образующими ∂_x, $x\partial_x$ и $-x^2\partial_x$. Нетрудно видеть, что это действие группы есть в точности *проективная группа*

$$x \longmapsto \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2),$$

которая является вещественным аналогом комплексной группы дробно-линейных преобразований.

1.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Изначально возникшие как инструмент для многомерного обобщения теоремы Стокса, дифференциальные формы играют фундаментальную роль в топологических вопросах дифференциальной геометрии. Хотя в этой книге я стремился не придавать особого значения использованию дифференциальных форм, имеется несколько ситуаций (наиболее заметных в § 5.4 о вариационном комплексе), в которых язык дифференциальных форм исключительно эффективен. Настоящий параграф дает краткое введение в теорию дифференциальных форм для читателя, интересующегося этими более теоретическими аспектами данного предмета. Мы начинаем с основного определения.

Определение 1.59. Пусть M — гладкое многообразие и $TM|_x$ — его касательное пространство в точке x. Пространство $\bigwedge_k T^*M|_x$ *дифференциальных k-форм* в точке x — это множество всех k-линейных кососимметричных функций

$$\omega\colon TM|_x \times \ldots \times TM|_x \to \mathbb{R}.$$

В частности, если мы обозначаем значение формы ω на касательных векторах $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in TM|_x$ через $\langle\omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\rangle$, то основные требования состоят в том, что для всех касательных векторов в точке x

$$\langle\omega; \mathbf{v}_1, \ldots, c\mathbf{v}_i + c'\mathbf{v}'_i, \ldots, \mathbf{v}_k\rangle = c\langle\omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k\rangle + \\ + c'\langle\omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}'_i, \ldots, \mathbf{v}_k\rangle$$

для $c, c' \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и

$$\langle\omega; \mathbf{v}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{v}_{\pi k}\rangle = (-1)^\pi \langle\omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\rangle$$

для каждой перестановки π чисел $\{1, \ldots, k\}$, причем $(-1)^\pi$ обозначает знак этой перестановки. Фактически пространство $\bigwedge_k T^*M|_x$ является векторным пространством относительно очевидных операций сложения и умножения на числа. 0-форма в точке x — это по соглашению вещественное число, а пространство $T^*M|_x = \bigwedge_1 T^*M|_x$ 1-форм, называемое *кокасательным пространством* к M в точке x, является пространством линейных функций на $TM|_x$, т. е. двойственным векторным пространством к касательному пространству в точке x. *Гладкая дифференциальная k-форма* ω на M (или, короче, *k-форма*) — это набор гладко меняющихся кососимметричных k-линейных отображений $\omega|_x \in \bigwedge_k T^*M|_x$ для каждой точки $x \in M$, причем мы требуем, чтобы для всех гладких векторных полей $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$

$$\langle \omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle (x) \equiv \langle \omega|_x; \mathbf{v}_1|_x, \ldots, \mathbf{v}_k|_x \rangle$$

была гладкой вещественнозначной функцией от x. В частности, 0-форма — это в точности гладкая вещественнозначная функция $f: M \to \mathbb{R}$.

Если $(x^1, \ldots, x^m)$ — локальные координаты, то $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^m\}$ — базис в $TM|^x$. Двойственное кокасательное пространство обладает двойственным базисом, традиционно обозначаемым $\{dx^1, \ldots, dx^m\}$; таким образом, $\langle dx^i; \partial/\partial x^j \rangle = \delta^i_j$ для всех i, j, где δ^i_j есть 1 при $i = j$ и 0 в противном случае. Поэтому в локальных координатах дифференциальная 1-форма ω выражается следующим образом:

$$\omega = h_1(x)\, dx^1 + \ldots + h_m(x)\, dx^m,$$

где каждая функция $h_j(x)$ гладкая. Заметим, что для любого векторного поля $\mathbf{v} = \sum \xi^i(x)\, \partial/\partial x^i$

$$\langle \omega; \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{m} h_i(x)\, \xi^i(x)$$

— гладкая функция. Особенно важную роль играют 1-формы, задаваемые дифференциалами вещественнозначных функций:

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i, \quad \text{причем} \quad \langle df; \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}(f).$$

Чтобы построить дифференциальные формы высших порядков, заметим, что из данного набора дифференциальных 1-форм $\omega_1, \ldots, \omega_k$ мы можем составить дифференциальную k-форму $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, называемую *внешним произведением*, с помощью формулы

$$\langle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \det(\langle \omega_i; \mathbf{v}_j \rangle). \tag{1.49}$$

Справа стоит детерминант матрицы размера $k \times k$ с элементами (i, j), указанными выше. Заметим, что внешнее произведение является и полилинейным, и кососимметричным:

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge (c\omega_i + c'\omega_i') \wedge \ldots \wedge \omega_k = c(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_i \wedge \ldots \wedge \omega_k) + \\ + c'(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_i' \wedge \ldots \wedge \omega_k),$$

$$\omega_{\pi 1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\pi k} = (-1)^\pi \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k.$$

Нетрудно видеть, что в локальных координатах пространство $\wedge_k T^*M|_x$ порождается базисными k-формами

$$dx^I \equiv dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

где I пробегает все строго возрастающие мультииндексы $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant m$. Таким образом, размерность пространства $\wedge_k T^*M|_x$ равна $\binom{m}{k}$; в частности, $\wedge_k T^*M|_x \simeq \{0\}$ при $k > m$. Всякая гладкая дифференциальная k-форма на M в локальных координатах имеет вид

$$\omega = \sum_I \alpha_I(x)\, dx^I,$$

где коэффициент α_I для каждого строго возрастающего мультииндекса I является гладкой вещественнозначной функцией. Например, 2-форма в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\omega = \alpha(x, y, z)\, dy \wedge dz + \beta(x, y, z)\, dz \wedge dx + \gamma(x, y, z)\, dx \wedge dy \quad (1.50)$$

в базисе $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx = -dx \wedge dz$, $dx \wedge dy$, что напоминает обозначения для интегралов по поверхности. Имеем

$$\langle\omega; \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z, \hat{\xi}\partial_x + \hat{\eta}\partial_y + \hat{\zeta}\partial_z\rangle = \\ = \alpha(\eta\hat{\zeta} - \hat{\eta}\zeta) + \beta(\zeta\hat{\xi} - \hat{\zeta}\xi) + \gamma(\xi\hat{\eta} - \hat{\xi}\eta).$$

Если

$$\omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k, \quad \theta = \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_l,$$

— «разложенные» формы, то их *внешнее произведение* — это форма

$$\omega \wedge \theta = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \wedge \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_l,$$

причем свойство билинейности позволяет распространить это определение на формы более общего вида:

$$(c\omega + c'\omega') \wedge \theta = c(\omega \wedge \theta) + c'(\omega' \wedge \theta),$$
$$\omega \wedge (c\theta + c'\theta') = c(\omega \wedge \theta) + c'(\omega \wedge \theta'),$$

где c, $c' \in \mathbb{R}$. Внешнее произведение ассоциативно:

$$\omega \wedge (\theta \wedge \zeta) = (\omega \wedge \theta) \wedge \zeta,$$

и *анти*коммутативно:

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{kl}\, \theta \wedge \omega,$$

если ω есть k-форма, а θ есть l-форма. Например, внешнее произведение формы (1.50) и 1-формы $\theta = \lambda dx + \mu dy + \nu dz$ — это 3-форма

$$\omega \wedge \theta = (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Кодифференциал и замена координат

Если $F\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий, то его дифференциал dF отображает касательные векторы на M в касательные векторы на N. Таким образом, имеется индуцированное линейное отображение F^*, называемое *кодифференциалом* отображения F, переводящее дифференциальные k-формы на N обратно в дифференциальные k-формы на M:

$$F^*\colon\ \wedge_k T^*N\,|_{F(x)} \to \wedge_k T^*M\,|_x.$$

Оно определяется так, что если $\omega \in \wedge_k T^*N\,|_{F(x)}$, то

$$\langle F^*(\omega);\ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\rangle = \langle \omega;\ dF(\mathbf{v}_1), \ldots, dF(\mathbf{v}_k)\rangle$$

для любого множества касательных векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in TM\,|_x$. В отличие от дифференциала кодифференциал *переводит* гладкие дифференциальные формы на N в гладкие дифференциальные формы на M. Если $x = (x^1, \ldots, x^m)$ — локальные координаты на M, а $y = (y^1, \ldots, y^n)$ — координаты на N, то

$$F^*(dy^i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \cdot dx^j, \quad \text{где} \quad y = F(x),$$

задает действие F^* на базисные 1-формы. Мы заключаем, что в общем случае

$$F^*\left(\sum_I \alpha_I(y)\, dy^I\right) = \sum_{I,\,J} \alpha_I(F(x)) \frac{\partial y^I}{\partial x^J}\, dx^J, \tag{1.51}$$

где $\partial y^I/\partial x^J$ обозначает якобиан $\det(\partial y^{i_\varkappa}/\partial x^{j_\nu})$, отвечающий возрастающим мультииндексам $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $J = (j_1, \ldots, j_k)$. В частности, если $y = F(x)$ определяет замену координат на M, то (1.51) доставляет соответствующую замену координат для дифференциальных k-форм на M. Заметим также, что кодифференциал сохраняет алгебраическую операцию внешнего произведения:

$$F^*(\omega \wedge \theta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\theta).$$

Внутренние произведения

Если ω — дифференциальная k-форма, а $\mathbf{v}$ — гладкое векторное поле, то мы можем составить $(k-1)$-форму $\mathbf{v} \rfloor \omega$, называемую *внутренним произведением* $\mathbf{v}$ на ω, определяя ее так, чтобы

$$\langle \mathbf{v} \rfloor \omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1} \rangle = \langle \omega; \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1} \rangle$$

для каждого набора векторных полей $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$. Внутреннее произведение, очевидно, является билинейным по обоим своим аргументам, так что достаточно знать его для базисных элементов:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \rfloor (dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}) =$$
$$= \begin{cases} (-1)^{\varkappa-1} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{\varkappa-1}} \wedge dx^{j_{\varkappa+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}, & i = j_\varkappa, \\ 0, \quad i \neq j_\varkappa \quad \text{для всех} \quad \varkappa. \end{cases}$$

Например,

$$\partial_x \rfloor dx \wedge dy = dy, \quad \partial_x \rfloor dz \wedge dx = -dz, \quad \partial_x \rfloor dy \wedge dz = 0,$$

так что если форма ω имеет вид (1.50), то

$$(\xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z) \rfloor \omega = (\zeta\beta - \eta\gamma)\, dx + (\xi\gamma - \zeta\alpha)\, dy + (\eta\alpha - \xi\beta)\, dz.$$

Отметим, что внутреннее произведение действует на формы как *антидифференцирование*. Это означает, что

$$\mathbf{v} \rfloor (\omega \wedge \theta) = (\mathbf{v} \rfloor \omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge (\mathbf{v} \rfloor \theta), \qquad (1.52)$$

если ω есть k-форма, а θ есть l-форма.

Внешняя производная

Кроме чисто алгебраических операций внешнего и внутреннего произведений имеются еще две важные дифференциальные операции. Первая из них обобщает понятие дифференциала гладкой функции (или 0-формы) на произвольную дифференциальную k-форму. В локальных координатах, если $\omega = \sum \alpha_I(x)\, dx^I$ — гладкая дифференциальная k-форма на многообразии M, то ее *дифференциал* или *внешняя производная* — это $(k+1)$-форма

$$d\omega = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I = \sum_{I, j} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I. \qquad (1.53)$$

Предложение 1.60. *Дифференциал d, переводящий k-формы в $(k+1)$-формы, обладает следующими свойствами:*

(a) линейность:

$$d(c\omega + c'\omega') = c\, d\omega + c'\, d\omega', \quad \text{где} \quad c, c' \text{ — константы};$$

(b) свойство антидифференцирования:

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge (d\theta), \qquad (1.54)$$

если ω есть k-форма, а θ есть l-форма;

(c) замкнутость:

$$d(d\omega) \equiv 0; \qquad (1.55)$$

(d) коммутирование с кодифференциалом:

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega), \qquad (1.56)$$

где F: $M \to N$ — гладкое отображение, а ω есть k-форма на N.

Доказательства этих свойств довольно прямые. Линейность очевидна, а свойство антидифференцирования легко следует из правила Лейбница. Чтобы проверить замкнутость, нужно лишь доказать, что $d(df) = 0$ для гладкой функции f (поскольку затем мы можем воспользоваться свойствами (a) и (b), чтобы распространить это свойство на общий случай). Однако

$$d(df) = \sum_{i, j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j$$

в силу кососимметричности внешнего произведения, так что замкнутость сводится к равенству смешанных частных производных. На самом деле свойства (a), (b) и (c) вместе с действием d на функции служат *однозначной* характеризацией дифференциала, и потому d фактически не зависит от выбора локальных координат. Наконец, чтобы доказать (1.56), нужно убедиться в справедливости этой формулы лишь в случае функций: $F^*(df) = dF^*(f)$, где $F^*(f) = f \circ F$, а дальнейшее сводится к обычному цепному правилу. □

Если $M = \mathbb{R}^3$, то дифференциал 1-формы

$$d(\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz) = (\nu_y - \mu_z)\,dy \wedge dz + (\lambda_z - \nu_x)\,dz \wedge dx + (\mu_x - \lambda_y)\,dx \wedge dy$$

можно отождествить с ротором ее коэффициентов: $\nabla \times \lambda \equiv \nabla \times (\lambda, \mu, \nu)$. Аналогично, дифференциал 2-формы

$$d(\alpha\,dy \wedge dz + \beta\,dz \wedge dx + \gamma\,dx \wedge dy) = (\alpha_x + \beta_y + \gamma_z)\,dx \wedge dy \wedge dz$$

можно отождествить с дивергенцией $\nabla \cdot \alpha \equiv \nabla \cdot (\alpha, \beta, \gamma)$. Свойство (1.55) замкнутости d поэтому превращается в известные тождества векторного исчисления

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \lambda) = 0.$$

Возможно, читателю поучительно посмотреть, какие тождества векторного исчисления содержатся в этом случае в свойстве (1.54) антидифференцирования.

Комплекс де Рама

Для данного многообразия M обозначим через $\Lambda_k = \Lambda_k(M)$ пространство всех гладких дифференциальных k-форм на M. Дифференциал d, отображающий k-формы в $(k+1)$-формы, служит для определения комплекса

$$0 \to \mathbb{R} \to \Lambda_0 \xrightarrow{d} \Lambda_1 \xrightarrow{d} \Lambda_2 \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Lambda_{m-1} \xrightarrow{d} \Lambda_m \to 0,$$

называемого *комплексом де Рама* многообразия M. В общем случае *комплекс* определяется как последовательность векторных пространств с линейными отображениями соседних пространств, обладающими тем свойством, что композиция любой пары последовательных отображений — тождественный нуль. В нашем случае последнее требование — это переформулировка свойства замкнутости $d \circ d = 0$ (1.55) дифференциала. Начальное отображение $\mathbb{R} \to \Lambda_0$ переводит константу $c \in \mathbb{R}$ в постоянную функцию (0-форму) $f(x) \equiv c$ на M. Отметим, что $dc = 0$ для любой постоянной c.

Определение комплекса требует, чтобы ядро каждого из линейных отображений содержало образ предыдущего отображения. Комплекс является *точным*, если это включение на самом деле является равенством. В случае комплекса де Рама точность означает, что *замкнутая* дифференциальная k-форма ω (это означает, что $d\omega \equiv 0$) обязательно является *точной* дифференциальной k-формой (это означает, что найдется $(k-1)$-форма θ, такая, что $\omega = d\theta$). (При $k = 0$ это означает, что гладкая функция f замкнута, $df = 0$, если и только если она постоянна.) Очевидно, что всякая точная форма замкнута, однако обратное, вообще говоря, неверно. Простой пример доставляет форма $\omega = (x^2 + y^2)^{-1}(y\,dx - x\,dy)$ на многообразии $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Легко видеть, что она замкнута, но не является дифференциалом никакой гладкой однозначной функции, определенной на всем многообразии M. Таким образом, комплекс де Рама, вообще говоря, *не является* точным. Замечательно, что чисто топологическая информация о многообразии M определяется тем, насколько неточен этот комплекс. Этот результат — знаменитая теорема де Рама — лежит за рамками настоящей книги, и мы отсылаем заинтересованного читателя к книгам Warner [1], Bott, Tu [1], в которых развивается эта прекрасная теория.

На локальном уровне для специальных типов областей евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ имеется лишь тривиальная топология, и точность комплекса де Рама *имеет место*. Этот результат, известный как *лемма Пуанкаре*, будет справедлив для *звездных областей* $M \subset \mathbb{R}^m$. «Звездность» означает, что с каждой точкой x область M содержит отрезок, соединяющий x с началом координат: $\{\lambda x : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\} \subset M$.

Теорема 1.61. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — звездная область. Тогда комплекс де Рама, построенный на M, точен.*

Пример 1.62. При $M \subset \mathbb{R}^m$ всякая m-форма ω единственным образом определяется одной гладкой функцией f: $\omega = f(x) \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$, где $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ — стандартная форма объема. (Это должно зависеть от нашего выбора координат.) Аналогично, всякая $(m-1)$-форма ξ определяется набором из m гладких функций $p = (p_1, \ldots, p_m)$, так что

$$\xi = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} p_j(x)\, dx^{\hat{j}},$$

где

$$dx^{\hat{j}} \equiv dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Дифференциал $\omega = d\xi$ тогда определяется как обычная дивергенция p:

$$f(x) = \operatorname{div} p(x) = \sum_{j=1}^{m} \partial p_j / \partial x^j.$$

Заметим, что всякая m-форма на $\mathbb{R}^m$ всегда замкнута, $d\omega = 0$, поскольку не существует ненулевых $(m+1)$-форм. Точность комплекса де Рама в члене $\bigwedge_m$, таким образом, означает, что всякая функция f, определенная на звездной подобласти пространства $\mathbb{R}^m$, может быть записана как дивергенция: $f = \operatorname{div} p$ для некоторого p. Аналогично, $(m-1)$-форма η определяется $m(m-1)/2$ функциями $q_{jk}(x)$, $j, k = 1, \ldots, m$, где $q_{jk} = -q_{kj}$, так что

$$\eta = \sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{m} (-1)^{j+k-1} q_{jk}(x)\, dx^{\widehat{jk}},$$

где

$$dx^{\widehat{jk}} = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Заметим, что условие $d\eta = \xi$ эквивалентно условию, что p — «обобщенный ротор» для q:

$$p_j(x) = \sum_{k=1}^{m} \partial q_{jk}/\partial x^k, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Точность комплекса де Рама в этом члене означает тогда, что каждое векторное поле $p(x)$, определенное на звездной области в $\mathbb{R}^m$ и являющееся бездивергентным ($\operatorname{div} p \equiv 0$), обязательно будет обобщенным ротором для некоторого такого q.

Производные Ли

Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле на многообразии M. Мы часто интересуемся тем, как некоторые геометрические объекты на M (такие, как функции, дифференциальные формы и другие векторные поля) изменяются под действием потока $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$, порожденного полем $\mathbf{v}$. *Производная Ли* такого объекта на самом деле укажет нам его инфинитезимальное изменение под действием этого потока. (А наши стандартные процедуры интегрирования укажут нам, как восстановить изменение под действием потока по этому инфинитезимальному изменению.) Например, поведение функции под действием потока, индуцированного векторным полем $\mathbf{v}$, было уже описано (ср. (1.17)), так что $\mathbf{v}(f)$ будет «производной Ли» от функции f по $\mathbf{v}$.

Более общо, пусть σ — дифференциальная форма или векторное поле, определенное на M. Данная точка $x \in M$ через «время» ε перейдет в точку $\exp(\varepsilon \mathbf{v})x$. Наша цель — сравнить значение σ в точке $\exp(\varepsilon \mathbf{v})x$ с ее исходным значением в точке x. Однако $\sigma|_{\exp(\varepsilon \mathbf{v})x}$ и $\sigma|_x$ так, как они есть, строго говоря, несравнимы, поскольку принадлежат разным векторным пространствам (например, в случае векторных полей, $TM|_{\exp(\varepsilon \mathbf{v})x}$ и $TM|_x$). Чтобы осуществить сравнение, нам нужно «переместить» $\sigma|_{\exp(\varepsilon \mathbf{v})x}$ обратно в точку x некоторым естественным способом, а затем проводить сравнение. Для векторных полей такое естественное перемещение — это обращение дифференциала

$$\varphi_\varepsilon^* \equiv d\exp(-\varepsilon\mathbf{v})\colon\ TM\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x} \to TM\,|_x,$$

тогда как для дифференциальных форм мы пользуемся отображением кодифференциала

$$\varphi_\varepsilon^* \equiv \exp(\varepsilon\mathbf{v})^*\colon\quad \wedge_k T^*M\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x} \to \wedge_k T^*M\,|_x.$$

Это позволяет нам дать общее определение производной Ли.

Определение 1.63. Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле на M, а σ — векторное поле или дифференциальная форма на M. *Производная Ли* от σ по $\mathbf{v}$ — это объект, значение которого в точке $x \in M$ равно

$$\mathbf{v}(\sigma)\,|_x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi_\varepsilon^*(\sigma\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}) - \sigma\,|_x}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \varphi_\varepsilon^*\left(\sigma\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}\right). \qquad (1.57)$$

(Отметим, что $\mathbf{v}(\sigma)$ — объект того же типа, что и σ.)

В случае, когда σ — векторное поле, его производная Ли — уже известный объект — это скобка Ли!

Предложение 1.64. *Пусть* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{w}$ — *гладкие векторные поля на* M. *Производная Ли от* $\mathbf{w}$ *по* $\mathbf{v}$ *совпадает со скобкой Ли полей* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{w}) = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]. \qquad (1.58)$$

Доказательство. Пусть $(x^1, \ldots, x^m)$ — локальные координаты, в которых $\mathbf{v} = \sum \xi^i(x)\,\partial/\partial x^i$, $\mathbf{w} = \sum \eta^i(x)\,\partial/\partial x^i$. Разлагая по степеням ε, мы видим, что

$$\mathbf{w}\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x} = \sum_{i=1}^{m} [\eta^i(x) + \varepsilon\mathbf{v}(\eta^i) + O(\varepsilon^2)]\,\frac{\partial}{\partial x^i},$$

следовательно, если воспользоваться (1.23) и (1.19),

$$d\exp(-\varepsilon\mathbf{v})\left[\mathbf{w}\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \{\eta^i(x) + \varepsilon[\mathbf{v}(\eta^i) - \mathbf{w}(\xi^i)] + O(\varepsilon^2)\}\,\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Подставляя это в определение (1.57), мы выводим (1.58) из (1.28). □

Обращаясь к дифференциальным формам, мы видим, что производную Ли легче всего найти, исходя из ее основных свойств:

(a) *линейности*:

$$\mathbf{v}(c\omega + c'\omega') = c\mathbf{v}(\omega) + c'\mathbf{v}(\omega'), \quad c, \ c' \text{ — константы}; \tag{1.59}$$

(b) *свойства дифференцирования*:

$$\mathbf{v}(\omega \wedge \theta) = \mathbf{v}(\omega) \wedge \theta + \omega \wedge \mathbf{v}(\theta); \tag{1.60}$$

(c) *коммутирования с внешним дифференцированием*:

$$\mathbf{v}(d\omega) = d\mathbf{v}(\omega). \tag{1.61}$$

Свойство коммутирования доказывается с помощью аналогичного свойства кодифференциала (1.56). Свойство дифференцирования доказывается точно так же, как правило Лейбница. На самом деле рассуждения такого типа распространяются на производные Ли более общих билинейных комбинаций геометрических объектов. Так, мы получаем полезную формулу

$$\mathbf{v}(\mathbf{w} \,\lrcorner\, \omega) = [\mathbf{v}, \ \mathbf{w}] \,\lrcorner\, \omega + \mathbf{w} \,\lrcorner\, \mathbf{v}(\omega) \tag{1.62}$$

для векторных полей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ и дифференциальной формы ω. (См. упр. 1.35.)

В локальных координатах производная Ли от дифференциальной формы определяется следующим образом. Если

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

то

$$\mathbf{v}(dx^i) = d\mathbf{v}(x^i) = d\xi^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Поэтому мы получаем общую формулу

$$\mathbf{v}\Big(\sum_I \alpha_I(x)\, dx^I\Big) =$$

$$= \sum_I \Big\{\mathbf{v}(\alpha_I)\, dx^I + \sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_I\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\xi^{i_\varkappa} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\Big\}. \tag{1.63}$$

Заметим, что три свойства (1.59)—(1.61) вместе с действием на гладкие функции однозначно определяют операцию взятия производной Ли. Например, если $M = \mathbb{R}^2$ и

$$\mathbf{v} = \xi(x, \ y)\,\partial_x + \eta(x, \ y)\,\partial_y,$$

то производная Ли от 2-формы равна

$$\mathbf{v}(\gamma(x,\ y)\,dx\wedge dy)=\mathbf{v}(\gamma)\,dx\wedge dy+\gamma\,d\xi\wedge dy+\gamma\,dx\wedge d\eta=$$
$$=\{\xi\gamma_x+\eta\gamma_y+\gamma\xi_x+\gamma\eta_y\}\,dx\wedge dy.$$

В частности, производная Ли от $dx\wedge dy$ по $\mathbf{v}=-y\partial_x+x\partial_y$, образующей группы вращений, есть тождественный нуль. Это отражает тот факт, что вращения в $\mathbb{R}^2$ сохраняют площадь. (См. упр. 1.36.)

Предложение 1.65. *Дифференциальная k-форма на M инвариантна относительно потока векторного поля* $\mathbf{v}$:

$$\omega\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}=\exp(-\varepsilon\mathbf{v})^*(\omega\,|_x),$$

если и только если $\mathbf{v}(\omega)=0$ *всюду. (Аналогичный результат справедлив для векторных полей.)*

Доказательство. Применяя $\varphi_\varepsilon^*=\exp(\varepsilon\mathbf{v})^*$ к (1.57) и пользуясь основными групповыми свойствами потока, убеждаемся, что

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})^*\left(\mathbf{v}(\omega)\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}\right)=\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\exp(\varepsilon\mathbf{v})^*\left(\omega\,|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}\right)\right\}\qquad(1.64)$$

для всех ε из области определения. Отсюда легко выводится наше предложение. □

Наиболее важная для наших целей формула — это формула, связывающая производную Ли и дифференциал.

Предложение 1.66. *Пусть* ω — *дифференциальная форма, а* $\mathbf{v}$ — *векторное поле на* M. *Тогда*

$$\mathbf{v}(\omega)=d(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\omega)+\mathbf{v}\,\lrcorner\,(d\omega).\qquad(1.65)$$

Доказательство. Определим оператор $\mathscr{L}_\mathbf{v}(\omega)$ правой частью равенства (1.65). Поскольку производная Ли однозначно определяется своим действием на функции и свойствами (1.59) — (1.61), достаточно проверить, что $\mathscr{L}_\mathbf{v}$ обладает теми же свойствами. Прежде всего,

$$\mathscr{L}_\mathbf{v}(f)=\mathbf{v}\,\lrcorner\,df=\langle df;\ \mathbf{v}\rangle=\mathbf{v}(f),$$

так что действие на функции такое же. Линейность оператора $\mathscr{L}_\mathbf{v}$ очевидна, а свойство замкнутости d немедленно доказывает свойство коммутирования:

$$\mathscr{L}_\mathbf{v}(d\omega)=d(\mathbf{v}\,\lrcorner\,d\omega)=d\mathscr{L}_\mathbf{v}(\omega).$$

Наконец, если ω есть k-форма, а θ есть l-форма, мы, пользуясь (1.52), (1.54), получаем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega\wedge\theta) &= d\,[(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\omega)\wedge\theta+(-1)^k\omega\wedge(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\theta)]+\\ &\quad+\mathbf{v}\,\lrcorner\,[(d\omega)\wedge\theta+(-1)^k\omega\wedge(d\theta)]=\\ &= d(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\omega)\wedge\theta+(-1)^{k-1}(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\omega)\wedge d\theta+\\ &\quad+(-1)^k(d\omega)\wedge(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\theta)+(-1)^{2k}\omega\wedge d(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\theta)+\\ &\quad+(\mathbf{v}\,\lrcorner\,d\omega)\wedge\theta+(-1)^{k+1}(d\omega)\wedge(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\theta)+\\ &\quad+(-1)^k(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\omega)\wedge(d\theta)+(-1)^{2k}\omega\wedge(\mathbf{v}\,\lrcorner\,d\theta)=\\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega)\wedge\theta+\omega\wedge\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\theta).\end{aligned}$$

Остальные члены сокращаются. □

Операторы гомотопии

Ключ к доказательству точности комплекса де Рама (или, если на то пошло, любого другого комплекса) лежит в построении подходящих *операторов гомотопии*. По определению это линейные операторы $h\colon \bigwedge_k \to \bigwedge_{k+1}$, переводящие дифференциальные k-формы в $(k-1)$-формы и удовлетворяющие основному тождеству

$$\omega = dh(\omega)+h(d\omega) \tag{1.66}$$

для всех k-форм ω. (Случай $k=0$, как разъясняется ниже, немного отличается от остальных.) Наличие таких операторов немедленно влечет за собой точность комплекса, потому что если форма ω замкнута, $d\omega=0$, то (1.66) приводит к равенству $\omega = d\theta$, где $\theta = h(\omega)$, так что форма ω точна. Таким образом, нам нужно лишь сосредоточиться на отыскании этих операторов гомотопии.

Вернемся к формуле (1.65) для производной Ли. Если бы мы могли обращаться с производной Ли как с обычной производной, то мы бы проинтегрировали обе части равенства (1.65) и вывели бы формулу гомотопии (1.66). Точнее, мы можем проинтегрировать формулу (1.64) для производной Ли по ε; пользуясь (1.65) и (1.56), находим

$$\begin{aligned}\exp(\varepsilon\mathbf{v})^*\left[\omega|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}\right]-\omega|_x &= \int_0^\varepsilon \exp(\tilde\varepsilon\mathbf{v})^*\left[\mathbf{v}(\omega)|_{\exp(\tilde\varepsilon\mathbf{v})x}\right]d\tilde\varepsilon=\\ &= \int_0^\varepsilon \left\{d\left[\exp(\tilde\varepsilon\mathbf{v})^*\left(\mathbf{v}\,\lrcorner\,\omega|_{\exp(\tilde\varepsilon\mathbf{v})x}\right)\right]+\right.\\ &\quad\left.+\exp(\tilde\varepsilon\mathbf{v})^*\left[\mathbf{v}\,\lrcorner\,d\omega|_{\exp(\tilde\varepsilon\mathbf{v})x}\right]\right\}d\tilde\varepsilon.\end{aligned}$$

Если мы определим оператор

$$h_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(\omega)|_x \equiv \int_0^{\varepsilon} \exp(\tilde{\varepsilon}\mathbf{v})^* \left[\mathbf{v} \rfloor \omega|_{\exp(\tilde{\varepsilon}\mathbf{v})x}\right] d\tilde{\varepsilon},$$

то получим формулу, похожую на формулу гомотопии,

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})^* \left[\omega|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}\right] - \omega|_x = dh_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(\omega)|_x + h_{\mathbf{v}}^{\varepsilon}(d\omega)|_x, \tag{1.67}$$

которая справедлива для любого многообразия M, любой дифференциальной формы ω, любого векторного поля $\mathbf{v}$ и всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$, таких, что определена $\exp(\varepsilon\mathbf{v})x$.

Сейчас мы в состоянии доказать лемму Пуанкаре (теорема 1.61) построением оператора гомотопии для звездной области $M \subset \mathbb{R}^m$. Отметим, что векторное поле растяжения $\mathbf{v}_0 = \sum x^i\partial/\partial x^i$ имеет поток $\exp(\varepsilon\mathbf{v})x = e^{\varepsilon}x$, который при $x \in M$ остается в M при всех $\varepsilon \leqslant 0$. Если $\omega = \sum \alpha_I(x)\,dx^I$ есть k-форма, определенная на всем M, то при $\varepsilon \leqslant 0$

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v}_0)^* \left[\omega|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v}_0)x}\right] = \exp(\varepsilon\mathbf{v}_0)^* \left[\sum_I \alpha_I(e^{\varepsilon}x)\,dx^I\right] = \sum_I \alpha_I(e^{\varepsilon}x)\,e^{k\varepsilon}\,dx^I,$$

поскольку $\exp(\varepsilon\mathbf{v}_0)^*(dx^i) = d(e^{\varepsilon}x^i) = e^{\varepsilon}dx^i$. Мы можем записать эту формулу в более простом виде, если обозначим ω через $\omega[x]$. Тогда получим

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v}_0)^*\,\omega[x] = \omega\left[e^{\varepsilon}x\right] = \sum \alpha_I\left(e^{\varepsilon}x\right) d\left(e^{\varepsilon}x^{i_1}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(e^{\varepsilon}x^{i_k}\right).$$

(Иными словами, мы подставляем $e^{\varepsilon}x^i$ вместо каждого x^i там, где x^i встречается в ω, включая дифференциалы dx^i.) В этом частном случае (1.67) при $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ принимает вид

$$\omega\left[e^{\varepsilon}x\right] - \omega[x] = dh_0^{\varepsilon}(\omega) + h_0^{\varepsilon}(d\omega), \tag{1.68}$$

где при $\varepsilon \leqslant 0$

$$h_0^{\varepsilon}(\omega) \equiv \int_0^{\varepsilon} (\mathbf{v}_0 \rfloor \omega)\left[e^{\tilde{\varepsilon}}x\right] d\tilde{\varepsilon} = -\int_{\log\varepsilon}^{1} (\mathbf{v}_0 \rfloor \omega)[\lambda x]\frac{d\lambda}{\lambda}$$

(мы использовали замену переменной $\lambda = \log\tilde{\varepsilon}$). Пусть теперь $\varepsilon \to -\infty$. Если ω есть k-форма и $k > 0$, то $\omega\,[e^{\varepsilon}x] \to 0$ при $\varepsilon \to -\infty$. Таким образом, (1.68) приводит к формуле гомотопии (1.66) с оператором гомотопии

$$h(\omega) = \int_0^1 (\mathbf{v}_0 \rfloor \omega)[\lambda x]\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{1.69}$$

(Заметим, что в этой формуле мы сначала вычисляем внутреннее произведение $\mathbf{v}_0 \lrcorner\, \omega$, а затем значение в точке λx.) Если, однако, $k=0$, так что ω — гладкая функция $f(x)$, то (1.68) приводит к другой формуле

$$f(x)-f(0)=dh(f)+h(df)=h(df)$$

в пределе при $\varepsilon \to -\infty$, а это приводит к исходному вложению $\mathbb{R} \to \Lambda_0$ в комплексе де Рама. Таким образом, доказательство леммы Пуанкаре завершено.

Пример 1.67. Рассмотрим плоскую звездную область $M \subset \mathbb{R}^2$. Если

$$\omega=\alpha(x,\ y)\,dx+\beta(x,\ y)\,dy$$

— произвольная 1-форма, то

$$\mathbf{v}_0 \lrcorner\, \omega=(x\partial_x+y\partial_y) \lrcorner\, \omega=x\alpha(x,\ y)+y\beta(x,\ y).$$

Поэтому функция $h(\omega)$, полученная применением нашего оператора гомотопии (1.69) к ω, имеет вид

$$h(\omega)=\int_0^1 \{\lambda x\alpha(\lambda x,\ \lambda y)+\lambda y\beta(\lambda x,\ \lambda y)\}\frac{d\lambda}{\lambda}=$$

$$=\int_0^1 \{x\alpha(\lambda x,\ \lambda y)+y\beta(\lambda x,\ \lambda y)\}\,d\lambda.$$

Аналогично, применение h к 2-форме дает 1-форму

$$h[\gamma(x,\ y)\,dx\wedge dy]=\int_0^1 \{\lambda^2x\gamma(\lambda x,\ \lambda y)\,dy-\lambda^2y\gamma(\lambda x,\ \lambda y)\,dx\}\frac{d\lambda}{\lambda}=$$

$$=-\left\{\int_0^1 \lambda y\gamma(\lambda x,\ \lambda y)\,d\lambda\right\}dx+\left\{\int_0^1 \lambda x\gamma(\lambda x,\ \lambda y)\,d\lambda\right\}dy,$$

интегрирование по λ не влияет на дифференциалы dx и dy. В частности, для указанной 1-формы

$$d\omega=(\beta_x-\alpha_y)\,dx\wedge dy,$$

так что формула гомотопии (1.66) приводит к двум формулам — для α и для β, первая из которых имеет вид

$$\alpha(x,\ y)=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \{x\alpha(\lambda x,\ \lambda y)+y\beta(\lambda x,\ \lambda y)\}\,d\lambda-$$

$$-\int_0^1 \lambda y\,[\beta_x(\lambda x,\ \lambda y)-\alpha_y(\lambda x,\ \lambda y)]\,d\lambda,$$

Читатель может получить удовольствие, непосредственно проверив это последнее утверждение. В частности, если $d\omega = 0$, то $\omega = df$, где $f = h(\omega)$ такая же, как и выше. Гезультат того же сорта справедлив и для 2-форм.

Интегрирование и теорема Стокса

Хотя это и не является центральным предметом темы нашей книги, было бы несправедливо во введении в дифференциальные формы обойтись без краткого обсуждения интегрирования и теоремы Стокса. В самом деле, дифференциальные формы возникают как «объекты, которые можно интегрировать на многообразиях». Чтобы определить интегрирование, нам нужно сначала *ориентировать* m-мерное многообразие M посредством не обращающейся в нуль m-формы ω, определенной на всем M. Другая не обращающаяся в нуль m-форма $\tilde{\omega}$ определяет ту же ориентацию, если она является положительным скалярным кратным формы ω в каждой точке. На таком многообразии M имеется в точности две ориентации. (Не каждое многообразие ориентируемо. Пример — лист Мёбиуса.) В частности, мы можем ориентировать $\mathbb{R}^m$ (и поэтому всякое его открытое подмножество), выбрав форму объема $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$. Отображение F: $\tilde{M} \to M$ двух ориентированных m-мерных многообразий *сохраняет ориентацию*, если кодифференциал ориентирующей формы на M определяет ту же ориентацию на $\tilde{M}$, что и была там задана. Если многообразие M ориентировано, то мы можем покрыть M сохраняющими ориентацию координатными картами χ_α: $U_\alpha \to V_\alpha$, так что функции перехода $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ будут сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами на $\mathbb{R}^m$.

Если M — ориентированное m-мерное многообразие, то мы можем определить интеграл $\int_M \omega$ от любой m-формы ω по M. В сущности, мы разрезаем M на части, отвечающие *ориентированным* координатным картам, и складываем отдельные интегралы

$$\int_{U_\alpha} \omega = \int_{V_\alpha} (\chi_\alpha^{-1})^* \omega = \int_{V_\alpha} f(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m,$$

здесь последний интеграл — обычный кратный интеграл по $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$. Формула замены переменных в кратном интеграле гарантирует независимость этого определения от выбора координат. Более общим образом, $\int_M \omega = \int_{\tilde{M}} F^*\omega$, если F: $\tilde{M} \to M$ сохраняет ориентацию.

Теорема Стокса связывает интегралы от m-форм по компактному m-мерному многообразию M с интегралами от $(m-1)$-форм по границе ∂M. Простейшее многообразие с границей — верхнее полупространство $\mathbb{H}^m = \{(x^1, \ldots, x^m)\colon x^m \geqslant 0\}$ пространства $\mathbb{R}^m$, причем $\partial \mathbb{H}^m = \{(x^1, \ldots, x^{m-1}, 0)\} \simeq \mathbb{R}^{m-1}$. Всякое другое многообразие с границей определяется с помощью координатных карт $\chi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{H}^m$ открыто (это означает, что $V_\alpha = \mathbb{H}^m \cap \tilde{V}_\alpha$, где $\tilde{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ открыто). Граница карты — это $\partial U_\alpha = \chi_\alpha^{-1}[\partial V_\alpha]$, $\partial V_\alpha = V_\alpha \cap \partial \mathbb{H}^m$, а ∂M — объединение всех таких границ координатных карт. Таким образом, ∂M — гладкое $(m-1)$-мерное многообразие без границы.

Граница полупространства $\mathbb{H}^m$ получает «индуцированную» ориентацию $(-1)^m dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{m-1}$ из формы объема $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$, определяющей ориентацию на самом $\mathbb{H}^m$. Если M — ориентированное многообразие с границей, то ∂M снабжается индуцированной ориентацией, так что всякая ориентированная координатная карта $\chi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ на M сужается до ориентированной координатной карты $\partial\chi_\alpha\colon \partial U_\alpha \to \partial V_\alpha$ на ∂M. Имея эти определения, мы можем сформулировать теорему Стокса в общем виде.

Теорема 1.68. *Пусть M — компактное ориентированное m-мерное многообразие с границей ∂M. Пусть ω — гладкая $(m-1)$-форма, определенная на M. Тогда* $\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega$.

Пользуясь отождествлением дифференциала d с обычными операциями дифференцирования векторов в $\mathbb{R}^3$, читатель может проверить, что теорема 1.68 приводит к обычной форме теоремы Стокса и теореме о дивергенции из векторного исчисления. Более общо, имеется тесная связь между комплексом де Рама, теоремой Стокса и топологией многообразия M, но дальнейшее обсуждение завело бы нас слишком далеко, и на этом мы заканчиваем краткое введение в этот предмет.

Замечания

В этой главе мы смогли дать лишь сокращенное введение в обширные и важные теории групп Ли и дифференцируемых многообразий. Имеется много прекрасных книг, которые с пользой для себя может изучить читатель, заинтересованный в дальнейшем углублении в эти области. Среди них — книги Warner [1], Boothby [1], Thirring [1; ch. 2] и Miller [2]. Книга Понтрягина [1] полезна как образец подхода к этому предмету, основанного на понятии локальной группы Ли. Она содержит