обладающим следующим свойством: для любой точки x из N существует как угодно малая ее окрестность U в M, такая, что $\varphi^{-1}[U \cap N]$ — связное открытое подмножество в $\tilde{N}$.

В примере 1.10 в пп. (a) и (b) приведены регулярные подмногообразия, а в пп. (c) и (d) (при иррациональных ω) — нерегулярные. В случае (c) всякая окрестность точки $(0, 0)$ будет содержать и кусок кривой, проходящей через $(0, 0)$, и два «конца» кривой, входящие в начало координат. Иными словами, $\varphi^{-1}[U]$ состоит по меньшей мере из трех непересекающихся открытых интервалов $(-\infty, a)$, (b, c), $(d, +\infty)$, где $a < b < 0 < c < d$. Аналогично, в случае (d), если ω иррационально, а U — произвольное открытое подмножество тора T^2, то $\varphi^{-1}[U]$ состоит из бесконечного числа непересекающихся открытых интервалов.

В качестве следствия теоремы о неявной функции 1.8 мы получаем характеризацию регулярности в локальных координатах.

Лемма 1.12. *n-мерное подмногообразие $N \subset M$ регулярно, если и только если для любого $x_0 \in N$ существуют локальные координаты $x = (x^1, \ldots, x^m)$, определенные в некоторой окрестности U точки x_0, такие, что*

$$N \cap U = \{x\colon\ x^{n+1} = \ldots = x^m = 0\}.$$

Такая координатная карта называется *плоской координатной картой* на M. Заметим, что ввиду этой леммы если $N \subset M$ — регулярное подмногообразие, то мы можем обойтись без параметризующего многообразия $\tilde{N}$ и обращаться с N просто как с многообразием. А именно: плоские локальные координаты $x = (x^1, \ldots, x^m)$ на $U \subset M$ индуцируют локальные координаты $\tilde{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ на $U \cap N$. Поэтому параметризация заменяется естественным включением $N \subset M$.

Неявные подмногообразия

Вместо того чтобы определять поверхность S в $\mathbb{R}^3$ параметрически, можно поступить иначе — определить ее *неявно* как множество нулей гладкой функции:

$$S = \{F(x,\ y,\ z) = 0\}.$$

Если мы предполагаем, что градиент $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ не обращается в нуль на S, то по теореме о неявной функции в каждой точке (x_0, y_0, z_0) на S мы можем выразить одну из переменных x, y, z через две другие. Таким образом, если $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то существует окрестность U_α точки (x_0, y_0, z_0), в которой поверхность S представляет собой график $z = f(x, y)$ некоторой гладкой функции f, определенной на открытом подмножестве $\tilde{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^2$. Это приводит нас к определению локальной координатной карты на S с помощью проектирования вдоль оси z; иными словами, мы полагаем $\tilde{U}_\alpha = S \cap U_\alpha$ и $\chi_\alpha\colon \tilde{U}_\alpha \to \tilde{V}_\alpha$, $\chi_\alpha(x, y, z) = (x, y)$. Аналогичные построения можно выполнить, если F_y или F_x отличны от нуля. Если $\tilde{U}_\alpha$ задано формулой $z = f(x, y)$, так что $\chi_\alpha(x, y, z) = (x, y)$, а $\tilde{U}_\beta$ задано формулой $y = h(x, z)$, так что $\chi_\beta(x, y, z) = (x, z)$, то на пересечении $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta$

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}(x,\ y) = \chi_\beta(x,\ y,\ f(x,\ y)) = (x,\ f(x,\ y)).$$

Это отображение, очевидно, является гладким вместе с обратным $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(x, z) = (x, h(x, z))$. Таким образом, S — двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^3$. Этот пример мотивирует общее понятие *неявно определенного подмногообразия.*

Теорема 1.13. *Пусть M — гладкое m-мерное многообразие и $F\colon M \to \mathbb{R}^n$, $n \leqslant m$, — гладкое отображение. Если F имеет максимальный ранг на подмножестве $N = \{x\colon F(x) = 0\}$, то N — регулярное $(m - n)$-мерное подмногообразие многообразия M.*

Доказательство этой теоремы легко получается из теоремы о неявной функции с помощью рассуждений, аналогичных тем, что мы проводили для случая поверхностей в $\mathbb{R}^3$. В самом деле, из теоремы 1.8 следует, что мы можем выбрать локальные координаты $x = (x^1, \ldots, x^m)$ на M вблизи каждой точки $x_0 \in N$ так, что $F(x) = (x^1, \ldots, x^n)$. Таким образом, в этих координатах $N = \{x^1 = \ldots = x^n = 0\}$, и поэтому $x^1, \ldots, x^m$ представляют собой плоские локальные координаты для N вблизи точки x_0. Более того, последние $m - n$ координат $(x^{n+1}, \ldots, x^m)$ представляют собой локальные координаты на самом N. В частности, это доказывает, что N является регулярным подмногообразием. Особенно отметим, что мы не требуем, чтобы ранг отображения F был максимален всюду на M — это условие должно выполняться лишь на подмножестве N, где F обращается в нуль. Если же отображение F имеет максимальный ранг везде, то *всякое* множество уровня $\{x\colon F(x) = c\}$ является регулярным $(m - n)$-мерным подмногообразием многообразия M.

Например, отображение $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2(x^2 + y^2)}$ имеет максимальный ранг на $\mathbb{R}^3$ везде, кроме оси z (где оно даже не гладкое) и окружности $\{x^2 + y^2 = 2, z = 0\}$. Множества уровня $\{(x, y, z)\colon F(x, y, z) = c\}$ — торы при $-2 < c < \sqrt{2} - 2$. При $c \geqslant \sqrt{2} - 2$ они выглядят как сферы с выколотыми точками пересечения с осью z. При $c = -2$ множество уровня — окружность $\{x^2 + y^2 = 2, z = 0\}$, на которой градиент функции F обращается в нуль. Этот пример показывает важность обоих условий — дифференцируемости и максимальности ранга — для справедливости теоремы.

Кривые и связность

Кривая C на гладком многообразии M параметризуется гладким отображением $\varphi\colon I \to M$, где I — подынтервал в $\mathbb{R}$. В локальных координатах кривая C определяется m функциями $x = \varphi(t) = (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^m(t))$. Заметим, что мы *не* требуем взаимной однозначности отображения φ (так что кривая может иметь самопересечения) и максимальности ранга (так что кривая может иметь особенности вроде точек возврата). Следовательно, кривые — более общие объекты, чем одномерные подмногообразия. Особенно вырожденная кривая получается, когда $\varphi(t) \equiv x_0$ для всех t и некоторого фиксированного x_0, так что C состоит из одной точки. *Замкнутая кривая* — это кривая, у которой совпадают начальная и конечная точки: $\varphi(a) = \varphi(b)$, где $I = [a, b]$ — замкнутый интервал.

Топологическое пространство *связно*, если оно не может быть представлено как объединение двух непересекающихся открытых множеств. Поскольку всякое многообразие локально выглядит как евклидово пространство, нетрудно доказать, что всякое связное многообразие *линейно связно* (это означает, что для любой пары точек найдется гладкая кривая, которая их соединяет). Для наших целей будет весьма полезно с самого начала потребовать, чтобы все многообразия, которые мы рассматриваем, были связны.

Общее предположение. *Если специально не оговорено противное, все многообразия (подмногообразия и т. д.) предполагаются связными.*

Тем самым в формулировках наших результатов мы избежим постоянного упоминания условия связности.

Многообразие M *односвязно*, если всякая замкнутая кривая $C \subset M$ может быть непрерывно продеформирована в точку. Это эквивалентно существованию непрерывного отображения

$$H\colon [0, 1] \times [0, 1] \to M,$$

такого, что $H(t, 0) = x_0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$, а $H(t, 1)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, параметризует C. Например, $\mathbb{R}^m$ односвязно, а $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ неодносвязно, поскольку нельзя непрерывно стянуть единичную окружность в точку, не проходя через начало координат. (С другой стороны, $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ *является* односвязным при $m \geqslant 3$.) Если M — произвольное многообразие, то существует односвязное *накрывающее многообразие* $\pi\colon \tilde{M} \to M$, где накрывающее отображение π является отображением «на» и локальным диффеоморфизмом. Например, односвязное накрытие окружности S^1 — вещественная прямая $\mathbb{R}$ с накрывающим отображением $\pi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1.2. ГРУППЫ ЛИ

На первый взгляд группа Ли выглядит каким-то неестественным сочетанием алгебраического понятия группы, с одной стороны, и дифференциально-геометрического понятия многообразия,