иметь самопересечения) и максимальности ранга (так что кривая может иметь особенности вроде точек возврата). Следовательно, кривые — более общие объекты, чем одномерные подмногообразия. Особенно вырожденная кривая получается, когда $\varphi(t) \equiv x_0$ для всех t и некоторого фиксированного x_0, так что C состоит из одной точки. *Замкнутая кривая* — это кривая, у которой совпадают начальная и конечная точки: $\varphi(a) = \varphi(b)$, где $I = [a, b]$ — замкнутый интервал.

Топологическое пространство *связно*, если оно не может быть представлено как объединение двух непересекающихся открытых множеств. Поскольку всякое многообразие локально выглядит как евклидово пространство, нетрудно доказать, что всякое связное многообразие *линейно связно* (это означает, что для любой пары точек найдется гладкая кривая, которая их соединяет). Для наших целей будет весьма полезно с самого начала потребовать, чтобы все многообразия, которые мы рассматриваем, были связны.

Общее предположение. *Если специально не оговорено противное, все многообразия (подмногообразия и т. д.) предполагаются связными.*

Тем самым в формулировках наших результатов мы избежим постоянного упоминания условия связности.

Многообразие M *односвязно*, если всякая замкнутая кривая $C \subset M$ может быть непрерывно продеформирована в точку. Это эквивалентно существованию непрерывного отображения

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \to M,$$

такого, что $H(t, 0) = x_0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$, а $H(t, 1)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, параметризует C. Например, $\mathbb{R}^m$ односвязно, а $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ неодносвязно, поскольку нельзя непрерывно стянуть единичную окружность в точку, не проходя через начало координат. (С другой стороны, $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ *является* односвязным при $m \geqslant 3$.) Если M — произвольное многообразие, то существует односвязное *накрывающее многообразие* $\pi: \tilde{M} \to M$, где накрывающее отображение π является отображением «на» и локальным диффеоморфизмом. Например, односвязное накрытие окружности S^1 — вещественная прямая $\mathbb{R}$ с накрывающим отображением $\pi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1.2. ГРУППЫ ЛИ

На первый взгляд группа Ли выглядит каким-то неестественным сочетанием алгебраического понятия группы, с одной стороны, и дифференциально-геометрического понятия многообразия, с другой стороны. Однако, как мы вскоре увидим, комбинация алгебры и анализа приводит к мощной технике для изучения симметрии, непригодной, скажем, для конечных групп[1]). Мы начинаем с напоминания определения абстрактной группы.

Определение 1.14. *Группа* — это множество G вместе с групповой операцией, обычно называемой умножением, такой, что для любых двух элементов g и h из G их произведение $g \cdot h$ — снова элемент из G. Требуется, чтобы групповая операция удовлетворяла следующим аксиомам:

(1) *Ассоциативность.* Если g, h и k — элементы из G, то

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k.$$

(2) *Единичный элемент.* Существует выделенный элемент e в G, называемый единичным элементом, который обладает свойством

$$e \cdot g = g \cdot e = g$$

для всех g из G.

(3) *Обратные.* Для всякого g из G существует обратный, обозначаемый g^{-1}, обладающий свойством

$$g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g.$$

Прежде чем перейти к группам Ли, мы обсудим несколько элементарных примеров групп. Это приведет к некоторой идее о тех чертах, которые отличают группы Ли от более общих видов групп.

Пример 1.15. (a) Пусть $G = \mathbb{Z}$ — множество целых чисел с групповой операцией сложения. Очевидно, что условие ассоциативности выполняется, единичный элемент — это 0, а «обратным» к целому числу x является $-x$.

(b) Аналогично, $G = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел — также является группой со сложением в качестве групповой операции. Снова 0 — единичный элемент, а $-x$ — обратное к действительному числу x. В обоих этих случаях групповая операция коммутативна: $g \cdot h = h \cdot g$ для $g, h \in G$. Такие группы называются *абелевыми*; они составляют лишь небольшой подкласс всевозможных групп.

(c) Пусть $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ — множество обратимых матриц размера $n \times n$ с рациональными элементами. Групповая операция — умножение матриц. Единичный элемент — это, конечно,

---

[1]) Доказательство тому, например, — недавняя полная классификация простых конечных групп (Gorenstein [1]); соответствующая задача для групп Ли была решена еще в прошлом веке.

единичная матрица I, а обратной к матрице A будет обычная обратная матрица, элементы которой снова рациональны.

(d) Аналогично, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ — множество обратимых матриц размера $n \times n$ с вещественными элементами — является группой с операцией умножения матриц и такими же единицей и обратными, как в предыдущем примере. Для краткости мы обычно будем обозначать *общую линейную группу* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ просто $\mathrm{GL}(n)$.

Отличительная черта группы Ли состоит в том, что она обладает также структурой гладкого многообразия, так что элементы группы можно непрерывно изменять. Таким образом, в каждой паре приведенных примеров групп во втором случае мы имеем группу Ли, поскольку она является также гладким многообразием. Структура многообразия на $\mathbb{R}$ очевидна. Что касается общей линейной группы, ее можно отождествить с открытым подмножеством

$$\mathrm{GL}(n) = \{X\colon \det X \neq 0\}$$

пространства $\mathrm{M}_{n\times n}$ матриц размера $n \times n$. Но $\mathrm{M}_{n\times n}$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^{n^2}$ с координатами — элементами x_{ij} матрицы X. Таким образом, $\mathrm{GL}(n)$ также является n^2-мерным многообразием. В обоих случаях групповая операция является гладкой (на самом деле аналитической). Это приводит к общему определению группы Ли.

Определение 1.16. *r-параметрическая группа Ли* — это группа G, обладающая также структурой r-мерного гладкого многообразия, причем и групповая операция

$$m\colon G \times G \to G, \quad m(g, h) = g \cdot h, \quad g, h \in G,$$

и взятие обратного

$$i\colon G \to G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G,$$

являются гладкими отображениями многообразий.

Пример 1.17. Здесь мы обсудим два примера групп Ли, кроме тех двух, что уже приведены.

(a) Пусть $G = \mathbb{R}^r$ с очевидной структурой многообразия, и пусть групповая операция — сложение векторов $(x, y) \mapsto x + y$. Обратный к вектору x — вектор $-x$. Обе операции, очевидно, гладкие, так что $\mathbb{R}^r$ доставляет пример r-параметрической абелевой группы Ли.

(b) Пусть $G = \mathrm{SO}(2)$ — группа вращений плоскости. Иными словами,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \ 0 \leqslant \theta < 2\pi \right\},$$

где θ обозначает угол поворота. Заметим, что мы можем отождествить G с единичной окружностью

$$S^1 = \{(\cos\theta, \ \sin\theta) : \ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$$

в $\mathbb{R}^2$, что позволяет определить на $\mathrm{SO}(2)$ структуру многообразия. Если мы включим отражения, то получим ортогональгруппу

$$\mathrm{O}(2) = \{X \in \mathrm{GL}(2) : \ X^T X = I\}.$$

Она обладает структурой многообразия двух экземпляров S^1.

(c) Более общо, мы можем рассмотреть группу *ортогональных матриц* размера $n \times n$

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : \ X^T X = I\}.$$

Таким образом, $\mathrm{O}(n)$ — подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}$, определенное n^2 уравнениями

$$X^T X - I = 0$$

относительно элементов x_{ij} матрицы X. Можно показать, что в точности $n(n+1)/2$ из этих уравнений, соответствующих элементам матрицы, стоящим на ее диагонали и выше нее, независимы и удовлетворяют условию максимальности ранга всюду на $\mathrm{O}(n)$. Таким образом, по теореме 1.13 $\mathrm{O}(n)$ — регулярное подмногообразие многообразия $\mathrm{GL}(n)$ размерности $n(n-1)/2$. Более того, умножение матриц и операция взятия обратной матрицы остаются гладкими при ограничении на $\mathrm{O}(n)$, следовательно, $\mathrm{O}(n)$ сама по себе является группой Ли. *Специальная ортогональная группа*

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in \mathrm{O}(n) : \ \det X = +1\},$$

будучи связной компонентой единицы ортогональной группы, также является $n(n-1)/2$-параметрической группой Ли по тем же причинам. (Вскоре будет предложено более простое доказательство этих фактов.)

(d) Группа $T(n)$ верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали является $n(n-1)/2$-параметрической группой Ли. Как многообразие $T(n)$ можно отождествить с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, поскольку каждая матрица единственным образом определяется своими элементами, лежащими выше диагонали. Например, в случае $T(3)$ мы отождествляем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T(3)$$

с вектором (x, y, z) в $\mathbb{R}^3$. Однако, кроме частного случая $T(2)$, группа $T(n)$ *не* изоморфна абелевой группе Ли $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. В случае $T(3)$, если пользоваться указанным отождествлением, групповая операция задается формулой

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy').$$

Это не то же самое, что обычное сложение векторов — в частности, эта операция не коммутативна. Таким образом, фиксированное многообразие может быть снабжено структурой группы Ли более чем одним способом.

Гомоморфизм групп Ли — это гладкое отображение $\varphi: G \to H$ одной группы Ли в другую, согласованное с групповыми операциями:

$$\varphi(g \cdot \tilde{g}) = \varphi(g) \cdot \varphi(\tilde{g}), \quad g, \tilde{g} \in G.$$

Если гомоморфизм φ имеет гладкий обратный, он определяет *изоморфизм* между G и H. Практически мы не будем различать изоморфные группы Ли. Например, группа Ли $\mathbb{R}^+$, состоящая из всех положительных действительных чисел с обычным умножением в качестве групповой операции, изоморфна аддитивной группе Ли $\mathbb{R}$. Изоморфизм осуществляет экспоненциальное отображение φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(t) = e^t$. Для всех практических целей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$ — одна и та же группа Ли. (Фактически, с точностью до изоморфизма, имеются всего две связные однопараметрические группы Ли: $\mathbb{R}$ и $SO(2)$.)

Если G и H суть r- и s-параметрические группы Ли, то их декартово произведение $G \times H$ будет $(r+s)$-параметрической группой Ли с групповой операцией

$$(g, h) \cdot (\tilde{g}, \tilde{h}) = (g \cdot \tilde{g}, h \cdot \tilde{h}), \quad g, \tilde{g} \in G, \quad h, \tilde{h} \in H,$$

являющейся, как легко видеть, гладким отображением в структуре декартова произведения многообразий. Таким образом, например, торы T^r являются группами Ли, будучи r-кратными декартовыми произведениями группы Ли $S^1 \simeq SO(2)$ на себя.

Групповой закон на T^2, например, задается в угловых координатах (θ, ρ) сложением по модулю целого кратного 2π:

$$(\theta,\ \rho)\cdot(\theta',\ \rho') = (\theta+\theta',\ \rho+\rho') \bmod 2\pi.$$

Заметим, что каждый тор T^r является связной компактной абелевой r-параметрической группой Ли и на самом деле, с точностью до диффеоморфизма, это единственная такая группа Ли.

Наше общее предположение о связности многообразий относится также и к рассматриваемым в этой книге группам Ли. Таким образом, *если явно не оговорено противное, все группы Ли предполагаются связными.* Например, ортогональные группы $\mathrm{O}(n)$ несвязны, тогда как специальные ортогональные группы $\mathrm{SO}(n)$ — связные группы Ли. Ограничивая наше внимание связными группами Ли, мы сознательно исключаем из рассмотрения дискретные симметрии, такие, как отражения, и сосредоточиваемся на симметриях вроде поворотов, которые можно непрерывно соединить с единичным элементом группы. Конечно, имеются важные приложения дискретных групп к дифференциальным уравнениям, но они лежат вне круга проблем, рассматриваемых в этой книге. (Говоря техническим языком, если отбросить предположение о связности, то оба примера 1.15(a) и 1.15(c) окажутся группами Ли, будучи несвязными нульмерными многообразиями. Однако никакая инфинитезимальная техника, присущая теории групп Ли, в этих случаях не применима, что оправдывает исключение их из рассмотрения.) Общая линейная группа $\mathrm{GL}(n)$, как можно показать, состоит из двух связных компонент $\mathrm{GL}^+(n) = \{X : \det X > 0\}$, которая сама по себе является группой Ли, и $\mathrm{GL}^-(n) = \{X : \det X < 0\}$. Более общо, если G — произвольная (не обязательно связная) группа Ли, то ее связная компонента единицы G^+ всегда будет группой Ли той же размерности, и мы всегда будем сосредоточивать внимание на этой части группы G. Другие связные компоненты группы G получаются из G^+ с помощью дискретной подгруппы элементов.

Подгруппы Ли

Часто группы Ли появляются как подгруппы некоторых бóльших групп Ли; например, ортогональные группы являются подгруппами общих линейных групп всех обратимых матриц. Вообще говоря, нас будут интересовать только такие подгруппы групп Ли, которые можно рассматривать как группы Ли. Точное определение подгруппы Ли формулируется по образцу определения (иммерсированного) подмногообразия.

Определение 1.18. *Подгруппа Ли* H группы Ли G задается подмногообразием $\varphi\colon \tilde{H} \to G$, где $\tilde{H}$ само является группой Ли, $H = \varphi(\tilde{H})$ — образ φ, а φ — гомоморфизм групп Ли.

Например, если ω — произвольное вещественное число, то подмногообразие

$$H_\omega = \{(t, \omega t) \bmod 2\pi\colon t \in \mathbb{R}\} \subset T^2,$$

как легко видеть, будет однопараметрической подгруппой Ли тороидальной группы T^2. Если ω рационально, то H_ω изоморфна группе окружности $\mathrm{SO}(2)$ и представляет собой замкнутую регулярную подгруппу в T^2. Если же ω иррационально, то H_ω изоморфна группе Ли $\mathbb{R}$ и всюду плотна в T^2. Таким образом, подгруппы Ли групп Ли не обязаны быть регулярными подмногообразиями. Однако для многих приложений имеется один очень простой способ проверки, является ли подгруппа регулярной подгруппой Ли.

Теорема 1.19. *Предположим, что G — группа Ли. Если H — замкнутая подгруппа группы G, то она — регулярное подмногообразие в G и, следовательно, сама является группой Ли. Обратно, всякая регулярная подгруппа Ли группы G замкнута.*

Для того чтобы заключить, что H — регулярная подгруппа Ли, нам нужно лишь проверить, что она является подгруппой группы G и замкнута как подмножество в G. Таким образом обходится задача непосредственного доказательства того, что H — подмногообразие. В частности, если H — подгруппа, заданная условием обращения в нуль некоторого числа (непрерывных) вещественнозначных функций

$$H = \{g\colon F_i(g) = 0,\ i = 1, \ldots, n\},$$

то она автоматически является подгруппой Ли группы G; нам не нужно проверять условие максимальности ранга на F_i! (Конечно, чтобы найти размерность H, нам нужно выяснить, сколько из функций F_i независимы.) Таким образом, например, ортогональная группа $\mathrm{O}(n)$ является группой Ли, поскольку задается n^2 уравнениями

$$A^T A = I, \quad A \in \mathrm{GL}(n).$$

Другой важный пример — *специальная линейная группа*

$$\mathrm{SL}(n) \equiv \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \equiv \{A \in \mathrm{GL}(n)\colon \det A = 1\},$$

являющаяся $(n^2 - 1)$-мерной подгруппой, заданной условием обращения в нуль одной функции $\det A - 1$.

Локальные группы Ли

Нас часто интересует не вся группа Ли, а только элементы, достаточно близкие к единичному. В этом случае мы можем обойтись без абстрактной теории многообразий и определить локальную группу Ли, используя только выражение групповых операций в локальных координатах.

Определение 1.20. *r-параметрическая локальная группа Ли* состоит из связных открытых подмножеств $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$, содержащих начало координат 0, гладкого отображения

$$m\colon V \times V \to \mathbb{R}^r,$$

определяющего групповую операцию, и гладкого отображения

$$i\colon V_0 \to V,$$

определяющего взятие обратного, которые обладают следующими свойствами.

(a) *Ассоциативность.* Если $x, y, z \in V$ и, кроме того, $m(x, y)$ и $m(y, z)$ лежат в V, то

$$m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z).$$

(b) *Единичный элемент.* Для всех x из V $m(0, x) = x = m(x, 0)$.

(c) *Обратные.* Для каждого x из V_0 $m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$.

Если мы напишем $x \cdot y$ вместо $m(x, y)$ и x^{-1} вместо $i(x)$, то эти аксиомы превратятся в обычные аксиомы группы, за исключением того, что эти операции не обязательно определены всюду. Таким образом, $x \cdot y$ имеет смысл лишь для x и y, достаточно близких к 0. Ассоциативность означает, что $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, если обе части этого равенства определены. Единичный элемент группы — начало координат 0. Наконец, x^{-1} снова определен только для x, достаточно близких к 0, и для таких x имеем $x \cdot x^{-1} = 0 = x^{-1} \cdot x$.

Пример 1.21. Здесь мы приводим нетривиальный пример локальной (но не глобальной) однопараметрической группы Ли. Пусть $V = \{x : |x| < 1\} \subset \mathbb{R}$ с групповым умножением

$$m(x, y) = \frac{2xy - x - y}{xy - 1}, \quad x, y \in V.$$

Непосредственным вычислением проверяются ассоциативность этой операции и условие (b) определения 1.20. Обратное отображение $i(x) = x/(2x - 1)$ определено для $x \in V_0 = \{x : |x| <$

$< 1/2\}$. Таким образом, m определяет локальную однопараметрическую группу Ли.

Один простой способ строить локальные группы Ли состоит в том, чтобы взять глобальную группу Ли G и рассмотреть координатную карту, содержащую единичный элемент. Менее тривиален тот факт, что (локально) каждая локальная группа Ли получается таким образом. Иными словами, каждая локальная группа Ли локально изоморфна окрестности единицы некоторой глобальной группы Ли G.

Теорема 1.22. *Пусть $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ — локальная группа Ли с умножением $m(x, y)$ и обратным $i(x)$. Тогда существуют глобальная группа Ли G и координатная карта $\chi: U^* \to V^*$, где U^* содержит единичный элемент, такие, что $V^* \subset V_0$, $\chi(e) = 0$ и*

$$\chi(g \cdot h) = m(\chi(g), \chi(h))$$

при $g, h \in U^*$ и

$$\chi(g^{-1}) = i(\chi(g))$$

при $g \in U^*$. Более того, существует единственная связная односвязная группа Ли G^*, обладающая указанными свойствами. Если G — другая такая группа Ли, то существует накрывающее отображение π: $G^* \to G$, являющееся групповым изоморфизмом, осуществляющее локальный изоморфизм между G^* и G (G^* называется односвязной накрывающей группой *группы G).*

Пример 1.23. Единственной связной односвязной однопараметрической группой Ли является $\mathbb{R}$; таким образом, приведенная в примере 1.21 локальная группа Ли должна совпадать с некоторой координатной картой в $\mathbb{R}$, содержащей 0. В самом деле, если мы положим $\chi: U^* \to V^* \subset \mathbb{R}$, где

$$\chi(t) = t/(t-1), \quad t \in U^* = \{t < 1\},$$

то легко видеть, что

$$\chi(t+s) = m(\chi(t), \chi(s)) = \frac{2\chi(t)\chi(s) - \chi(t) - \chi(s)}{\chi(t)\chi(s) - 1},$$

$$\chi(-t) = i(\chi(t)) = \frac{\chi(t)}{2\chi(t) - 1}$$

в своей области определения, так что χ удовлетворяет требованиям теоремы.

Раз мы знаем, что такая глобальная группа Ли существует, мы можем по существу построить ее, зная окрестность единицы, определяющую локальную группу Ли.

Предложение 1.24. *Пусть G — связная группа Ли и $U \subset G$ — окрестность единицы. Далее, пусть $U^k \in \{g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k : g_i \in U\}$ — множество k-кратных произведений элементов из U. Тогда*

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k.$$

Иными словами, каждый элемент группы G можно записать как произведение конечного числа элементов из U.

Как показано в упр. 1.26, это непосредственно следует из связности группы G. Аналогичный результат справедлив также для локальных групп Ли.

Локальные группы преобразований

Практически наиболее естественно группы возникают не как абстрактные, самостоятельные сущности, а как группы преобразований некоторого многообразия M. Например, группа $\mathrm{SO}(2)$ появляется как группа вращений плоскости $M = \mathbb{R}^2$, а группа $\mathrm{GL}(n)$ возникает как группа обратимых линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Вообще говоря, группа Ли G будет реализована как группа преобразований некоторого многообразия M, если каждому элементу g группы G будет поставлено в соответствие отображение многообразия M в себя. Важно не ограничить внимание исключительно линейными преобразованиями. Кроме того, группа может действовать только локально. Это означает, что преобразования могут не быть определены для всех элементов группы или всех точек многообразия.

Определение 1.25. Пусть M — гладкое многообразие. *Локальная группа преобразований*, действующая на M, задается (локальной) группой Ли G, открытым подмножеством $\mathcal{U}$, таким, что

$$\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M,$$

являющимся областью определения действия группы, и гладким отображением $\Psi\colon \mathcal{U} \to M$, обладающими следующими свойствами:

(a) Если $(h, x) \in \mathcal{U}$, $(g, \Psi(h, x)) \in \mathcal{U}$, а также $(g \cdot h, x) \in \mathcal{U}$, то

$$\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g \cdot h, x).$$

(b) Для всех $x \in M$

$$\Psi(e, x) = x.$$

(c) Если $(g, x) \in \mathcal{U}$, то $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in \mathcal{U}$ и

$$\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x.$$

(Заметим, что, за исключением предположения о виде области $\mathcal{U}$, свойство (c) непосредственно вытекает из (a) и (b).)

Для краткости мы будем обозначать $\Psi(g, x)$ через $g \cdot x$, и условия этого определения примут более простой вид:

$$g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x, \quad g, h \in G, \quad x \in M, \tag{1.1}$$

если обе части равенства имеют смысл,

$$e \cdot x = x \text{ для всех } x \in M \tag{1.2}$$

и

$$g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x, \quad g \in G, \quad x \in M, \tag{1.3}$$

если $g \cdot x$ определено. Как следствие из равенства (1.3) мы получаем, что каждое преобразование из группы G является диффеоморфизмом там, где оно определено.

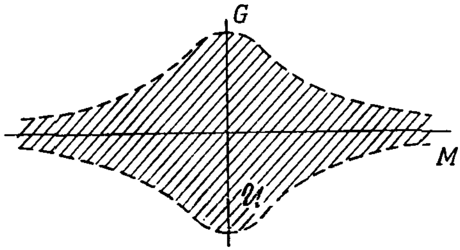

Рис. 3. Область определения для локальной группы преобразований.

Заметим, что для каждого x из M групповые элементы g, такие, что $g \cdot x$ определено, образуют локальную группу Ли

$$G_x \equiv \{g \in G\colon (g, x) \in \mathcal{U}\}.$$

Обратно, для любого $g \in G$ существует открытое подмногообразие

$$M_g \equiv \{x \in M\colon (g, x) \in \mathcal{U}\}$$

многообразия M, на котором определено преобразование, задаваемое элементом g. В некоторых случаях единичный элемент может быть единственным элементом группы, действующим на всем многообразии M. Другая крайность — *глобальная* группа преобразований, т. е. группа, для которой можно взять $\mathcal{U} = G \times M$. В этом случае $g \cdot x$ определено для каждого $g \in G$ и каждого $x \in M$. Таким образом, условия (1.1)—(1.3) справедливы для всех $g, h \in G$ и всех $x \in M$, и нет нужды беспокоиться о точных областях определения.

Группа преобразований G, действующая на M, называется *связной*, если выполняются следующие требования:

(a) G — связная группа Ли, а M — связное многообразие;

(b) $\mathcal{U} \subset G \times M$ — связное открытое множество и

(c) для любого $x \in M$ локальная группа G_x связна.

Как и для многообразий и групп Ли, мы делаем общее предположение, что, *если специально не оговорено противное, все локальные группы преобразований предполагаются связными в указанном выше смысле.* Эти предположения о связности помогают нам избежать некоторых технических трудностей при обсуждении инфинитезимальных методов и инвариантов. Они всегда могут быть реализованы подходящим сужением области определения $\mathcal{U}$ действия группы.

Орбиты

Орбита локальной группы преобразований — это минимальное непустое подмножество многообразия M, инвариантное относительно действия группы. Иными словами, множество $\mathcal{O} \subset M$ является орбитой, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(a) Если $x \in \mathcal{O}$, $g \in G$ и $g \cdot x$ определено, то $g \cdot x \in \mathcal{O}$.

(b) Если $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ и $\tilde{\mathcal{O}}$ удовлетворяет условию (a), то либо $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$, либо $\tilde{\mathcal{O}}$ пусто.

В случае глобальной группы преобразований для любого $x \in M$ орбита, проходящая через точку x, определяется явно: $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x\colon g \in G\}$. Для локальных групп преобразований мы должны рассматривать произведения элементов группы, действующих на x:

$$\mathcal{O}_x = \{g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k \cdot x\colon k \geqslant 1,\ g_i \in G \text{ и } g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k \cdot x \text{ определено}\}.$$

Как мы увидим, орбиты группы Ли преобразований являются на самом деле подмногообразиями многообразия M, однако они могут иметь разные размерности и могут не быть регулярными. Мы различаем два важных подкласса действий группы.

Определение 1.26. Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на многообразии M.

(a) Группа G действует *полурегулярно*, если все ее орбиты $\mathcal{O}$ имеют одну и ту же размерность как подмногообразия многообразия M.

(b) Группа G действует *регулярно*, если она действует полурегулярно и, кроме того, для каждой точки $x \in M$ существуют произвольно малые окрестности U точки x, обладающие тем свойством, что каждая орбита группы G пересекает U по линейно связному подмножеству.

Заметим, что, в частности, если группа G действует на многообразии M регулярно, то каждая ее орбита — регулярное подмногообразие многообразия M. Однако условие регулярности действия группы гораздо сильнее, чем это последнее утверждение, — упр. 1.8 подтвердит это. Действие группы называется *транзитивным*, если у нее имеется всего лишь одна орбита, а именно само многообразие M. Ясно, что всякая транзитивиая группа преобразований действует регулярно. В большинстве наших приложений наиболее интересные группы будут действовать *не* транзитивно.

Пример 1.27. *Примеры групп преобразований.*

(a) Группа *сдвигов* в $\mathbb{R}^m$. Пусть $a \neq 0$ — фиксированный вектор в $\mathbb{R}^m$, и пусть $G = \mathbb{R}$. Положим

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon a, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Это, как легко видеть, дает глобальное действие группы. Орбитами являются прямые, параллельные вектору a, так что действие регулярно и орбиты одномерны.

(b) Группы *растяжений* (*масштабных преобразований*). Пусть $G = \mathbb{R}^+$ — мультипликативная группа. Фиксируем вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю. Тогда $\mathbb{R}^+$ действует на $\mathbb{R}^m$ масштабными преобразованиями (или растяжениями)

$$\Psi(\lambda, x) = (\lambda^{\alpha_1} x^1, \ldots, \lambda^{\alpha_m} x^m), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m.$$

Орбиты этого действия все являются одномерными регулярными подмногообразиями в $\mathbb{R}^m$, исключая особую орбиту, состоящую в точности из начала координат $\{0\}$. Например, в частном случае $\mathbb{R}^2$ при $\Psi(\lambda, (x, y)) = (\lambda x, \lambda^2 y)$ орбитами являются половины парабол $y = kx^2$ (соответствующие либо $x > 0$, либо $x < 0$), положительная и отрицательная полуоси оси y и начало координат. Вообще говоря, действие этой группы растяжений регулярно на открытом подмножестве $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Эти действия групп появляются в теории размерностей для уравнений с частными производными. Исторически они представляли собой главную движущую силу в последующем развитии общей теории инвариантных относительно группы решений дифференциальных уравнений.

(c) Действие, аналогичное этому, появляется при изучении уравнения теплопроводности. Пусть $M = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right),$$

определенное на

$$\mathcal{U} = \left\{(\varepsilon, (x, y)) \colon \varepsilon < \frac{1}{x} \text{ при } x > 0 \text{ или } \varepsilon > \frac{1}{x} \text{ при } x < 0\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Чтобы показать, что это на самом деле действие группы, нам нужно проверить условие (a) определения 1.25:

$$\begin{aligned}\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, (x, y))) &= \Psi\left(\delta, \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right)\right) = \\ &= \left(\frac{x/(1-\varepsilon x)}{1-\delta x/(1-\varepsilon x)}, \frac{y/(1-\varepsilon x)}{1-\delta x/(1-\varepsilon x)}\right) = \\ &= \left(\frac{x}{1-(\delta+\varepsilon)x}, \frac{y}{1-(\delta+\varepsilon)x}\right) = \\ &= \Psi(\delta+\varepsilon, (x, y))\end{aligned}$$

в области определения. Заметим, что это локальное действие группы не имеет глобального аналога на $\mathbb{R}^2$; в самом деле, $|\Psi(\varepsilon, (x, y))| \to \infty$ при $\varepsilon \to 1/x$ для $x \neq 0$. Орбиты этого действия состоят из прямолинейных лучей, исходящих из начала координат, а также самого начала координат. Действие является регулярным на плоскости с выколотой точкой $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(d) *Обмотка тора.* Пусть $G = \mathbb{R}$ и M — двумерный тор T^2. Пусть ω — фиксированное вещественное число. Пользуясь угловыми координатами (θ, ρ) на T^2, мы определяем глобальное действие группы

$$\Psi(\varepsilon, (\theta, \rho)) = (\theta + \varepsilon, \rho + \omega\varepsilon) \bmod 2\pi.$$

Как легко видеть, орбиты группы G — все одномерные подмногообразия тора T^2, так что группа G во всех случаях действует полурегулярно. Если ω — рациональное число, орбиты — замкнутые кривые и действие регулярно. С другой стороны, если ω иррационально, то каждая орбита — всюду плотное подмногообразие тора T^2. Это простейший пример полурегулярного действия группы, не являющегося регулярным.