Теорема 1.34. *Пусть* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ — *интегрируемая система векторных полей, такая, что размерность линейной оболочки векторов* $\{\mathbf{v}_1|_x, \ldots, \mathbf{v}_r|_x\}$ *в* $TM|_x$ *постоянна и равна* s *независимо от* $x \in M$. *Тогда для каждой точки* $x_0 \in M$ *существуют плоские локальные координаты* $y = (y^1, \ldots, y^m)$ *вблизи точки* x_0, *такие, что интегральные подмногообразия пересекают данную координатную карту по «слоям»* $\{y : y^1 = c_1, \ldots, y^{m-s} = c_{m-s}\}$, *где* $c_1, \ldots, c_{m-s}$ — *произвольные постоянные. Если к тому же система регулярна, то координатную карту можно выбрать так, что каждое интегральное подмногообразие будет пересекать ее не больше чем по одному такому слою.*

Для системы примера 1.42 плоские локальные координаты вблизи любой точки (x_0, y_0, z_0), не лежащей на оси z и такой, что $z_0 \neq 0$, задаются формулами $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = \zeta(x, y, z)$. Касательное пространство к плоскости $\{\tilde{z} = \text{const}\}$ порождается векторными полями

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x(x^2 + y^2 - z^2 - 1)}{2z(x^2 + y^2)} \frac{\partial}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{y(x^2 + y^2 - z^2 - 1)}{2z(x^2 + y^2)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Заметим, что обе системы $\{\partial/\partial\tilde{x}, \partial/\partial\tilde{y}\}$ и $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ порождают одно и то же подпространство пространства $T\mathbb{R}^3$ в каждой точке (x, y, z) при $z(x^2 + y^2) \neq 0$, так что на самом деле мы получаем локально «выпрямленный» тор из примера 1.42. Более интересное с физической точки зрения множество плоских локальных координат для системы $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ представляют собой тороидальные координаты (θ, ψ, η), которые задаются формулами

$$x = \frac{\operatorname{sh}\eta \cos\psi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta}, \quad y = \frac{\operatorname{sh}\eta \sin\psi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta}, \quad z = \frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta}.$$

Такие координаты возникают в теории разделения переменных для уравнения Лапласа, ср. Moon, Spencer [1]. Читатель может проверить, что поверхности уровня $\{\eta = c\}$ в точности представляют собой интегральные торы системы $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$; на самом деле при этой замене координат $\mathbf{v} = \partial_\psi$, $\mathbf{w} = -2\partial_\theta$!

1.4. АЛГЕБРЫ ЛИ

Если G — группа Ли, то существуют некоторые замечательные векторные поля на G, характеризующиеся своей инвариантностью (в смысле, который вскоре будет определен) относительно группового умножения. Как мы увидим, эти инвариантные векторные поля образуют конечномерное векторное пространство, которое называется алгеброй Ли группы Ли G и в некотором смысле является «инфинитезимальной образующей» группы G. Фактически почти вся информация о группе G содержится в ее алгебре Ли. Это фундаментальное наблюдение — краеугольный камень теории групп Ли; например, оно позволяет нам заменить сложные нелинейные условия инвариантности относительно действия группы сравнительно простыми линейными инфинитезимальными условиями. Мощь этого метода нельзя переоценить — на самом деле весь круг приложений групп Ли к дифференциальным уравнениям в конечном счете покоится на этой единственной конструкции!

Мы начинаем с картины глобальной группы Ли, далее обращаясь к аналогичной конструкции для локальных групп Ли. Пусть G — группа Ли. Для любого элемента группы $g \in G$ *правое умножение*

$$R_g\colon G \to G,$$

определенное формулой

$$R_g(h) = h \cdot g,$$

является диффеоморфизмом, обратный к которому есть

$$R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}.$$

Векторное поле $\mathbf{v}$ на G называется *правоинвариантным*, если

$$dR_g(\mathbf{v}|_h) = \mathbf{v}|_{R_g(h)} = \mathbf{v}|_{hg}$$

для всех g и h из группы G. Заметим, что если поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ правоинвариантны, то любая их линейная комбинация $a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$, $a, b \in \mathbb{R}$, также правоинвариантна; следовательно, множество всех правоинвариантных векторных полей образует векторное пространство.

Определение 1.44. *Алгебра Ли* группы Ли G (она по традиции обозначается соответствующей малой готической буквой $\mathfrak{g}$) — это векторное пространство всех правоинвариантных векторных полей на G.

Заметим, что всякое правоинвариантное векторное поле однозначно определяется своим значением в единице, поскольку

$$\mathbf{v}|_g = dR_g(\mathbf{v}|_e), \tag{1.35}$$

так как $R_g(e)=g$. Обратно, всякий касательный вектор к G в единице e единственным образом определяет правоинвариантное векторное поле на G по формуле (1.35). В самом деле,

$$dR_g(\mathbf{v}|_h)=dR_g(dR_h(\mathbf{v}|_e))=d(R_g\circ R_h)(\mathbf{v}|_e)=dR_{hg}(\mathbf{v}|_e)=\mathbf{v}|_{hg},$$

что доказывает правую инвариантность поля $\mathbf{v}$. Поэтому мы можем отождествить алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G с касательным пространством к G в единичном элементе:

$$\mathfrak{g}\simeq TG|_e. \tag{1.36}$$

В частности, $\mathfrak{g}$ — конечномерное векторное пространство той же размерности, что и соответствующая группа Ли.

Кроме структуры векторного пространства на такой алгебре Ли далее вводится кососимметрическая билинейная операция, а именно скобка Ли. В самом деле, если $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — правоинвариантные векторные поля на G, то их скобка Ли $[\mathbf{v},\mathbf{w}]$ — тоже правоинвариантное векторное поле, поскольку в силу (1.32)

$$dR_g[\mathbf{v},\mathbf{w}]=[dR_g(\mathbf{v}),dR_g(\mathbf{w})]=[\mathbf{v},\mathbf{w}].$$

Это обосновывает общее определение алгебры Ли.

Определение 1.45. *Алгебра Ли* — это векторное пространство $\mathfrak{g}$ с билинейной операцией

$$[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},$$

называемой *скобкой Ли* алгебры $\mathfrak{g}$ и удовлетворяющей следующим аксиомам:

(a) *Билинейность*:

$$[c\mathbf{v}+c'\mathbf{v}',\mathbf{w}]=c[\mathbf{v},\mathbf{w}]+c'[\mathbf{v}',\mathbf{w}],$$
$$[\mathbf{v},c\mathbf{w}+c'\mathbf{w}']=c[\mathbf{v},\mathbf{w}]+c'[\mathbf{v},\mathbf{w}'],$$

где $c, c'\in\mathbb{R}$ — постоянные.

(b) *Кососимметричность*:

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}]=-[\mathbf{w},\mathbf{v}].$$

(c) *Тождество Якоби*:

$$[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]]+[\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]]+[\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]]=0$$

для всех $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathbf{w}'$ из $\mathfrak{g}$.

В этой книге большинство алгебр Ли будут конечномерными векторными пространствами. (Интересную бесконечномерную алгебру Ли представляет собой пространство всех гладких векторных полей на многообразии M. Однако с бесконечномерными алгебрами работать значительно труднее.) Мы начинаем с некоторых простых примеров алгебр Ли.

Пример 1.46. Если $G=\mathbb{R}$, то с точностью до умножения на константу существует единственное правоинвариантное векторное поле, а именно $\partial_x=\partial/\partial x$. В самом деле, для данных $x, y \in \mathbb{R}$

$$R_y(x)=x+y,$$

следовательно,

$$dR_y(\partial_x)=\partial_x.$$

Аналогично, если $G=\mathbb{R}^+$, то единственное независимое правоинвариантное векторное поле — это $x\partial_x$. Наконец, для группы $\mathrm{SO}(2)$ векторное поле ∂_θ — снова единственное независимое правоинвариантное векторное поле. Заметим, что алгебры Ли групп $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ и $\mathrm{SO}(2)$ совпадают, будучи одномерными векторными пространствами с тривиальной скобкой Ли ($[\mathbf{v}, \mathbf{w}]=0$ для всех $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$). Это и неудивительно: как может легко проверить читатель, из общего определения следует, что существует лишь одна одномерная алгебра Ли, а именно $\mathfrak{g}=\mathbb{R}$, и ее скобка Ли должна быть тривиальной.

Пример 1.47. Здесь мы вычисляем алгебру Ли общей линейной группы $\mathrm{GL}(n)$. Заметим, что, поскольку группа $\mathrm{GL}(n)$ n^2-мерна, мы можем отождествить алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n)\simeq\mathbb{R}^{n^2}$ с пространством всех матриц размера $n\times n$. В самом деле, координаты на $\mathrm{GL}(n)$ представляют собой матричные элементы x_{ij}, $i, j=1, \ldots, n$, поэтому касательное пространство к $\mathrm{GL}(n)$ в единице — это множество всех векторных полей

$$\mathbf{v}_A|_I=\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\bigg|_I,$$

где $A=(a_{ij})$ — произвольная матрица размера $n\times n$. Далее, для данной матрицы $Y=(y_{ij})\in\mathrm{GL}(n)$ элементы матрицы $R_Y(X)=XY$ равны

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}.$$

Поэтому в соответствии с (1.35) мы получаем

$$\mathbf{v}_A|_Y=dR_Y(\mathbf{v}_A|_I)=\sum_{l,m}\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big(\sum_k x_{lk}y_{km}\Big)\frac{\partial}{\partial x_{lm}}=$$

$$=\sum_{i,j,m} a_{ij}y_{jm}\frac{\partial}{\partial x_{im}},$$

или (через $X \in \mathrm{GL}(n)$)

$$\mathbf{v}_A|_X = \sum_{i,j}\Big(\sum_k a_{ik}x_{kj}\Big)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}. \tag{1.37}$$

Вычислим их скобку Ли:

$$[\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B] = \sum_{\substack{i,j,k\\ l,m,p}} \Big\{a_{lp}x_{pm}\frac{\partial}{\partial x_{lm}}(b_{ik}x_{kj}) - b_{lp}x_{pm}\frac{\partial}{\partial x_{lm}}(a_{ik}x_{kj})\Big\}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} =$$
$$= \sum_{i,j,k}\Big[\sum_l (b_{il}a_{lk} - a_{il}b_{lk})\Big]x_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = \mathbf{v}_{[A,B]},$$

где $[A, B] \equiv BA - AB$ — *коммутатор матриц*. Поэтому *алгебра Ли* $\mathfrak{gl}(n)$ *общей линейной группы* $\mathrm{GL}(n)$ — *это пространство всех матриц размера* $n \times n$ *со скобкой Ли — коммутатором матриц.*

Однопараметрические подгруппы

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G. Следующий результат показывает, что имеется взаимно однозначное соответствие между одномерными подпространствами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и (связными) однопараметрическими подгруппами группы Ли G.

Предложение 1.48. *Пусть* $\mathbf{v} \neq 0$ — *правоинвариантное векторное поле на группе Ли* G. *Тогда поток, порожденный полем* $\mathbf{v}$, *проходящий через единицу, а именно*

$$g_\varepsilon = \exp(\varepsilon\mathbf{v})e, \tag{1.38}$$

определен для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *и образует* однопараметрическую подгруппу *группы* G, *так что*

$$g_{\varepsilon+\delta} = g_\varepsilon \cdot g_\delta, \quad g_0 = e, \quad g_\varepsilon^{-1} = g_{-\varepsilon}, \tag{1.39}$$

причем эта подгруппа изоморфна либо самой группе $\mathbb{R}$, *либо группе окружности* $\mathrm{SO}(2)$. *Обратно, всякая связная одномерная подгруппа группы* G *порождается указанным способом таким правоинвариантным векторным полем.*

Доказательство. Для достаточно малых ε, δ формула (1.39) вытекает из правой инвариантности поля $\mathbf{v}$ и (1.26):

$$g_\delta \cdot g_\varepsilon = R_{g_\varepsilon}(g_\delta) = R_{g_\varepsilon}[\exp(\delta\mathbf{v})e] = \exp[\delta \cdot dR_{g_\varepsilon}(\mathbf{v})]\,R_{g_\varepsilon}(e) =$$
$$= \exp(\delta\mathbf{v})\,g_\varepsilon = \exp(\delta\mathbf{v})\exp(\varepsilon\mathbf{v})\,e = \exp[(\delta+\varepsilon)\,\mathbf{v}]\,e = g_{\delta+\varepsilon}.$$

Таким образом, g_ε — по меньшей мере локальная однопараметрическая группа. В частности, $g_0 = e$ и $g_\varepsilon^{-1} = g_{-\varepsilon}$ для малых ε. Далее, группа g_ε определена по крайней мере при $-\varepsilon_0/2 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0/2$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, так что мы можем по индукции положить

$$g_{m\varepsilon_0+\varepsilon} = g_{m\varepsilon_0} \cdot g_\varepsilon, \quad -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0,$$

для целого m. Предыдущее вычисление показывает, что g_ε — гладкая кривая в G, удовлетворяющая условиям (1.39) при всех ε, δ, если только поток глобально определен и является подгруппой. Если $g_\varepsilon = g_\delta$ для некоторых $\varepsilon \neq \delta$, то нетрудно показать, что $g_{\varepsilon_0} = e$ для некоторого наименьшего положительного $\varepsilon_0 > 0$ и что g_ε периодична с периодом ε_0, т. е. $g_{\varepsilon+\varepsilon_0} = g_\varepsilon$. В этом случае $\{g_\varepsilon\}$ изоморфна $SO(2)$ (возьмем $\theta = 2\pi\varepsilon/\varepsilon_0$). В противном случае $g_\varepsilon \neq g_\delta$ для всех $\varepsilon \neq \delta$ и $\{g_\varepsilon\}$ изоморфна $\mathbb{R}$.

Обратно, если $H \subset G$ — одномерная подгруппа, мы выбираем в качестве $\mathbf{v}|_e$ произвольный ненулевой касательный вектор к H в единице. С помощью изоморфизма (1.36) мы продолжаем $\mathbf{v}|_e$ до правоинвариантного векторного поля $\mathbf{v}$ на всей группе G. Поскольку H — подгруппа, вектор $\mathbf{v}|_h$ касается H в каждой точке $h \in H$, и поэтому H — интегральная кривая поля $\mathbf{v}$, проходящая через e. Это завершает доказательство. □

Пример 1.49. Предположим, что $G = \mathrm{GL}(n)$. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n)$ этой группы представляет собой пространство всех матриц размера $n \times n$ с коммутатором в качестве скобки Ли. Если $A \in \mathfrak{gl}(n)$, то соответствующее правоинвариантное векторное поле $\mathbf{v}_A$ на $\mathrm{GL}(n)$ выражается формулой (1.37). Однопараметрическая подгруппа $\exp(\varepsilon\mathbf{v}_A)e$ находится интегрированием системы из n^2 обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_{ij}}{d\varepsilon} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}, \quad x_{ij}(0) = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

содержащих элементы матрицы A. Ее решение — в точности матричная экспонента $X(\varepsilon) = e^{\varepsilon A}$. Это однопараметрическая подгруппа группы $\mathrm{GL}(n)$, порожденная матрицей A из $\mathfrak{gl}(n)$.

Пример 1.50. Рассмотрим тор T^2 с групповым умножением

$$(\theta, \rho) \cdot (\theta', \rho') = (\theta + \theta', \, \mathrm{d} + \rho, \, \mathrm{mod}\, 2\pi.$$

Ясно, что алгебра Ли тора T^2 порождается правоинвариантными полями $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\rho$ с тривиальной скобкой Ли: $[\partial_\theta, \partial_\rho] = 0$. Пусть

$$\mathbf{v}_\omega = \partial_\theta + \omega\partial_\rho$$

для некоторого $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда соответствующая однопараметрическая группа — это

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v}_\omega)(0, 0) = (\varepsilon, \varepsilon\omega) \bmod 2\pi, \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

которая представляет собой подгруппу H_ω, обсуждавшуюся непосредственно за определением 1.18. В частности, если ω — рациональное число, то подгруппа H_ω — замкнутая однопараметрическая подгруппа, изоморфная $SO(2)$, а если ω иррационально, то H_ω — всюду плотная подгруппа, изоморфная группе $\mathbb{R}$. Это показывает, что, вообще говоря, довольно трудно точно указать вид однопараметрической подгруппы, зная только ее инфинитезимальную образующую.

Подалгебры

Вообще говоря, *подалгебра* $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это векторное подпространство, замкнутое относительно скобки Ли, так что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in \mathfrak{h}$, если только $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{h}$. Если H — подгруппа Ли группы Ли G, то всякое правоинвариантное векторное поле $\mathbf{v}$ на H может быть продолжено до правоинвариантного векторного поля на G. (Нужно лишь положить $\mathbf{v}|_g = dR_g(\mathbf{v}|_e)$, $g \in G$.) Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{h}$ подгруппы Ли H реализуется как подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Соответствие между однопараметрическими подгруппами группы Ли G и одномерными подпространствами $\mathfrak{h}$ (подалгебрами) ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обобщается и приводит к полному взаимно однозначному соответствию между подгруппами Ли группы Ли G и подалгебрами ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Теорема 1.51. *Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Если $H \subset G$ — ее подгруппа Ли, то соответствующая алгебра Ли — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обратно, если $\mathfrak{h}$ — произвольная s-мерная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то существует единственная связная s-параметрическая подгруппа Ли H группы Ли G, алгеброй Ли которой является $\mathfrak{h}$.*

Основную идею доказательства этой теоремы можно изложить следующим образом. Пусть $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ — базис алгебры $\mathfrak{h}$, определяющий систему векторных полей на G. Поскольку $\mathfrak{h}$ — подалгебра, каждая скобка Ли $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ — снова элемент из $\mathfrak{h}$ и, следовательно, лежит в линейной оболочке $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$. Таким образом, подалгебра $\mathfrak{h}$ определяет систему векторных полей на G, находящихся в инволюции. Далее, легко видеть, что в каждой точке $g \in G$ касательные векторы $\{\mathbf{v}_1|_g, \ldots, \mathbf{v}_s|_g\}$ линейно независимы, так что эта система является полурегулярной. По теореме Фробениуса у этой системы существует максимальное s-мерное подмногообразие, проходящее через единицу e. Это подмногообразие — подгруппа Ли H, соответствующая $\mathfrak{h}$. Не очень трудно проверить, что H — в самом деле подгруппа, а то, что это — подмногообразие, мы знаем. Основная техническая трудность в этом доказательстве состоит в том, чтобы установить гладкость групповых операций умножения и взятия обратного элемента (индуцированных из соответствующих операций группы G) в структуре многообразия на H. Заинтересованный читатель может найти полное доказательство в книге Warner [1; теорема 3.19].

Пример 1.52. Приведенная теорема значительно упрощает вычисление алгебр Ли групп Ли, которые могут быть реализованы как подгруппы Ли общей линейной группы $\mathrm{GL}(n)$. А именно, если $H \subset \mathrm{GL}(n)$ — подгруппа, то ее алгебра Ли $\mathfrak{h}$ будет подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$ всех матриц размера $n \times n$ со скобкой Ли — коммутатором матриц. Кроме того, мы можем найти $\mathfrak{h} \simeq TH|_e$, рассматривая только все однопараметрические подгруппы группы $\mathrm{GL}(n)$, содержащиеся в H:

$$\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{gl}(n)\colon\ e^{\varepsilon A} \in H,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\}.$$

Например, чтобы найти алгебру Ли ортогональной группы $\mathrm{O}(n)$, нам нужно найти все матрицы A размера $n \times n$, такие, что

$$(e^{\varepsilon A})(e^{\varepsilon A})^T = I.$$

Дифференцируя по ε и полагая $\varepsilon = 0$, мы получаем

$$A + A^T = 0.$$

Поэтому $\mathfrak{so}(n) = \{A\colon A$ кососимметрична$\}$ — алгебра Ли и группы $\mathrm{O}(n)$, и группы $\mathrm{SO}(n)$. Алгебры Ли других матричных групп Ли ищутся аналогично.

Мы видели, что в общем случае имеется взаимно однозначное соответствие между подалгебрами алгебры Ли данной группы Ли и связными подгруппами Ли той же группы Ли. В частности, каждая подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ приводит к матричной группе Ли, т. е. к подгруппе Ли группы Ли $\mathrm{GL}(n)$. Более общо, если $\mathfrak{g}$ — произвольная конечномерная (абстрактная) алгебра Ли, то возникает вопрос, существует ли группа Ли G, для которой $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Ответ на этот вопрос утвердительный. Он сводится фактически к матричному случаю следующей важной теоремой Адо.

Теорема 1.53. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *конечномерная алгебра Ли. Тогда* $\mathfrak{g}$ *изоморфна подалгебре алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(n)$ *для некоторого* n.

В качестве непосредственного следствия теоремы Адо и второй половины теоремы 1.22 мы получаем основное соответствие между группами Ли и алгебрами Ли.

Теорема 1.54. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *конечномерная алгебра Ли. Тогда существует единственная связная односвязная группа Ли* G^*, *для которой* $\mathfrak{g}$ *является ее алгеброй Ли. Кроме того, если* G — *любая другая связная группа Ли с алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$, *то* $\pi\colon G^* \to G$ — *односвязная накрывающая группа группы Ли* G.

В самом деле, нам нужно лишь реализовать $\mathfrak{g}$ как подалгебру алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ для некоторого n и взять соответствующую подгруппу Ли $\tilde{G}$ группы Ли $\mathrm{GL}(n)$. Тогда G^* будет односвязной накрывающей группой группы Ли $\tilde{G}$, что гарантирует теорема 1.22.

Важно подчеркнуть, что *неверно*, будто каждая группа Ли G изоморфна подгруппе группы $\mathrm{GL}(n)$ для некоторого n. В частности, односвязная накрывающая группа группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *не* реализуется как матричная группа Ли!

Экспоненциальное отображение

Экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ получается подстановкой значения $\varepsilon = 1$ в однопараметрическую подгруппу, порожденную полем $\mathbf{v}$:

$$\exp(\mathbf{v}) = \exp(\mathbf{v})\, e.$$

Без труда доказывается, что дифференциал

$$d\exp\colon T\mathfrak{g}|_0 \simeq \mathfrak{g} \to TG|_e \simeq \mathfrak{g}$$

экспоненциального отображения в нуле — тождественное отображение. (См. упр. 1.27.) Таким образом, по теореме об обратной функции отображение exp определяет локальный диффеоморфизм между алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и окрестностью единицы группы G. Следовательно, каждый элемент g группы G, достаточно близкий к единичному, можно записать как экспоненту: $g = \exp(\mathbf{v})$ для некоторого $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$. Вообще говоря, глобально отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ не является ни взаимно однозначным, ни отображением на. (См. упр. 1.28.) Однако, пользуясь предложением 1.24, мы всегда можем записать любой элемент g группы G как конечное произведение экспонент:

$$g=\exp(\mathbf{v}_1)\exp(\mathbf{v}_2)\ \ldots\ \exp(\mathbf{v}_k)$$

для некоторых $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ из $\mathfrak{g}$. Польза от этого наблюдения состоит в том, что доказательство инвариантности некоторого объекта относительно всей группы Ли сводится к доказательству его инвариантности лишь относительно однопараметрических подгрупп группы G, которая, в свою очередь, вытекает из «инфинитезимальной инвариантности» относительно соответствующих инфинитезимальных образующих алгебры $\mathfrak{g}$. Потрудившись чуть больше, мы можем на самом деле свести это к доказательству «инвариантности» относительно базиса $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем всякий элемент g группы Ли G выражается в виде

$$g=\exp(\varepsilon^1\mathbf{v}_{i_1})\exp(\varepsilon^2\mathbf{v}_{i_2})\ldots\exp(\varepsilon^k\mathbf{v}_{i_k}) \tag{1.40}$$

при подходящих $\varepsilon^j\in\mathbb{R}$, $1\leqslant i_j\leqslant r$, $j=1, \ldots, k$. (См. упр. 1.27.)

Алгебры Ли локальных групп Ли

Возвращаясь к локальной ситуации, мы рассматриваем локальную группу Ли $V\subset\mathbb{R}^r$ с умножением $m(x,y)$. Соответствующий правый сдвиг R_y: $V\to\mathbb{R}^r$ задается формулой $R_y(x)=$ $=m(x,y)$. Векторное поле $\mathbf{v}$ на V правоинвариантно, если и только если

$$dR_y(\mathbf{v}|_x)=\mathbf{v}|_{R_y(x)}=\mathbf{v}|_{m(x,y)}$$

при x, y и $m(x,y)$, лежащих в V. Как и в случае глобальных групп Ли, легко проверить, что всякое правоинвариантное векторное поле единственным образом определяется своим значением в начале координат (единице группы), $\mathbf{v}|_x=dR_x(\mathbf{v}|_0)$, и, следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ локальной группы V, определяемая как пространство правоинвариантных векторных полей на V, является r-мерным векторным пространством. Фактически мы можем определить алгебру Ли $\mathfrak{g}$ непосредственно по формуле группового умножения.

Предложение 1.55. *Пусть $V\subset\mathbb{R}^r$ — локальная группа Ли с умножением $m(x,y)$, x, $y\in V$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ правоинвариантных векторных полей на V порождается векторными полями*

$$\mathbf{v}_k=\sum_{i=1}^r\xi_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\quad k=1, \ldots, r,$$

где

$$\xi_k^i(x) = \frac{\partial m^i}{\partial x^k}(0, x). \tag{1.41}$$

Здесь m^i — компоненты отображения m, а $\partial/\partial x^k$ обозначают производные по первому множеству r переменных от $m(x, y)$, в которые подставлены значения $x = 0$, $y = x$.

Доказательство. Поскольку $R_y(x) = m(x, y)$, имеем

$$dR_y\left(\sum_{i=1}^{r} \xi_k^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{i,j} \xi_k^i(0) \frac{\partial m^j}{\partial x^i}(0, y) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\xi_k^i(0) = \delta_k^i,$$

т. е.

$$\frac{\partial m^i}{\partial x^k}(0, 0) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Но это тривиально следует из того факта, что $m(x, 0) = x$ — тождественное отображение. □

Пример 1.56. Рассмотрим локальную группу Ли из примера 1.21. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ одномерна и порождена векторным полем $\xi(x)\partial_x$, где в силу (1.41)

$$\xi(x) = \frac{\partial m}{\partial x}(0, x) = (x - 1)^2.$$

Таким образом, $\mathbf{v} = (x - 1)^2\partial_x$ — единственное независимое правоинвариантное векторное поле на V. Заметим, что локальный гомоморфизм групп $\chi\colon \mathbb{R} \to V$ из примера 1.23 отображает инвариантное векторное поле ∂_t на $\mathbb{R}$ в поле $-\mathbf{v} = d\chi(\partial_t)$.

Структурные константы

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная конечномерная алгебра Ли, так что по теореме 1.54 $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли некоторой группы Ли G. Если ввести в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ базис $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, то скобка Ли любых двух базисных векторов снова должна лежать в $\mathfrak{g}$. Таким образом, имеются некоторые постоянные c_{ij}^k, $i, j, k = 1, \ldots, r$, называемые *структурными константами* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, такие, что

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k \mathbf{v}_k, \quad i, j = 1, \ldots, r. \tag{1.42}$$

Заметим, что поскольку векторы $\mathbf{v}_i$ составляют базис, то, зная структурные константы, мы можем восстановить алгебру Ли $\mathfrak{g}$, пользуясь формулой (1.42) и билинейностью скобки Ли. Условия кососимметричности и тождество Якоби накладывают дальнейшие ограничения на структурные константы:

(i) *Кососимметричность*

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k; \tag{1.43}$$

(ii) *тождество Якоби*

$$\sum_{k=1}^{r} \left(c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{li}^k c_{kj}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m\right) = 0. \tag{1.44}$$

Обратно, нетрудно показать, что всякое множество констант c_{ij}^k, удовлетворяющее условиям (1.43), (1.44), является множеством структурных констант некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Конечно, если выбрать новый базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то, вообще говоря, структурные константы изменятся. Если $\hat{\mathbf{v}}_i = \sum_j a_{ij}\mathbf{v}_j$, то

$$\hat{c}_{ij}^k = \sum_{l,\, m,\, n} a_{il} a_{jm} b_{nk} c_{lm}^n, \tag{1.45}$$

где (b_{ij}) — матрица, обратная к матрице (a_{ij}). Таким образом, два множества структурных констант определяют одну и ту же алгебру Ли, если и только если они связаны соотношением (1.45). Следовательно, в силу теоремы 1.54 имеется взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности структурных констант c_{ij}^k, удовлетворяющих условиям (1.43), (1.44), и связными односвязными группами Ли G, алгебры Ли которых имеют данные структурные константы относительно некоторого базиса. Таким образом, в принципе вся теория групп Ли сводится к изучению алгебраических уравнений (1.43), (1.44); однако, это, быть может, слишком уж упрощенная точка зрения.

Таблицы коммутирования

Наиболее удобный способ описать структуру данной алгебры Ли состоит в том, чтобы записать ее в виде таблицы. Если $\mathfrak{g}$ есть r-мерная алгебра Ли и $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ — базис в $\mathfrak{g}$, то *таблица коммутирования* для $\mathfrak{g}$ будет иметь размеры $r \times r$ и на (i, j)-м месте будет стоять выражение для скобки Ли $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$. Отметим, что эта таблица всегда кососимметрична, поскольку $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = -[\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i]$; в частности, все диагональные элементы ее равны нулю. Из таблицы коммутирования легко извлекаются структурные константы — а именно, c_{ij}^{k} — это коэффициент при $\mathbf{v}_k$ в (i, j)-м месте таблицы.

Например, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ — алгебра Ли специальной линейной группы $\mathrm{SL}(2)$, состоящая из всех матриц размера 2×2 со следом 0, и мы пользуемся базисом

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то получается следующая таблица коммутирования:

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	A_1	$-2A_2$
A_2	$-A_1$	0	A_3
A_3	$2A_2$	$-A_3$	0

Таким образом, например,

$$[A_1, A_3] = A_3A_1 - A_1A_3 = -2A_2$$

и т. д. Структурные константы таковы:

$$c_{12}^{1} = c_{23}^{3} = 1 = -c_{21}^{1} = -c_{32}^{3}, \quad c_{13}^{2} = -2 = -c_{31}^{2},$$

а все остальные c_{jk}^{i} равны нулю.

Инфинитезимальные действия групп

Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на многообразии M по формуле $g \cdot x = \Psi(g, x)$ при $(g, x) \in \mathcal{U} \subset G \times M$. Тогда имеется соответствующее «инфинитезимальное действие» алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G на M. А именно, если $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$, мы определяем $\psi(\mathbf{v})$ как векторное поле на M, поток которого совпадает с действием однопараметрической подгруппы $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ из G на M. Это означает, что для $x \in M$

$$\psi(\mathbf{v})|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Psi(\exp(\varepsilon\mathbf{v}), x) = d\Psi_x(\mathbf{v}|_e), \tag{1.46}$$

где $\Psi_x(g) \equiv \Psi(g, x)$. Заметим далее, что так как

$$\Psi_x \circ R_g(h) = \Psi(h \cdot g, x) = \Psi(h, g \cdot x) = \Psi_{g \cdot x}(h)$$

в области определения, то

$$d\Psi_x(\mathbf{v}|_g) = d\Psi_{g \cdot x}(\mathbf{v}|_e) = \psi(\mathbf{v})|_{g \cdot x}$$

для всякого $g \in G_x$. Из свойства (1.32) скобки Ли следует, что ψ — гомоморфизм алгебр Ли из $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли векторных полей на M:

$$[\psi(\mathbf{v}), \psi(\mathbf{w})] = \psi([\mathbf{v}, \mathbf{w}]), \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}. \tag{1.47}$$

Поэтому множество всех векторных полей $\psi(\mathbf{v})$, отвечающих полям $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$, образует алгебру Ли векторных полей на M, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}$; в частности, она имеет те же структурные константы. Обратно, если задана конечномерная алгебра Ли векторных полей на M, то всегда найдется локальная группа преобразований, инфинитезимальное действие которой порождается данной алгеброй Ли.

Теорема 1.57. *Пусть $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ — векторные поля на многообразии M, удовлетворяющие условиям*

$$[\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k \mathbf{w}_k, \quad i, j = 1, \ldots, r,$$

для некоторых постоянных c_{ij}^k. Тогда существует группа Ли G, алгебра Ли которой имеет данные структурные константы относительно некоторого базиса $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$, а локальное действие группы G на M таково, что $\psi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ при $i = 1, \ldots, r$, где ψ определено формулой (1.46).

Обычно мы будем опускать явное указание отображения ψ и будем отождествлять алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с ее образом $\psi(\mathfrak{g})$, составляющим алгебру Ли векторных полей на M. На этом языке мы восстанавливаем $\mathfrak{g}$ по группе преобразований, пользуясь основной формулой

$$\mathbf{v}|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon \mathbf{v}) x, \quad \mathbf{v} \in \mathfrak{g}. \tag{1.48}$$

Векторное поле $\mathbf{v}$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *инфинитезимальной образующей* действия группы G. Теорема 1.57 говорит, что если нам известны инфинитезимальные образующие $\mathbf{w}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{w}_r$, которые составляют базис алгебры Ли, то мы всегда можем экспоненцированием найти локальную группу преобразований, алгебра Ли которой совпадает с данной.

Пример 1.58. Ли доказал, что с точностью до диффеоморфизма на вещественной прямой $M = \mathbb{R}$ существуют три конечномерные алгебры Ли векторных полей. Это

(а) Алгебра, порожденная полем ∂_x: она порождает действие $\mathbb{R}$ на M как однопараметрической группы сдвигов: $x \mapsto$ $\mapsto x + \varepsilon$.

(b) Двумерная алгебра Ли, порожденная полями ∂_x и $x\partial_x$, второе векторное поле порождает группу растяжений: $x \longmapsto \lambda x$. Заметим, что

$$[\partial_x, x\partial_x] = \partial_x,$$

так что эта алгебра Ли изоморфна алгебре Ли матриц размера 2×2, порожденной матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она порождает группу Ли всех верхних треугольных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

Соответствующее действие на $\mathbb{R}$ имеет вид $x \longmapsto \alpha x + \beta$. Мы оставляем читателю проверить, что оно в самом деле определяет действие этой группы Ли, инфинитезимальные образующие которой совпадают с данными.

(c) Трехмерная алгебра, порожденная векторными полями

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = x\partial_x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2\partial_x,$$

третье векторное поле порождает локальную группу «инверсий»:

$$x \longmapsto \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \quad |\varepsilon| < \frac{1}{x}.$$

Приведем таблицу коммутирования для этой алгебры Ли:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	$\mathbf{v}_1$	$2\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_1$	0	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_3$	$-2\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_3$	0

Если мы заменим $\mathbf{v}_3$ на $-\mathbf{v}^3 = -x^2\partial_x$, то получим такую же таблицу коммутирования, что и для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ с базисом

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, это локальное действие специальной линейной группы $SL(2)$ на вещественной прямой с инфинитезимальными образующими ∂_x, $x\partial_x$ и $-x^2\partial_x$. Нетрудно видеть, что это действие группы есть в точности *проективная группа*

$$x \longmapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2),$$

которая является вещественным аналогом комплексной группы дробно-линейных преобразований.

1.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Изначально возникшие как инструмент для многомерного обобщения теоремы Стокса, дифференциальные формы играют фундаментальную роль в топологических вопросах дифференциальной геометрии. Хотя в этой книге я стремился не придавать особого значения использованию дифференциальных форм, имеется несколько ситуаций (наиболее заметных в § 5.4 о вариационном комплексе), в которых язык дифференциальных форм исключительно эффективен. Настоящий параграф дает краткое введение в теорию дифференциальных форм для читателя, интересующегося этими более теоретическими аспектами данного предмета. Мы начинаем с основного определения.

Определение 1.59. Пусть M — гладкое многообразие и $TM|_x$ — его касательное пространство в точке x. Пространство $\bigwedge_k T^*M|_x$ *дифференциальных k-форм* в точке x — это множество всех k-линейных кососимметричных функций

$$\omega\colon TM|_x \times \ldots \times TM|_x \to \mathbb{R}.$$

В частности, если мы обозначаем значение формы ω на касательных векторах $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in TM|_x$ через $\langle \omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, то основные требования состоят в том, что для всех касательных векторов в точке x

$$\langle \omega; \mathbf{v}_1, \ldots, c\mathbf{v}_i + c'\mathbf{v}'_i, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = c \langle \omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle + \\ + c' \langle \omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}'_i, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$$

для $c, c' \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и

$$\langle \omega; \mathbf{v}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{v}_{\pi k} \rangle = (-1)^{\pi} \langle \omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$$

для каждой перестановки π чисел $\{1, \ldots, k\}$, причем $(-1)^{\pi}$ обозначает знак этой перестановки. Фактически пространство $\bigwedge_k T^*M|_x$ является векторным пространством относительно очевидных операций сложения и умножения на числа. 0-форма