1.3. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Главный инструмент в теории групп Ли и групп преобразований — это «инфинитезимальное преобразование». Для того чтобы ввести его, нам нужно сначала развить понятие векторного поля на многообразии. Мы начинаем с обсуждения касательных векторов. Пусть C — гладкая кривая на многообразии M, параметризованная отображением $\varphi\colon I \to M$, где I — подынтервал $\mathbb{R}$. В локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^m)$ кривая C задается m гладкими функциями $\varphi(\varepsilon) = (\varphi^1(\varepsilon), \ldots, \varphi^m(\varepsilon))$ вещественной переменной ε. В каждой точке $x = \varphi(\varepsilon)$ кривой C имеется *касательный вектор*, а именно производная $\dot{\varphi}(\varepsilon) = d\varphi/d\varepsilon = (\dot{\varphi}^1(\varepsilon), \ldots, \dot{\varphi}^m(\varepsilon))$. Для того чтобы различать выражения для касательных векторов и для локальных координат точек на многообразии, мы принимаем обозначение

$$\mathbf{v}|_x = \dot{\varphi}(\varepsilon) = \dot{\varphi}^1(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \dot{\varphi}^m(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x^m} \tag{1.4}$$

для касательного вектора к кривой C в точке $x = \varphi(\varepsilon)$. На первый взгляд это обозначение может показаться довольно странным, но на протяжении книги мы убедимся в том, что оно полезно и естественно. Сейчас читатель может рассматривать символы $\partial/\partial x^i$ как «держатели мест» для компонент $\dot{\varphi}^i(\varepsilon)$ касательного вектора $\mathbf{v}|_x$ или, что равносильно, как специальный «базис» касательных векторов, соответствующих координатным кривым, которые в локальных координатах выражаются в виде $x + \varepsilon e_i$, где e_i есть i-й базисный вектор в $\mathbb{R}^m$. Позже мы увидим, каким образом каждый вектор $\partial/\partial x^i$ на самом деле соответствует оператору взятия частной производной.

Например, для винтовой линии

$$\varphi(\varepsilon) = (\cos\varepsilon,\ \sin\varepsilon,\ \varepsilon)$$

в $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z) касательный вектор в точке $(x, y, z) = \varphi(\varepsilon) = (\cos\varepsilon, \sin\varepsilon, \varepsilon)$ имеет вид

$$\dot{\varphi}(\varepsilon) = -\sin\varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varepsilon\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Две кривые $C = \{\varphi(\varepsilon)\}$ и $\tilde{C} = \{\tilde{\varphi}(\theta)\}$, проходящие через одну и ту же точку

$$x = \varphi(\varepsilon^*) = \tilde{\varphi}(\theta^*)$$

для некоторых ε^*, θ^*, имеют в ней один и тот же касательный вектор, если и только если их производные в этой точке совпадают:

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon}(\varepsilon^*) = \frac{d\tilde{\varphi}}{d\theta}(\theta^*). \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что это понятие не зависит от локальных координат, выбранных вблизи точки x. В самом деле, если $x = \varphi(\varepsilon) = (\varphi^1(\varepsilon), \ldots, \varphi^m(\varepsilon))$ — выражение в локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и $y = \psi(x)$ — произвольный диффеоморфизм, то $y = \psi(\varphi(\varepsilon))$ — формула для этой кривой в локальных координатах y. Касательный вектор $\mathbf{v}|_x = \dot\varphi(\varepsilon)$, имеющий вид (1.4) в координатах x, примет вид

$$\mathbf{v}|_{y=\psi(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{d}{d\varepsilon}\psi^j(\varphi(\varepsilon))\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\psi^j}{\partial x^k}(\varphi(\varepsilon))\frac{d\varphi^k}{d\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y^j} \qquad (1.6)$$

в координатах y. Поскольку матрица Якоби $\partial\psi^j/\partial x^k$ обратима в каждой точке, (1.5) справедливо, если и только если

$$\frac{d}{d\varepsilon}\psi(\varphi(\varepsilon^*)) = \frac{d}{d\theta}\psi(\tilde\varphi(\theta^*)),$$

что и доказывает наше утверждение. Заметим, что (1.6) указывает, как ведет себя касательный вектор (1.4) при данной замене координат $y = \psi(x)$.

Набор всех касательных векторов ко всем возможным кривым, проходящим через данную точку x многообразия M, называется *касательным пространством* к M в точке x и обозначается $TM|_x$. Если M есть m-мерное многообразие, то $TM|_x$ является m-мерным векторным пространством, базис которого в данных локальных координатах задается векторами $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^m\}$. Набор всех касательных пространств, отвечающих всем точкам x многообразия M, называется *касательным расслоением* многообразия M и обозначается

$$TM = \bigcup_{x\in M} TM|_x.$$

Эти касательные пространства «склеены» между собой очевидным гладким способом, так что если $\varphi(\varepsilon)$ — произвольная гладкая кривая, то касательные векторы $\dot\varphi(\varepsilon) \in TM|_{\varphi(\varepsilon)}$ будут гладко меняться от точки к точке. Это превращает касательное расслоение TM в гладкое многообразие размерности $2m$.

Например, если $M = \mathbb{R}^m$, то касательное пространство $T\mathbb{R}^m|_x$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^m$ можно отождествить с самим $\mathbb{R}^m$. Это следует из того факта, что касательный вектор $\dot\varphi(\varepsilon)$ к гладкой кривой $\varphi(\varepsilon)$ можно реализовать как настоящий вектор в $\mathbb{R}^m$, а именно $(\dot\varphi^1(\varepsilon), \ldots, \dot\varphi^m(\varepsilon))$. Другой способ получить это отождествление состоит в том, чтобы отождествить базисный вектор $\partial/\partial x^i$ пространства $T\mathbb{R}^m|_x$ со стандартным базисным вектором e_i пространства $\mathbb{R}^m$. Таким образом, касательное расслоение пространства $\mathbb{R}^m$ является декартовым произведением:

$T\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Если S — поверхность в $\mathbb{R}^3$, то касательное пространство $TS|_x$ можно отождествить с обычной геометрической касательной плоскостью к S в каждой точке $x \in S$. Здесь снова используется отождествление $T\mathbb{R}^3|_x \simeq \mathbb{R}^3$, так что $TS|_x \subset \subset T\mathbb{R}^3|_x$ — плоскость в $\mathbb{R}^3$.

Векторное поле $\mathbf{v}$ на M задается касательными векторами $\mathbf{v}|_x \in TM|_x$ в каждой точке $x \in M$, такими, что $\mathbf{v}|_x$ гладко меняется от точки к точке. В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^m)$ векторное поле имеет вид

$$\mathbf{v}|_x = \xi^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2(x)\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + \xi^m(x)\frac{\partial}{\partial x^m},$$

где каждая $\xi^i(x)$ — гладкая функция от x. (Мы должны были бы поставить символ $|_x$ у каждого $\partial/\partial x^i$, чтобы указать, в каком

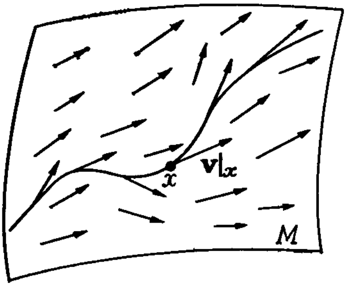

Рис. 4. Векторное поле и интегральная кривая на многообразии.

касательном пространстве $TM|_x$ лежит этот вектор, однако это должно быть ясно из контекста.) Хороший физический пример векторного поля — поле скоростей потока несжимаемой жидкости в некотором открытом подмножестве $M \subset \mathbb{R}^3$. В каждой точке $(x, y, z) \in M$ вектор $\mathbf{v}|_{(x,y,z)}$ — это вектор скорости частиц жидкости, проходящих через точку (x, y, z).

Интегральная кривая векторного поля $\mathbf{v}$ — это гладкая параметризованная кривая $x = \varphi(\varepsilon)$, касательный вектор к которой в каждой точке совпадает со значением векторного поля $\mathbf{v}$ в этой точке:

$$\dot{\varphi}(\varepsilon) = \mathbf{v}|_{\varphi(\varepsilon)}$$

для всех ε. В локальных координатах $x = \varphi(\varepsilon) = (\varphi^1(\varepsilon), \ldots \ldots, \varphi^m(\varepsilon))$ должна быть решением автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.7}$$

где $\xi^i(x)$ — коэффициенты векторного поля $\mathbf{v}$ в точке x. Для гладких $\xi^i(x)$ стандартные теоремы существования и единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют существование и единственность решения системы (1.7) для любого множества начальных данных

$$\varphi(0) = x_0. \tag{1.8}$$

Отсюда в свою очередь следует существование единственной *максимальной* интегральной кривой $\varphi\colon I \to M$, проходящей через данную точку $x_0 = \varphi(0) \in M$, где «максимальность» означает, что эта интегральная кривая не содержится ни в какой более длинной интегральной кривой, т. е. если $\tilde{\varphi}\colon \tilde{I} \to M$ — любая другая интегральная кривая с тем же начальным значением $\tilde{\varphi}(0) = x_0$, то $\tilde{I} \subset I$ и $\tilde{\varphi}(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$ для $\varepsilon \in \tilde{I}$. Заметим, что если $\mathbf{v}|_{x_0} = 0$, то интегральная кривая, проходящая через точку x_0, есть сама эта точка $\varphi(\varepsilon) \equiv x_0$ и эта интегральная кривая определена для всех ε.

Отметим, что если $\mathbf{v}$ — произвольное гладкое векторное поле на многообразии M и $f(x)$ — произвольная гладкая вещественнозначная функция, определенная при $x \in M$, то $f\cdot\mathbf{v}$ — снова гладкое векторное поле, причем $(f\cdot\mathbf{v})|_x = f(x)\mathbf{v}|_x$. В локальных координатах если $\mathbf{v} = \sum \xi^i(x)\partial/\partial x^i$, то $f\cdot\mathbf{v} = \sum f(x)\xi^i(x)\partial/\partial x^i$. Если функция f нигде не обращается в нуль, то интегральные кривые векторного поля $f\cdot\mathbf{v}$ совпадают с интегральными кривыми поля $\mathbf{v}$, однако параметризации будут разными. Например, интегральные кривые поля $2\mathbf{v}$ будут проходиться в два раза быстрее, чем интегральные кривые поля $\mathbf{v}$, но, тем не менее, это будут те же самые подмножества многообразия M.

Потоки

Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле. Обозначим параметризованную максимальную интегральную кривую, проходящую через точку x многообразия M, через $\Psi(\varepsilon, x)$ и назовем Ψ *потоком*, порожденным полем $\mathbf{v}$. Таким образом, для каждого $x \in M$ и ε из некоторого интервала I_x, содержащего 0, $\Psi(\varepsilon, x)$ — это точка на интегральной кривой, проходящей через точку x на M. Поток векторного поля обладает следующими основными свойствами:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \quad x \in M, \tag{1.9}$$

для всех $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, таких, что обе части равенства имеют смысл,

$$\Psi(0, x) = x \tag{1.10}$$

и

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon, x) = \mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon, x)} \tag{1.11}$$

для всех ε из области определения. Здесь формула (1.11) просто означает, что $\mathbf{v}$ — касательный вектор к кривой $\Psi(\varepsilon, x)$ при фиксированном x, а (1.10) дает начальные условия для этой интегральной кривой. Доказательство формулы (1.9) легко следует из единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений; а именно, поскольку как функции от δ обе части уравнения (1.9) удовлетворяют (1.7) и имеют те же начальные условия при $\delta = 0$, они обязаны совпадать. Если $\mathbf{v}$ — векторное поле скоростей некоторого потока несжимаемой жидкости, то интегральные кривые поля $\mathbf{v}$ — это линии тока, заметаемые частицами жидкости, а поток $\Psi(\varepsilon, x)$ указывает положение частицы в момент времени ε, если в момент времени $\varepsilon = 0$ она находилась в точке x.

Сравнивая первые два свойства (1.9), (1.10) с (1.1), (1.2), мы видим, что поток, порожденный векторным полем, — то же самое, что локальное действие группы Ли $\mathbb{R}$ на многообразии M. Это действие часто называют *однопараметрической группой преобразований*. Векторное поле $\mathbf{v}$ называется *инфинитезимальной образующей* этого действия, поскольку по теореме Тейлора в локальных координатах

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^2),$$

где $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$ — коэффициенты поля $\mathbf{v}$. Орбиты действия однопараметрической группы являются максимальными интегральными кривыми векторного поля $\mathbf{v}$. Обратно, если $\Psi(\varepsilon, x)$ — произвольная однопараметрическая группа преобразований, действующая на многообразии M, то ее инфинитезимальная образующая получается как частный случай (1.11) при $\varepsilon = 0$:

$$\mathbf{v}|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x). \tag{1.12}$$

Единственность решения системы (1.7), (1.8) гарантирует, что поток, порожденный полем $\mathbf{v}$, совпадает с данным локальным действием $\mathbb{R}$ на M в общей области определения. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между локальными однопараметрическими группами преобразований и их инфинитезимальными образующими.

Вычисление потока или однопараметрической группы, порожденной данным векторным полем $\mathbf{v}$ (иными словами, решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений), часто называют *экспоненцированием* этого векторного поля. В нашей книге будет принято соответствующее обозначение

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})\, x \equiv \Psi(\varepsilon, x)$$

для этого потока. С помощью этого экспоненциального обозначения три предыдущих свойства можно переформулировать следующим образом:

$$\exp[(\delta+\varepsilon)\mathbf{v}]\,x = \exp(\delta\mathbf{v})\exp(\varepsilon\mathbf{v})\,x \tag{1.13}$$

в области определения,

$$\exp(0\mathbf{v})\,x = x \tag{1.14}$$

и

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})\,x] = \mathbf{v}\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x} \tag{1.15}$$

для всех $x \in M$. (В частности, $\mathbf{v}|_x$ получается вычислением (1.15) при $\varepsilon = 0$.) Эти свойства отражают свойства обычной экспоненты, что и оправдывает выбранное обозначение.

Пример 1.28. *Примеры векторных полей и потоков.*

(a) Пусть $M = \mathbb{R}$ с координатой x. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{v} = \partial/\partial x \equiv \partial_x$. (В дальнейшем мы часто будем для экономии места употреблять обозначение ∂_x вместо $\partial/\partial x$.) Тогда глобально определена

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})\,x = \exp(\varepsilon\partial_x)\,x = x + \varepsilon.$$

Для векторного поля $x\partial_x$ мы получаем обычную экспоненту

$$\exp(\varepsilon x\partial_x)\,x = e^{\varepsilon}x,$$

поскольку это должно быть решение обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = x$ с начальным значением x при $\varepsilon = 0$.

(b) В случае $\mathbb{R}^m$ постоянное векторное поле $\mathbf{v}_a = \sum a^i\partial/\partial x^i$, $a = (a^1, \ldots, a^m)$, экспоненцируется в группу сдвигов в направлении a:

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v}_a)\,x = x + \varepsilon a, \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Аналогично, линейное векторное поле

$$\mathbf{v}_A = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x^j\right)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $A = (a_{ij})$ — постоянная матрица размера $m \times m$, порождает поток

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v}_A)\,x = e^{\varepsilon A}x,$$

где

$$e^{\varepsilon A} = I + \varepsilon A + \frac{1}{2}\varepsilon^2A^2 + \ldots$$

— обычная экспонента матрицы.

(с) Рассмотрим группу вращений плоскости

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon,\ x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon).$$

Ее инфинитезимальная образующая — векторное поле $\mathbf{v} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$, где, согласно (1.12),

$$\xi(x, y) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}(x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon) = -y,$$

$$\eta(x, y) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}(x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon) = x.$$

Таким образом, $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ — инфинитезимальная образующая, и на самом деле указанная группа преобразований совпадает с решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/d\varepsilon = -y, \quad dy/d\varepsilon = x.$$

(d) Наконец, рассмотрим действие локальной группы

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right),$$

введенное в примере 1.27(с). Дифференцируя, как выше, мы получаем инфинитезимальную образующую $\mathbf{v} = x^2\partial_x + xy\partial_y$. Это показывает, что гладкое векторное поле может, тем не менее, порождать всего лишь локальное действие группы.

Действие замены координат $y = \psi(x)$ на векторное поле $\mathbf{v}$ определяется ее действием на каждый отдельный касательный вектор $\mathbf{v}|_x$, $x \in M$, которое задается формулой (1.6). Поэтому если $\mathbf{v}$ — векторное поле, которое в координатах x задается выражением

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

а $y = \psi(x)$ — замена координат, то поле $\mathbf{v}$ в координатах y выражается формулой

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \xi^i(\psi^{-1}(y))\frac{\partial\psi^j}{\partial x^i}(\psi^{-1}(y))\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{1.16}$$

Следующий результат служит иллюстрацией наших предыдущих замечаний о том, что подходящий выбор локальных координат часто позволяет упростить выражения для объектов на многообразиях, в этом случае для векторных полей.

Предложение 1.29. *Пусть* $\mathbf{v}$ — *векторное поле, не обращающееся в нуль в точке* $x_0 \in M$, $\mathbf{v}|_{x_0} \neq 0$. *Тогда существует локальная координатная карта* $y = (y^1, \ldots, y^m)$ *в точке* x_0, *такая, что в этих координатах* $\mathbf{v} = \partial/\partial y^1$.

Доказательство. Сделаем сначала линейную замену координат, при которой $x_0 = 0$ и $\mathbf{v}|_{x_0} = \partial/\partial x^1$. По непрерывности коэффициент $\xi^1(x)$ при $\partial/\partial x^1$ положителен в окрестности точки x_0. Поскольку $\xi^1(x) > 0$, интегральные кривые поля $\mathbf{v}$ пересекают гиперплоскость $\{(0, x^2, \ldots, x^m)\}$ трансверсально. Следовательно, в окрестности точки $x_0 = 0$ каждая точка $x = (x^1, \ldots, x^m)$ единственным образом представляется как поток некоторой точки $(0, y^2, \ldots, y^m)$ из этой гиперплоскости. Это означает, что

$$x = \exp(y^1 \mathbf{v})(0, y^2, \ldots, y^m)$$

для y^1, близких к 0, дает диффеоморфизм между $(x^1, \ldots, x^m)$ и $(y^1, \ldots, y^m)$, определяющий координаты y. (Геометрически, мы «выпрямляем» интегральные кривые, проходящие через гиперплоскость, перпендикулярную оси x^1.) В координатах y для малых ε мы имеем в силу (1.13)

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v})(y^1, \ldots, y^m) = (y^1 + \varepsilon, y^2, \ldots, y^m),$$

так что поток является в точности сдвигом в направлении y^1. Таким образом, всякое ненулевое векторное поле локально эквивалентно инфинитезимальной образующей группы сдвигов. (Конечно, глобальная картина может быть очень сложна, как показывает пример обмотки тора.) □

Действие на функции

Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле на M и $f\colon M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Мы хотим посмотреть, как меняется f под действием потока, порожденного полем $\mathbf{v}$; иными словами, мы рассматриваем $f(\exp(\varepsilon \mathbf{v}) x)$, когда ε меняется. В локальных координатах, если $\mathbf{v} = \sum \xi^i(x) \partial/\partial x^i$, пользуясь цепным правилом и (1.15), мы получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(\exp(\varepsilon \mathbf{v}) x) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(\exp(\varepsilon \mathbf{v}) x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\exp(\varepsilon \mathbf{v}) x) = \mathbf{v}(f)[\exp(\varepsilon \mathbf{v}) x]. \tag{1.17}$$

В частности, при $\varepsilon = 0$

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f(\exp(\varepsilon \mathbf{v}) x) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \mathbf{v}(f)(x).$$

Теперь становится очевидной причина, по которой мы так обозначаем векторные поля: векторное поле $\mathbf{v}$ действует на вещественнозначные функции $f(x)$ на многообразии M как оператор взятия частных производных первого порядка. Далее, по теореме Тейлора

$$f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = f(x) + \varepsilon\mathbf{v}(f)(x) + O(\varepsilon^2),$$

так что $\mathbf{v}(f)$ дает *инфинитезимальное изменение* функции f под действием потока, порожденного полем $\mathbf{v}$. Можно продолжить процесс дифференцирования и, подставляя в ряд Тейлора, получить

$$f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) =$$
$$= f(x) + \varepsilon\mathbf{v}(f)(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mathbf{v}^2(f)(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^k}{k!}\mathbf{v}^k(f)(x) + O(\varepsilon^{k+1}),$$

где $\mathbf{v}^2(f) = \mathbf{v}(\mathbf{v}(f))$, $\mathbf{v}^3(f) = \mathbf{v}(\mathbf{v}^2(f))$ и т. д. Предполагая сходимость ряда Тейлора по ε, мы получаем *ряд Ли*

$$f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}\mathbf{v}^k(f)(x) \tag{1.18}$$

для действия потока на f. Такой же результат справедлив для векторнозначных функций $F\colon M \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (F^1(x), \ldots, F^n(x))$ (мы предполагаем, что поле $\mathbf{v}$ действует на F покомпонентно: $\mathbf{v}(F) = (\mathbf{v}(F^1), \ldots, \mathbf{v}(F^n))$). В частности, если положить F равной координатным функциям x, мы получаем (снова в предположении сходимости), что ряд Ли для самого потока дается формулой

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x = x + \varepsilon\xi(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mathbf{v}(\xi)(x) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}\mathbf{v}^k(x), \tag{1.19}$$

где $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$, $\mathbf{v}(\xi) = (\mathbf{v}(\xi^1), \ldots, \mathbf{v}(\xi^m))$ и т. д., что дает дальнейшее обоснование нашего обозначения.

В соответствии с нашей новой интерпретацией символов $\partial/\partial x^i$ каждый касательный вектор $\mathbf{v}|_x$ в точке x определяет *дифференцирование* на пространстве гладких вещественнозначных функций f, определенных вблизи точки x многообразия M. Это означает, что применение $\mathbf{v}|_x$ к гладкой функции f дает вещественное число $\mathbf{v}(f) = \mathbf{v}(f)(x)$ и, кроме того, эта операция, определенная полем $\mathbf{v}$, обладает основными свойствами операции дифференцирования:

(a) *линейность*

$$\mathbf{v}(f+g)=\mathbf{v}(f)+\mathbf{v}(g); \tag{1.20}$$

(b) *правило Лейбница*

$$\mathbf{v}(f\cdot g)=\mathbf{v}(f)\cdot g+f\cdot\mathbf{v}(g). \tag{1.21}$$

(Здесь в обеих частях равенств (1.20) и (1.21) вычислены значения в точке x.) Обратно, нетрудно показать, что всякое дифференцирование на пространстве гладких функций в точке x является касательным вектором и, в частности, в локальных координатах дается формулой $\sum \xi^i \partial/\partial x^i$. (См. упр. 1.12.) Этот подход часто используется для *определения* касательных векторов и касательного расслоения абстрактным бескоординатным способом. Далее, если $\mathbf{v}$ — векторное поле на M, то $\mathbf{v}(f)$ — гладкая функция для любой гладкой функции f: $M\to\mathbb{R}$. Таким образом, мы можем также определить векторные поля как дифференцирования, т. е. отображения на пространстве гладких функций на M, обладающие свойствами (1.20) и (1.21). Эта точка зрения особенно полезна для определения различных операций над векторными полями бескоординатным способом. (См. Warner [1; гл. 1], где более подробно изложены эта конструкция и связь между касательными векторами и дифференцированиями.)

Дифференциалы

Пусть M и N — гладкие многообразия, а F: $M\to N$ — гладкое отображение. Всякая параметризованная кривая $C=\{\varphi(\varepsilon): \varepsilon\in I\}$ на M отображается посредством F в параметризованную кривую $\tilde{C}=F(C)=\{\tilde{\varphi}(\varepsilon)=F(\varphi(\varepsilon)): \varepsilon\in I\}$ на N. Таким образом, отображение F индуцирует отображение касательного вектора $d\varphi/d\varepsilon$ к кривой C в точке $x=\varphi(\varepsilon)$ в соответствующий касательный вектор $d\tilde{\varphi}/d\varepsilon$ к кривой $\tilde{C}$ в образе этой точки $F(x)=F(\varphi(\varepsilon))=\tilde{\varphi}(\varepsilon)$. Это индуцированное отображение называется *дифференциалом* отображения F и обозначается

$$dF(\dot{\varphi}(\varepsilon))=\frac{d}{d\varepsilon}\{F(\varphi(\varepsilon))\}. \tag{1.22}$$

Поскольку каждый касательный вектор $\mathbf{v}|_x\in TM|_x$ касается некоторой кривой, проходящей через точку x, дифференциал отображает касательное пространство к M в точке x в касательное пространство к N в точке $F(x)$:

$$dF\colon TM|_x\to TN|_{F(x)}.$$

Формула для дифференциала в локальных координатах получается с помощью цепного правила тем же способом, что и формула замены переменных (1.6). Если

$$\mathbf{v}|_x = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

— касательный вектор в точке $x \in M$, то

$$dF(\mathbf{v}|_x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x) \right) \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}(F^j(x)) \frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{1.23}$$

Заметим, что дифференциал $dF|_x$ является линейным отображением из $TM|_x$ в $TN|_{F(x)}$, выражение которого в матричном виде в локальных координатах есть в точности матрица Якоби отображения F в точке x.

Если мы предпочитаем представлять себе касательные векторы как дифференцирования на пространстве гладких функций, определенных вблизи точки x, то дифференциал dF можно определить по-другому:

$$dF(\mathbf{v}|_x) f(y) = \mathbf{v}(f \circ F)(x), \quad y = F(x), \tag{1.24}$$

для всех $\mathbf{v}|_x \in TM|_x$ и всех гладких функций $f\colon N \to \mathbb{R}$. Эквивалентность (1.22) и (1.24) легко проверяется с использованием локальных координат.

Пример 1.30. Пусть $M = \mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) и $N = \mathbb{R}$ с координатой s. Пусть $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — произвольное отображение $s = F(x, y)$. Для данного поля

$$\mathbf{v}|_{(x, y)} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

получаем по формуле (1.23)

$$dF(\mathbf{v}|_{(x, y)}) = \left\{ a \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\} \frac{d}{ds}\bigg|_{F(x, y)}.$$

Например, если $F(x, y) = \alpha x + \beta y$ — линейная проекция, то

$$dF(\mathbf{v}|_{(x, y)}) = (a\alpha + b\beta) \frac{d}{ds}\bigg|_{s = \alpha x + \beta y}.$$

Лемма 1.31. *Если $F\colon M \to N$ и $H\colon N \to P$ — гладкие отображения многообразий, то*

$$d(H \circ F) = dH \circ dF, \tag{1.25}$$

где $dF\colon TM|_x \to TN|_{y = F(x)}$, $dH\colon TN|_y \to TP|_{z = H(y)}$ и $d(H \circ F)\colon TM|_x \to TP|_{z = H(F(x))}$.

Доказательство непосредственно следует из двух предыдущих определений. В локальных координатах (1.25) означает в точности, что матрица Якоби композиции двух функций является произведением их матриц Якоби.

Важно отметить, что если $\mathbf{v}$ — векторное поле на M, то, вообще говоря, $dF(\mathbf{v})$ *не будет* корректно определенным векторным полем на N. Во-первых, $dF(\mathbf{v})$ может не быть определенным на всем N; во-вторых, если две точки x и $\tilde{x}$ на M отображаются в одну точку $y=F(x)=F(\tilde{x})$ на N, то нет гарантии, что $dF(\mathbf{v}|_x)$ и $dF(\mathbf{v}|_{\tilde{x}})$ (оба лежат в $TN|_y$) совпадают. Например, если $\mathbf{v}=y\partial_x+\partial_y$ и $s=F(x, y)=\alpha x+\beta y$ — проектирование из примера 1.30, то

$$dF\left(\mathbf{v}|_{(x, y)}\right)=(\alpha y+\beta)\frac{d}{ds}\bigg|_{s=\alpha x+\beta y}.$$

При $\alpha\neq 0$ это векторное поле не является корректно определенным на $\mathbb{R}$. Однако если F — диффеоморфизм на N, то $dF(\mathbf{v})$ всегда будет векторным полем на N. Более общим образом, два векторных поля $\mathbf{v}$ на M и $\mathbf{w}$ на N называются *F-связанными*, если $dF(\mathbf{v}|_x)=\mathbf{w}|_{F(x)}$ для всех $x\in M$. Если $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}=dF(\mathbf{v})$ являются F-связанными, то F отображает интегральные кривые поля $\mathbf{v}$ в интегральные кривые поля $\mathbf{w}$, причем

$$F(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x)=\exp(\varepsilon\, dF(\mathbf{v}))F(x). \tag{1.26}$$

Скобки Ли

Наиболее важная операция над векторными полями — это их скобка Ли, или коммутатор. Легче всего эту операцию определить в терминах их действия как дифференцирований функций. А именно, если $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — векторные поля на M, то их *скобка Ли* $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ — единственное векторное поле, удовлетворяющее условию

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f)=\mathbf{v}(\mathbf{w}(f))-\mathbf{w}(\mathbf{v}(f)) \tag{1.27}$$

для всех гладких функций $f\colon M\to\mathbb{R}$. Легко проверить, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ на самом деле является векторным полем. В локальных координатах, если

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{m}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad \mathbf{w}=\sum_{i=1}^{m}\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

то

$$[\mathbf{v},\ \mathbf{w}] = \sum_{i=1}^{m} \{\mathbf{v}(\eta^i) - \mathbf{w}(\xi^i)\} \frac{\partial}{\partial x^i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left\{ \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right\} \frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (1.28)$$

(Заметим, что в (1.27) сокращаются члены, содержащие производные второго порядка функции f.) Например, если

$$\mathbf{v} = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{w} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y},$$

то

$$[\mathbf{v},\ \mathbf{w}] = \mathbf{v}(x^2) \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{v}(xy) \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{w}(y) \frac{\partial}{\partial x} = xy \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Предложение 1.32. *Скобка Ли обладает следующими свойствами:*

(а) Билинейность

$$\begin{aligned} [c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}',\ \mathbf{w}] &= c[\mathbf{v},\ \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}',\ \mathbf{w}], \\ [\mathbf{v},\ c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] &= c[\mathbf{v},\ \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v},\ \mathbf{w}'], \end{aligned} \qquad (1.29)$$

где c, c' — константы.

(b) Кососимметричность

$$[\mathbf{v},\ \mathbf{w}] = -[\mathbf{w},\ \mathbf{v}]. \qquad (1.30)$$

(с) Тождество Якоби

$$[\mathbf{u},\ [\mathbf{v},\ \mathbf{w}]] + [\mathbf{w},\ [\mathbf{u},\ \mathbf{v}]] + [\mathbf{v},\ [\mathbf{w},\ \mathbf{u}]] = 0. \qquad (1.31)$$

Доказательство мы оставляем читателю. (*Указание.* Воспользуйтесь формулой (1.27) как определением — попытки проверить тождество Якоби с помощью формулы (1.28) — ужасное дело.)

Первое определение (1.27) скобки Ли говорит нам, что это инвариантное понятие. (Это можно проверить также, пользуясь выражением скобки Ли в локальных координатах (1.28), но соответствующие вычисления довольно утомительны.) Более общо, если F: $M \to N$ — произвольное гладкое отображение, а $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — векторные поля на M, такие, что $dF(\mathbf{v})$ и $dF(\mathbf{w})$ суть F-связанные корректно определенные векторные поля на N, то их скобки Ли также F-связаны:

$$dF([\mathbf{v},\ \mathbf{w}]) = [dF(\mathbf{v}),\ dF(\mathbf{w})]. \qquad (1.32)$$

Чтобы доказать это, возьмем $f\colon N \to \mathbb{R}$. Если $y = F(x) \in N$, то в силу (1.24) получаем

$$\begin{aligned} dF([\mathbf{v}, \mathbf{w}]) f(y) = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]\{f(F(x))\} = \mathbf{v}(\mathbf{w}\{f(F(x))\}) - \\ - \mathbf{w}(\mathbf{v}\{f(F(x))\}) = \\ = \mathbf{v}\{dF(\mathbf{w}) f(F(x))\} - \mathbf{w}\{dF(\mathbf{v}) f(F(x))\} = \\ = dF(\mathbf{v})\, dF(\mathbf{w}) f(y) - dF(\mathbf{w})\, dF(\mathbf{v}) f(y) = \\ = [dF(\mathbf{v}), dF(\mathbf{w})] f(y), \end{aligned}$$

что и требовалось.

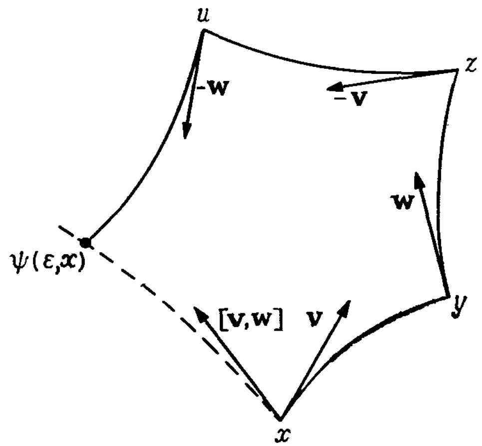

Рис. 5. Коммутаторное построение скобки Ли.

Более геометрическая характеризация скобки Ли двух векторных полей — это интерпретация ее как «инфинитезимального коммутатора» двух однопараметрических групп $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ и $\exp(\varepsilon\mathbf{w})$.

Теорема 1.33. *Пусть* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{w}$ — *гладкие векторные поля на многообразии* M. *Для каждого* $x \in M$ *коммутатор*

$$\psi(\varepsilon, x) = \exp(-\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{w}) \exp(-\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{v}) \exp(\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{w}) \exp(\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{v})\, x$$

определяет гладкую кривую для достаточно малых $\varepsilon \geqslant 0$. *Скобка Ли* $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_x$ *является касательным вектором к этой кривой в точке* $\psi(0, x) = x$:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0+} \psi(\varepsilon, x). \qquad (1.33)$$

Доказательство. Пусть $x=(x^1, \ldots, x^m)$ — локальные координаты, так что

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{m}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{w}=\sum_{i=1}^{m}\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Положим $y=\exp(\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{v})\,x$, $z=\exp(\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{w})\,y$, $u=\exp(-\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{v})\,z$, так что $\psi(\varepsilon, x)=\exp(-\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{w})\,u$. Теперь несколько раз воспользуемся разложениями (1.18), (1.19) в ряды Тейлора действия потока, порожденного векторным полем:

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon, x) &= u-\sqrt{\varepsilon}\,\eta(u)+\frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{w}(\eta)(u)+O(\varepsilon^{3/2})=\\ &= z-\sqrt{\varepsilon}\,\{\eta(z)+\xi(z)\}+\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\mathbf{w}(\eta)(z)+\mathbf{v}(\eta)(z)+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{2}\mathbf{v}(\xi)(z)\right\}+O(\varepsilon^{3/2})=\\ &= y-\sqrt{\varepsilon}\,\xi(y)+\varepsilon\left\{\mathbf{v}(\eta)(y)-\mathbf{w}(\xi)(y)+\frac{1}{2}\mathbf{v}(\xi)(y)\right\}+O(\varepsilon^{3/2})=\\ &= x+\varepsilon\{\mathbf{v}(\eta)(x)-\mathbf{w}(\xi)(x)\}+O(\varepsilon^{3/2}).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0+}\psi(\varepsilon, x)=\{\mathbf{v}(\eta)-\mathbf{w}(\xi)\}(x)$$

и формула (1.33) доказана. □

В качестве другой иллюстрации связи скобки Ли и коммутатора мы покажем, что потоки, порожденные двумя векторными полями, коммутируют, если и только если их скобка Ли всюду равна нулю.

Теорема 1.34. *Пусть* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *— векторные поля на* M. *Тогда*

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})\exp(\theta\mathbf{w})\,x=\exp(\theta\mathbf{w})\exp(\varepsilon\mathbf{v})\,x \tag{1.34}$$

для всех ε, $\theta\in\mathbb{R}$, $x\in M$, *таких, что определены обе части равенства, если и только если*

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]=0$$

всюду.

Доказательство. Из теоремы 1.33 непосредственно вытекает, что если потоки коммутируют, т. е. если справедливо равенство (1.34), то скобка Ли обращается в нуль. Обратно, предположим, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]=0$, и пусть $x\in M$. Если оба поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ обращаются в нуль в точке x, то потоки обоих векторных полей оставляют точку x на месте и, следовательно, они, очевидно, коммутируют в точке x. Если же хотя бы одно векторное поле не обращается в нуль в точке x, скажем $\mathbf{v}|_x \neq 0$, то в силу предложения 1.29 мы можем выбрать локальные координаты $y=(y^1, \ldots, y^m)$ вблизи точки x, так что в этих координатах $\mathbf{v}=\partial/\partial y^1$ всюду. Тогда если $\mathbf{w}=\sum \eta^i(y)\,\partial/\partial y^i$, то

$$0=[\mathbf{v}, \mathbf{w}]=\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \eta^i}{\partial y^1} \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Поэтому каждая функция η^i не зависит от y^1. Поток, порожденный полем $\mathbf{v}$, в этих координатах есть в точности

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})(y^1, \ldots, y^m)=(y^1+\varepsilon, y^2, \ldots, y^m).$$

Поток, порожденный полем $\mathbf{w}$, — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy^i}{d\theta}=\eta^i(y^2, \ldots, y^m), \quad i=1, \ldots, m.$$

Рассмотрим функции

$$y(\theta, \varepsilon)=\exp(\theta\mathbf{w})\exp(\varepsilon\mathbf{v})\,y=\exp(\theta\mathbf{w})(y^1+\varepsilon, y^2, \ldots, y^m)$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{y}(\theta, \varepsilon)&=\exp(\varepsilon\mathbf{v})\exp(\theta\mathbf{w})\,y=\exp(\varepsilon\mathbf{v})\,y(\theta, 0)=\\&=(y^1(\theta, 0)+\varepsilon, y^2(\theta, 0), \ldots, y^m(\theta, 0)).\end{aligned}$$

Поскольку y^1 отсутствует в правой части дифференциальных уравнений для потока поля $\mathbf{w}$, обе функции y и $\tilde{y}$ как функции от θ являются решениями этой системы, причем их начальные условия совпадают:

$$y(0, \varepsilon)=(y^1+\varepsilon, y^2, \ldots, y^m)=\tilde{y}(0, \varepsilon).$$

В силу единственности $y(\theta, \varepsilon)=\tilde{y}(\theta, \varepsilon)$, что доказывает формулу (1.34) для достаточно малых θ, ε.

Чтобы полностью доказать формулу (1.34), рассмотрим следующие два подмножества плоскости (θ, ε):

$$V=\{(\theta, \varepsilon)\colon \text{обе части (1.34) определены в точке } (\theta, \varepsilon)\}$$

и

$$U=\{(\theta, \varepsilon)\colon \text{обе части (1.34) определены и равны в точке } (\theta, \varepsilon)\}.$$

Заметим, что $U\subset V$ и что V — связное подмножество плоскости (θ, ε). Только что мы показали, что множество U открыто. С другой стороны, по непрерывности, если (1.34) справедливо в точках $(\theta_i, \varepsilon_i)\in U$ и $(\theta_i, \varepsilon_i)\to(\theta^*, \varepsilon^*)\in V$, то (1.34) справедливо и в точке $(\theta^*, \varepsilon^*)$. Таким образом, множество U является одновременно и открытым, и замкнутым подмножеством множества V. Поэтому в силу связности $U=V$. □

Касательные пространства и векторные поля на подмногообразиях

Пусть $N\subset M$ — подмногообразие многообразия M, параметризованное иммерсией φ: $\tilde{N}\to M$. Касательное пространство к N в $y\in N$ — это по определению образ касательного пространства к $\tilde{N}$ в соответствующей точке $\tilde{y}$:

$$TN|_y = d\varphi(T\tilde{N}|_{\tilde{y}}), \quad y=\varphi(\tilde{y})\in N.$$

Заметим, что $TN|_y$ является подпространством в $TM|_y$ той же размерности, что и N. Имеется аналогичная характеризация касательного пространства к неявно определенному подмногообразию:

Предложение 1.35. *Пусть F: $M\to\mathbb{R}^n$, $n\leqslant m$, является отображением максимального ранга на $N=\{x: F(x)=0\}$, так что $N\subset M$ — неявно определенное регулярное $(m-n)$-мерное подмногообразие. Для заданной точки $y\in N$ касательное пространство к N в y совпадает с ядром дифференциала отображения F в y:*

$$TN|_y=\{\mathbf{v}\in TM|_y: dF(\mathbf{v})=0\}.$$

Доказательство. Если $\varphi(\varepsilon)$ параметризует гладкую кривую $C\subset N$, проходящую через $y=\varphi(\varepsilon_0)$, то $F(\varphi(\varepsilon))=0$ для всех ε. Дифференцируя по ε, мы видим, что

$$0=\frac{d}{d\varepsilon}F(\varphi(\varepsilon))=dF(\dot{\varphi}(\varepsilon)),$$

следовательно, касательный вектор $\dot{\varphi}$ к C лежит в ядре dF. Обратное вытекает из подсчета размерностей, если учесть тот факт, что ранг dF в y равен n. □

Пример 1.36. Рассмотрим сферу $S^2=\{x^2+y^2+z^2=1\}$ в $\mathbb{R}^3$. В каждой точке $p=(x, y, z)$ на этой сфере касательное пространство $TS^2|_p$ задано как ядро дифференциала определяющей функции $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-1$ в p. Таким образом,

$$TS^2|_{(x,y,z)}=\left\{a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}: 2ax+2by+2cz=0\right\}.$$

Отождествляя $T\mathbb{R}^3|_p$ с $\mathbb{R}^3$, так что $\mathbf{v}|_p=a\partial_x+b\partial_y+c\partial_z$ становится вектором (a, b, c), мы видим, что $TS^2|_p$ состоит из всех векторов $\mathbf{v}|_p$ из $\mathbb{R}^3$, которые ортогональны радиусу-вектору $p=(x, y, z)$. Таким образом, касательное пространство $TS^2|_p$ совпадает с обычной геометрической касательной плоскостью к S^2 в точке p. (Те же самые соображения обобщаются на случай любой неявно определенной поверхности $S=\{F(x, y, z)=0\}$ в $\mathbb{R}^3$, где dF соответствует нормальному вектору ∇F.)

Пусть N — подмногообразие в M. Если $\mathbf{v}$ — векторное поле на M, то оно ограничивается до векторного поля на N тогда и только тогда, когда оно всюду касается многообразия N, т. е. $\mathbf{v}|_y \in TN|_y$ для каждой точки $y \in N$. В этом случае, используя определение $TN|_y$, мы непосредственно устанавливаем существование соответствующего векторного поля $\tilde{\mathbf{v}}$ на параметризующем пространстве $\tilde{N}$, удовлетворяющего на N условию $d\varphi(\tilde{\mathbf{v}})=\mathbf{v}$.

Лемма 1.37. *Если* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{w}$ *всюду касаются подмногообразия* N, *то и* $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ *всюду касается этого многообразия.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathbf{v}}$ и $\tilde{\mathbf{w}}$ — соответствующие векторные поля на $\tilde{N}$. Тогда по (1.32)

$$d\varphi[\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}]=[d\varphi(\tilde{\mathbf{v}}), d\varphi(\tilde{\mathbf{w}})]=[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$$

в каждой точке многообразия N. Но это означает, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_y \in TN|_y=d\varphi(T\tilde{N}|_{\tilde{y}})$ для каждой точки $y \in N$. □

Например, в случае сферы S^2, так как $z\partial_x - x\partial_z$ и $z\partial_y - y\partial_z$ оба всюду касаются S^2, то $[z\partial_x - x\partial_z, z\partial_y - y\partial_z] = y\partial_x - x\partial_y$ также всюду касается S^2.

Теорема Фробениуса

Мы уже видели, что каждое векторное поле $\mathbf{v}$ на многообразии M определяет для любой точки многообразия M интегральную кривую, проходящую через эту точку и такую, что поле $\mathbf{v}$ всюду касается этой кривой. Теорема Фробениуса относится к более общей ситуации, когда система векторных полей определяет «интегральные подмногообразия», обладающие тем свойством, что каждое векторное поле касается этого подмногообразия в каждой точке.

Определение 1.38. Пусть $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ — векторные поля на гладком многообразии M. *Интегральное подмногообразие* полей $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ — это подмногообразие $N \subset M$, касательное пространство $TN|_y$ к которому для каждого $y \in N$ порождается векторами $\{\mathbf{v}_1|_y, \ldots, \mathbf{v}_r|_y\}$. Система векторных полей $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *интегрируема*, если через каждую точку $x_0 \in M$ проходит интегральное подмногообразие.

Заметим, что если N — интегральное подмногообразие системы $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, то размерность подпространства пространства $TM|_y$, порожденного векторами $\{\mathbf{v}_1|_y, \ldots, \mathbf{v}_r|_y\}$ (по определению это $TN|_y$), равна размерности подмногообразия N в каждой точке $y \in N$. Это *не* исключает возможности, что размерность подпространства пространства $TM|_x$, порожденного векторами $\{\mathbf{v}_1|_x, \ldots, \mathbf{v}_r|_x\}$, меняется, когда точка x движется по всему многообразию M; это лишь означает, что данное множество векторных полей может иметь интегральные подмногообразия различных размерностей.

Лемма 1.37 дает необходимые условия интегрируемости системы векторных полей. А именно, если N — интегральное подмногообразие, то каждое векторное поле из этой системы должно касаться N в каждой точке. Таким образом, скобка Ли любой пары векторных полей из этой системы должна снова касаться N и, следовательно, лежать в линейной оболочке этого множества векторных полей в каждой точке.

Определение 1.39. Система векторных полей $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ на многообразии M *находится в инволюции*, если существуют гладкие вещественнозначные функции $c_{ij}^k(x)$, $x \in M$, $i, j, k = 1, \ldots, r$, такие, что для любых $i, j = 1, \ldots, r$

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k \cdot \mathbf{v}_k.$$

Теорема Фробениуса, обобщенная Херманном на случай интегральных подмногообразий различных размерностей, утверждает, что это необходимое условие является также достаточным:

Теорема 1.40. *Пусть* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ — *гладкие векторные поля на многообразии* M. *Тогда система* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *интегрируема, если и только если она находится в инволюции.*

В случае, когда система порождается бесконечным числом векторных полей, эта теорема *неверна*; см. упр. 1.13. Однако при дополнительных ограничениях на систему имеется следующее полезное обобщение. Пусть $\mathscr{H}$ — система векторных полей, образующая векторное пространство. Скажем, что система $\mathscr{H}$

находится в инволюции, если $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in \mathscr{H}$ для любых $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathscr{H}$. В конечномерном случае в качестве $\mathscr{H}$ можно взять множество линейных комбинаций $\sum f_i(x)\mathbf{v}_i$ «базисных» векторных полей $\mathbf{v}_i$, где f_i — произвольные вещественнозначные гладкие функции на M (в этом случае система $\mathscr{H}$ называется *конечно порожденной*). Пусть $\mathscr{H}|_x$ — подпространство пространства $TM|_x$, порожденное векторами $\mathbf{v}|_x$ для всех $\mathbf{v} \in \mathscr{H}$. *Интегральное подмногообразие* системы $\mathscr{H}$ — это подмногообразие $N \subset M$, такое, что $TN|_y = \mathscr{H}|_y$ для всех $y \in N$. Мы говорим, что система $\mathscr{H}$ *инвариантна по рангу*, если для любого векторного поля $\mathbf{v} \in \mathscr{H}$ размерность подпространства $\mathscr{H}|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}$ вдоль потока, порожденного полем $\mathbf{v}$, есть константа, не зависящая от ε. (Она может, конечно, зависеть от начальной точки x.) Заметим, что, поскольку интегральная кривая $\exp(\varepsilon\mathbf{v})x$ поля $\mathbf{v}$, исходящая из точки x, должна содержаться в интегральном подмногообразии N, инвариантность по рангу, конечно, является необходимым условием для полной интегрируемости. Если система $\mathscr{H}$ конечно порождена или состоит из аналитических векторных полей на аналитическом многообразии, то условие инвариантности по рангу выполняется автоматически.

Теорема 1.41. *Пусть $\mathscr{H}$ — система векторных полей на многообразии M. Тогда она интегрируема, если и только если она находится в инволюции и инвариантна по рангу.*

По сути доказательство проводится непосредственным построением интегральных подмногообразий. Если $x \in N$, мы можем реализовать интегральное подмногообразие, проходящее через точку x, рассматривая последовательно интегральные кривые, начинающиеся в точке x:

$$N = \{\exp(\mathbf{v}_1)\exp(\mathbf{v}_2) \ldots \exp(\mathbf{v}_k)x\colon\ k \geqslant 1,\ \mathbf{v}_i \in \mathscr{H}\}.$$

Инвариантность по рангу будет означать, что $\mathscr{H}|_y$ при любом $y \in N$ имеет правильную размерность. Детали доказательства того, что N — подмногообразие, можно найти в работе Hermann [2]. Заимствуя терминологию из более обычной ситуации постоянного ранга, мы называем набор всех максимальных интегральных подмногообразий интегрируемой системы векторных полей *слоением* многообразия M; о самих интегральных подмногообразиях мы говорим также как о *слоях* этого слоения.

Пример 1.42. Рассмотрим векторные поля

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{w} = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

на $\mathbb{R}^3$. Легкое вычисление показывает, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$, так что по теореме Фробениуса система $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ интегрируема. Для данной точки (x, y, z) подпространство пространства $T\mathbb{R}^3|_{(x, y, z)}$, порожденное $\mathbf{v}|_{(x, y, z)}$ и $\mathbf{w}|_{(x, y, z)}$, является двумерным, исключая точки оси z $\{x = y = 0\}$ и окружности $\{x^2 + y^2 = 1; z = 0\}$, где оно одномерно. Нетрудно проверить, что и окружность, и ось z являются одномерными интегральными подмногообразиями системы $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Все другие интегральные подмногообразия — двумерные торы

$$\zeta(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-1/2}(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = c,$$

определенные при $c > 2$. В самом деле,

$$d\zeta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\zeta) = 0, \quad d\zeta(\mathbf{w}) = \mathbf{w}(\zeta) = 0$$

всюду, так что в силу предложения 1.35 оба поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ касаются каждого множества уровня функции ζ, где $\nabla\zeta \neq 0$. (См. § 2.1, где рассматривается некоторая общая техника построения интегральных подмногообразий.)

Интегрируемая система векторных полей $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ называется *полурегулярной*, если размерность подпространства пространства $TM|_x$, порожденного векторами $\{\mathbf{v}_1|_x, \ldots, \mathbf{v}_r|_x\}$, не меняется от точки к точке. В этом случае все интегральные подмногообразия имеют одну и ту же размерность. По аналогии с понятием регулярного действия группы мы говорим, что интегрируемая система векторных полей *регулярна*, если она полурегулярна и к тому же каждая точка x многообразия M обладает произвольно малой окрестностью U, такой, что каждое максимальное интегральное подмногообразие пересекает U по линейно связному подмножеству. Хотя полурегулярность является локальным свойством, которое можно вывести с помощью координат, регулярность зависит от глобальной структуры системы, и это свойство чрезвычайно трудно проверить без явного отыскания интегральных подмногообразий. Однако всякую полурегулярную систему можно сделать регулярной, ограничивая ее на подходящее малое открытое подмножество многообразия M. Например, система из примера 1.42 регулярна на открытом подмножестве $\mathbb{R}^3 \setminus (\{x = y = 0\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\})$, полученном удалением из $\mathbb{R}^3$ оси z и единичной окружности.

Для полурегулярных систем векторных полей теорема Фробениуса на самом деле дает средства «выпрямления» интегральных подмногообразий с помощью подходящего выбора локальных координат, так же как это делается для интегральных кривых одного векторного поля в предложении 1.29.

Теорема 1.34. *Пусть* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ — *интегрируемая система векторных полей, такая, что размерность линейной оболочки векторов* $\{\mathbf{v}_1|_x, \ldots, \mathbf{v}_r|_x\}$ *в* $TM|_x$ *постоянна и равна* s *независимо от* $x \in M$. *Тогда для каждой точки* $x_0 \in M$ *существуют плоские локальные координаты* $y = (y^1, \ldots, y^m)$ *вблизи точки* x_0, *такие, что интегральные подмногообразия пересекают данную координатную карту по «слоям»* $\{y : y^1 = c_1, \ldots, y^{m-s} = c_{m-s}\}$, *где* $c_1, \ldots, c_{m-s}$ — *произвольные постоянные. Если к тому же система регулярна, то координатную карту можно выбрать так, что каждое интегральное подмногообразие будет пересекать ее не больше чем по одному такому слою.*

Для системы примера 1.42 плоские локальные координаты вблизи любой точки (x_0, y_0, z_0), не лежащей на оси z и такой, что $z_0 \neq 0$, задаются формулами $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = \zeta(x, y, z)$. Касательное пространство к плоскости $\{\tilde{z} = \mathrm{const}\}$ порождается векторными полями

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x(x^2 + y^2 - z^2 - 1)}{2z(x^2 + y^2)} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{y(x^2 + y^2 - z^2 - 1)}{2z(x^2 + y^2)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Заметим, что обе системы $\{\partial/\partial \tilde{x}, \partial/\partial \tilde{y}\}$ и $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ порождают одно и то же подпространство пространства $T\mathbb{R}^3$ в каждой точке (x, y, z) при $z(x^2 + y^2) \neq 0$, так что на самом деле мы получаем локально «выпрямленный» тор из примера 1.42. Более интересное с физической точки зрения множество плоских локальных координат для системы $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ представляют собой тороидальные координаты (θ, ψ, η), которые задаются формулами

$$x = \frac{\operatorname{sh} \eta \cos \psi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta}, \quad y = \frac{\operatorname{sh} \eta \sin \psi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta}, \quad z = \frac{\sin \theta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta}.$$

Такие координаты возникают в теории разделения переменных для уравнения Лапласа, ср. Moon, Spencer [1]. Читатель может проверить, что поверхности уровня $\{\eta = c\}$ в точности представляют собой интегральные торы системы $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$; на самом деле при этой замене координат $\mathbf{v} = \partial_\psi$, $\mathbf{w} = -2\partial_\theta$!

1.4. АЛГЕБРЫ ЛИ

Если G — группа Ли, то существуют некоторые замечательные векторные поля на G, характеризующиеся своей инвариантностью (в смысле, который вскоре будет определен) относительно группового умножения. Как мы увидим, эти инвариант-