ном анализе.) Далее, вместо нашего термина «интегрируемый» чаще используют термин «вполне интегрируемый», но этот последний имеет совсем другие значения при изучении гамильтоновых систем, что и мотивирует наш выбор терминологии.

Дифференциальные формы берут свое начало в работе Грассмана и в попытках найти многомерное обобщение теоремы Стокса. В руках Пуанкаре и Картана они стали мощным инструментом в изучении дифференциальной геометрии, топологии и дифференциальных уравнений. Уже у Пуанкаре (Poincaré [1]) мы находим основные понятия внешнего произведения, внутреннего произведения, дифференциала и как многомерную форму теоремы Стокса, так и лемму, носящую его имя. См. также Cartan [1], где эта теория получает дальнейшее развитие и применяется к дифференциальным уравнениям. Понятие производной Ли, однако, в сущности, созданное Пуанкаре (см. также Cartan [1]), впервые было формально определено Схоутеном и его соавторами; см. Schouten, Struik [1; p. 142]. Эта последняя работа содержит также первое доказательство леммы Пуанкаре, основанное на основной формуле гомотопии. Наконец, связи с топологией, происходящие из теоремы де Рама, можно найти в книгах Warner [1; гл. 5] и Bott, Tu [1].

Упражнения

1.1. *Вещественное проективное m-мерное пространство* определяется как множество всех прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^{m+1}$. Точнее, мы определяем отношение эквивалентности на $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}$, полагая $x \sim y$, если и только если $x = \lambda y$ для некоторого ненулевого числа λ. Тогда $\mathbb{RP}^m$ — соответствующее множество всех классов эквивалентности в $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}$.

(a) Докажите, что $\mathbb{RP}^m$ — многообразие размерности m, предъявив координатные карты.

(b) Докажите, что $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$, и предъявите диффеоморфизм.

(c) Пусть S^m — единичная сфера в $\mathbb{R}^{m+1}$. Докажите, что отображение $F\colon S^m \to \mathbb{RP}^m$, ставящее в соответствие точке $x \in S^m$ ее класс эквивалентности в $\mathbb{RP}^m$, является гладким накрывающим отображением. Что будет прообразом $F^{-1}\{z\}$ точки $z \in \mathbb{RP}^m$?

***1.2.** *Грассмановы многообразия.* Пусть $0 < m < n$.

(a) Докажите, что пространство $\mathrm{GL}(m, n)$ всех матриц размера $m \times n$ максимального ранга — аналитическое многообразие размерности $m \cdot n$.

(b) Пусть $\mathrm{Grass}\,(m, n)$ обозначает множество всех m-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$. Покажите, что на $\mathrm{Grass}\,(m, n)$ можно задать структуру аналитического многообразия размерности $m(n-m)$. (*Указание.* Любому базису такого m-мерного подпространства соответствует матрица из $\mathrm{GL}(m, n)$, строки которой составляют этот базис. Покажите, что базис можно выбрать так, чтобы эта матрица имела m таких же столбцов, как единичная матрица; оставшиеся элементы дадут локальные координаты для $\mathrm{Grass}(m, n)$.)

(c) Пусть $\mathrm{F}\colon \mathrm{GL}(m, n) \to \mathrm{Grass}(m, n)$ — отображение, ставящее в соответствие матрице A подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, порожденное ее строками. Докажите, что F — аналитическое отображение многообразий.

(d) Докажите, что $\mathrm{Grass}(m, n)$ и $\mathrm{Grass}(n-m, n)$ — диффеоморфные многообразия. В частности, $\mathrm{Grass}(1, n) \simeq \mathrm{Grass}(n-1, n) \simeq \mathbb{RP}^{n-1}$.

1.3. Пусть $\varphi(t) = \left((\sqrt{2} + \cos 2t)\cos 3t,\ (\sqrt{2} + \cos 2t)\sin 3t,\ \sin 2t\right)$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Докажите, что образ φ — регулярная замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$ — «трилистник».

1.4. Пусть

$$\varphi(u, v) = \left(2\cos u + v \sin \frac{u}{2} \cos u,\ 2\sin u + v \sin \frac{u}{2} \sin u,\ v \cos \frac{u}{2}\right)$$

при $0 \leqslant u < 2\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Докажите, что φ — регулярное погружение, образ которого — лист Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$.

1.5. Докажите, что если $N \subset M$ — компактное подмногообразие, то N — регулярное подмногообразие. (Boothby [1; p. 79].)

1.6. Докажите, что m-мерная сфера S^m односвязна при $m \geqslant 2$. Что можно сказать о вещественном проективном пространстве $\mathbb{RP}^m$? (См. упр. 1.1.)

1.7. Пусть $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Докажите, что $(x, y) \longmapsto (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$ определяет накрывающее отображение из $\mathbb{R}^2$ на M и, следовательно, $\mathbb{R}^2$ односвязно накрывает $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

1.8. Пусть $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Докажите, что $\Psi(\varepsilon, (r, \theta)) = \left(re^{-\varepsilon} + (1 - e^{-\varepsilon}),\ \theta + \varepsilon\right)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, в полярных координатах определяет однопараметрическую группу преобразований. Найдите ее инфинитезимальную образующую. Докажите, что каждая орбита — регулярное подмногообразие в M, однако действие группы *не является* регулярным.

1.9. Рассмотрим систему векторных полей

$$\mathbf{v}_1 = x\partial_y - y\partial_x + z\partial_w - w\partial_z, \qquad \mathbf{v}_2 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_y - y\partial_w$$

на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

(a) Докажите, что $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ составляют интегрируемую систему. Что будет интегральными подмногообразиями в S^3?

(b) Пусть $\pi\colon S^3 \setminus \{(0, 0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^3$ — стереографическая проекция (как в примере 1.3). Какими будут векторные поля $d\pi(\mathbf{v}_1)$ и $d\pi(\mathbf{v}_2)$ на $\mathbb{R}^3$? Какими будут их интегральные подмногообразия?

1.10. Можно ли построить систему из трех векторных полей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ на $\mathbb{R}^3$, такую, что $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0 = [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$, но $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$? Можно ли построить интегрируемую систему с такими соотношениями коммутирования? Если можно, то как будут выглядеть интегральные подмногообразия такой системы?

1.11. Докажите, что векторное поле

$$\mathbf{v} = (-y - 2z(x^2 + y^2))\,\partial_x + x\partial_y + x(x^2 + y^2 - z^2 - 1)\,\partial_z$$

не задает регулярную систему на $\mathbb{R}^3$. Докажите, что всякая интегральная кривая поля $\mathbf{v}$ лежит в одном из торов, рассмотренных в примере 1.42. Докажите, что поток, порожденный полем $\mathbf{v}$, будучи ограниченным на один из этих торов, изоморфен либо рациональному, либо иррациональному потоку на торе в зависимости от размера тора.

1.12. Предположим, что $\mathbf{v}$ — гладкое линейное отображение на пространстве гладких функций, определенных вблизи точки $x \in M$, которое удовлетворяет условиям (1.20)—(1.21). Докажите, что $\mathbf{v}$ — касательный вектор к M в точке x. (Warner [1; с. 21].)

***1.13.** Пусть $M = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим систему векторных полей $\mathscr{H}$, порожденную полем $\mathbf{v}_0 = \partial_x$ и всеми векторными полями вида $f(x)\partial_y$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция, все производные которой в нуле равны нулю: $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(a) Докажите, что система $\mathscr{H}$ инволютивна.

(b) Докажите, что у $\mathscr{H}$ *нет* интегральных подмногообразий, проходящих через какую-либо точку $(0, y)$ на оси y.

(c) Как вы согласуете это с теоремой Фробениуса 1.40 или 1.41? (Nagano [1].)

*1.14. Пусть $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ — конечная инволютивная система векторных полей на многообразии M. Докажите, что эта система всегда инвариантна по рангу. (Таким образом, теорема 1.40 — частный случай теоремы 1.41.) (Hermann [1].)

1.15. Докажите, что множество всех неособых верхних треугольных матриц образует группу Ли $T(n)$. Какова ее алгебра Ли?

1.16. Рассмотрим матрицу размера $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица размера $n \times n$. Симплектическая группа $\mathrm{Sp}(n)$ определяется как множество всех матриц A размера $2n \times 2n$, таких, что $A^T J A = J$. Докажите, что $\mathrm{Sp}(n)$ является группой Ли, и вычислите ее размерность. Какова ее алгебра Ли?

1.17. Докажите, что если $H \subset G$ — связная однопараметрическая подгруппа группы Ли G, то H изоморфна либо $\mathrm{SO}(2)$, либо $\mathbb{R}$.

1.18. Докажите, что если G и H — группы Ли, то их декартово произведение $G \times H$ — также группа Ли.

1.19. Пусть G и H — группы Ли. Пусть G действует (глобально) на H как группа преобразований: $h \mapsto g \cdot h$, $g \in G$, $h \in H$, причем $g(h_1 \cdot h_2) = (g \cdot h_1) \cdot (g \cdot h_2)$. Определим *полупрямое произведение* групп G и H, которое будем обозначать через $G \ltimes H$, как группу Ли, структура многообразия у которой такая же, как у декартова произведения $G \times H$, а групповое умножение задается формулой

$$(g, h) \cdot (\tilde{g}, \tilde{h}) = (g \cdot \tilde{g},\ h \cdot (g \cdot \tilde{h})).$$

(a) Докажите, что $G \ltimes H$ — группа Ли.

(b) Как алгебра Ли группы $G \ltimes H$ связана с алгебрами Ли групп G и H?

(c) Докажите, что евклидова группа $\mathrm{E}(m)$, состоящая из всех сдвигов и вращений пространства $\mathbb{R}^m$, является полупрямым произведением группы вращений $\mathrm{SO}(m)$ и векторной группы $\mathbb{R}^m$, причем $\mathrm{SO}(m)$ действует на $\mathbb{R}^m$ как группа вращений. (См. также упр. 1.29.)

1.20. Пусть $V = \{(x, y) \colon |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Определим отображение $m \colon V \times V \to \mathbb{R}^2$ формулой

$$m(x, y; z, w) = \left(xz + x + z,\ xw + w + y(z+1)^{-1}\right), \quad (x, y), (z, w) \in V.$$

Докажите, что m — мультипликативное отображение, превращающее V в локальную группу Ли, построив для этого отображение взятия обратного $i \colon V_0 \to V$ на подходящей подобласти V_0. Какой будет алгебра Ли для V?

1.21. Докажите, что каждая двумерная алгебра Ли либо (a) абелева (все скобки равны нулю), либо (b) изоморфна алгебре Ли с базисом $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, удовлетворяющим соотношению $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{w}$. Найдите матричное представление из матриц размера 2×2 для алгебры Ли п. (b). Найдите соответствующую односвязную группу Ли. Постройте локальный изоморфизм групп из локальной группы Ли упр. 1.20 в эту глобальную группу Ли. (Jacobson [1; с. 20].)

1.22. Докажите, что $\mathbb{R}^3$ образует алгебру Ли со скобкой Ли, задаваемой векторным произведением: $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Какими будут структурные константы этой алгебры Ли в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$? Докажите, что эта алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{so}(3)$ — алгебре Ли трехмерной группы вращений. Покажите, что изоморфизм можно устроить так, что данному вектору $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ будет соответствовать инфинитезимальная образующая однопараметрической группы правых поворотов вокруг оси в направлении $\mathbf{v}$.

*1.23. Докажите, что каждая комплексная группа Ли содержит двумерную подгруппу. Справедливо ли это для вещественных групп Ли? (Cohen [1; p. 50].)

*1.24. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если $g^{-1}hg \in H$ для любого $h \in H$ и любого $g \in G$. Пусть G/H обозначает множество классов эквивалентности на G, где g и $\hat{g}$ эквивалентны, если и только если $g = \hat{g}h$ для некоторого $h \in H$.

(a) Докажите, что если $H \subset G$ — нормальная подгруппа, то на G/H естественно можно ввести структуру группы.

(b) Докажите, что подгруппа Ли H группы Ли G нормальна, если и только если ее алгебра Ли $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ обладает тем свойством, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \in \mathfrak{k}$, если $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ и $\mathbf{w} \in \mathfrak{k}$.

(c) Докажите, что если $H \subset G$ — нормальная подгруппа Ли, то *фактор-группа* G/H является группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Объясните это.

(d) Найдите все нормальные подгруппы двумерных групп Ли из упр. 1.21.

(e) Есть ли нормальные подгруппы у группы SO(3)?

*1.25. Пусть G — группа Ли. Ее *коммутант* H определяется как подгруппа, порожденная элементами $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.

(a) Докажите, что H — подгруппа Ли группы G и что алгебра Ли группы H — *производная подалгебра* алгебры $\mathfrak{g}$, определяемая равенством $\mathfrak{k} = \{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]\colon \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}\}$.

(b) Докажите, что коммутант группы SO(3) — сама группа SO(3). Что можно сказать о группе SO(m)?

(c) Какие коммутанты у двумерных групп Ли, рассмотренных в упр. 1.21?

1.26. Докажите предложение 1.24. (*Указание*. Докажите, что $\bigcup U^k$ и открыто, и замкнуто в G). (Warner [1; с. 111].)

1.27. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

(a) Докажите, что экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ является локальным диффеоморфизмом окрестности точки $0 \in \mathfrak{g}$ на окрестность единицы в G.

(b) Докажите формулу (1.40) для «нормальных координат». (Warner [1; с. 122 и далее].)

*1.28. Пусть SL(2) обозначает группу Ли матриц размера 2×2 с определителем, равным $+1$, и пусть $\mathfrak{sl}(2)$ — ее алгебра Ли.

(a) Пусть $A \in \mathfrak{sl}(2)$. Докажите, что

$$\exp A = \begin{cases} (\operatorname{ch} \delta)\, I + (\delta^{-1} \operatorname{sh} \delta)\, A, & \delta = \sqrt{-\det A}, \quad \det A < 0, \\ (\cos \delta)\, I + (\delta^{-1} \sin \delta)\, A, & \delta = \sqrt{\det A}, \quad \det A > 0. \end{cases}$$

Что будет в случае, когда $\det A = 0$?

(b) Рассмотрим матрицу $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2)$, где $\lambda \neq 0$. Докажите, что M лежит в точности в одной однопараметрической подгруппе группы SL(2) при $\lambda > 0$, в бесконечном числе однопараметрических подгрупп при $\lambda = -1$ *и не лежит ни в какой* однопараметрической подгруппе при $-1 \neq \lambda < 0$. (Это показывает, что экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ не является, вообще говоря, ни взаимно однозначным, ни отображением на!) (Helgason [1; с. 146].)

*1.29. Диффеоморфизм $\psi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ называется *изометрией*, если он сохраняет расстояние, т. е. $|d\psi(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}|$) для всех $\mathbf{v} \in T\mathbb{R}^m|_x$, $x \in \mathbb{R}^m$, где $|\cdot|$ — обычная евклидова метрика $\sum (dx^i)^2$, т. е.

$$|\mathbf{v}|^2 = \sum (\xi^i)^2, \quad \mathbf{v} = \sum \xi^i \partial/\partial x^i.$$

(a) Докажите, что векторное поле $\mathbf{v} = \sum \xi^i \partial/\partial x^i$ на $\mathbb{R}^m$ порождает однопараметрическую группу изометрий, если и только если его коэффициенты ξ^i удовлетворяют системе уравнений с частными производными

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0, \ i \neq j, \qquad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = 0, \ i = 1, \ldots, m.$$

(b) Докажите, что (связная) группа изометрий пространства $\mathbb{R}^m$, называемая евклидовой группой $\mathrm{E}(m)$, порождается сдвигами и поворотами и, следовательно, является $m(m+1)/2$-мерной группой Ли.

(c) Что получится, если заменить $|\cdot|$ некоторой неевклидовой метрикой? Например, рассмотрите метку Лоренца $(\partial x^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2$ на $\mathbb{R}^4$. (Eisenhart [1; гл. 6].)

*1.30. Диффеоморфизм $\psi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ называется *конформным преобразованием*, если $|d\psi(\mathbf{v})| = \lambda(x)\,|\mathbf{v}|$ для всех $\mathbf{v} \in T\mathbb{R}^m|_x$, $x \in \mathbb{R}^m$, где λ — некоторая числовая функция от x, а $|\mathbf{v}|$ — как в упр. 1.29.

(a) Докажите, что векторное поле $\mathbf{v} = \sum \xi^i(x)\partial/\partial x^i$ на $\mathbb{R}^m$ порождает однопараметрическую группу конформных преобразований, если и только если оно удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0, \ i \neq j, \qquad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = \mu(x), \ i = 1, \ldots, m, \qquad (*)$$

для некоторой функции $\mu(x)$.

(b) Докажите, что при $m \geqslant 3$ конформная группа пространства $\mathbb{R}^m$ есть $(m+1)(m+2)/2$-мерная группа Ли. Найдите ее инфинитезимальные образующие. (*Указание.* Докажите, что из $(*)$ следует, что *все* производные третьего порядка от функций ξ^i — тождественные нули.) Что можно сказать про случай $m = 2$?

(c) Докажите, что инверсия $I(x) = x/|x|^2$, $0 \neq x \in \mathbb{R}^m$, является конформным преобразованием на $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

(d) Докажите, что при $m \geqslant 3$ группа конформных преобразований порождается группами сдвигов и поворотов, группой растяжений $x \mapsto \lambda x$, $\lambda > 0$, и инверсией п. (c).

(e) Обсудите случай конформной группы для метрики Лоренца в $\mathbb{R}^4$. (См. упр. 1.29(c).) (Eisenhart [1; гл. 6].)

*1.31. Пусть $\pi\colon S^m \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^m$ — стереографическая проекция единичной сферы пространства $\mathbb{R}^{m+1}$. Докажите, что если $A \in \mathrm{SO}(m+1)$ — произвольный поворот сферы S^m, то A индуцирует конформное преобразование $\pi \circ A \circ \pi^{-1}$ пространства $\mathbb{R}^m$. Как должны соотноситься конформные преобразования, построенные в упр. 1.30, и повороты сферы S^m? Докажите, что при $m \geqslant 3$ конформная группа пространства $\mathbb{R}^m$ изоморфна группе $\mathrm{SO}(m+1)$, и обсудите, какие у них алгебры Ли.

1.32. Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на гладком многообразии M. Для каждой точки $x \in M$ *группа изотропии* G^x определяется следующим образом: $G^x = \{g \in G\colon g \cdot x = x\}$. Докажите, что G^x — (локальная) подгруппа группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}^x = \{\mathbf{v} \in \mathfrak{g}\colon \mathbf{v}|_x = 0\}$. Найдите подгруппы и подалгебры изотропии группы вращений $\mathrm{SO}(0)$, действующей на $\mathbb{R}^3$. Пусть $y = g \cdot x$. Как связаны группы изотропии G^y и G^x?

1.33. В большинстве изложений теории групп Ли алгебра Ли определяется как пространство *лево*инвариантных, а не *право*инвариантных векторных полей на группе Ли, как это принято у нас. В этом упражнении мы сравниваем эти два подхода.

(a) Дайте определение левоинвариантного векторного поля на группе Ли G. Докажите, что пространство всех левоинвариантных векторных полей на G образует алгебру Ли, обозначаемую $\mathfrak{g}_L$, которую мы можем отождествить с $TG|_e$.

(b) Пользуясь индексами $_L$ и $_R$, чтобы различить эти две алгебры Ли, докажите, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]_L = -[\mathbf{v}, \mathbf{w}]_R$, где векторные поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ отождествляются по своим значениям в e.

(c) Пусть группа G действует на многообразии M, как в определении 1.25. Если $\mathbf{v}$ лежит в $\mathfrak{g}_L$ или $\mathfrak{g}_R$, мы можем определить соответствующую инфинитезимальную образующую $\psi(\mathbf{v})$ на M. Покажите, что равенство (1.47), справедливое для правоинвариантных векторных полей, *неверно* для левоинвариантных векторных полей. Как меняется формула для скобки Ли (1.47) в этом случае? С другой стороны, докажите, что если $\mathbf{v}$ — левоинвариантное векторное поле и $\Psi_g(x) = \Psi(g, x)$, то

$$d\Psi_g(\psi(\mathbf{v})|_x) = \psi(\mathbf{v})|_{g\cdot x},$$

т. е. инфинитезимальные образующие действия G на M естественно ведут себя по отношению к преобразованиям из группы G. Покажите, что это *неверно* для правоинвариантных векторных полей.

(d) Какие произойдут изменения, если мы будем считать, что группа G действует на M *справа*, т. е. положим $x\cdot g = \Psi(x, g)$, $x\cdot(g\cdot h) = (x\cdot g)\cdot h$? (Marsden, Ratiu, Weinstein [1].)

1.34. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma)$ — векторное поле на $\mathbb{R}^3$, причем $\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha} = 0$. Пользуясь оператором гомотопии (1.69), постройте векторное поле $\boldsymbol{\lambda}$, такое, что $\nabla\times\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\alpha}$. Аналогично, если $\nabla\times\boldsymbol{\lambda} = 0$, то найдите функцию f, такую, что $\boldsymbol{\lambda} = \nabla f$.

1.35. (a) Пусть $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — векторные поля, а ω есть 1-форма. Докажите, что

$$\mathbf{v}\langle\omega; \mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v}(\omega); \mathbf{w}\rangle + \langle\omega; [\mathbf{v}, \mathbf{w}]\rangle.$$

(b) Более общо, если ω есть k-форма, докажите, что

$$\mathbf{v}\langle\omega; \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\rangle = \langle\mathbf{v}(\omega); \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\rangle + \sum_{i=1}^{k}\langle\omega; \mathbf{w}_1, \ldots, [\mathbf{v}, \mathbf{w}_i], \ldots, \mathbf{w}_k\rangle.$$

(c) Выведите, что

$$\mathbf{v}(\mathbf{w}\,\lrcorner\,\omega) = \mathbf{w}\,\lrcorner\,\mathbf{v}(\omega) + [\mathbf{v}, \mathbf{w}]\,\lrcorner\,\omega.$$

1.36. Пусть $\omega = dx^1\wedge\ldots\wedge dx^m$ есть m-форма объема в $\mathbb{R}^m$. Пусть $\mathbf{v} = \sum \xi^i(x)\,\partial/\partial x^i$ — векторное поле.

(a) Докажите, что производная Ли от ω равна $\mathbf{v}(\omega) = \operatorname{div}\xi\cdot\omega$, где $\operatorname{div}\xi = \sum \partial\xi^i/\partial x^i$ — обычная дивергенция.

(b) Докажите, что поток $\varphi_\varepsilon = \exp(\varepsilon\mathbf{v})$, порожденный полем $\mathbf{v}$, сохраняет объем (это означает, что $\operatorname{Vol}(\varphi_\varepsilon[S]) = \operatorname{Vol}(S)$ для любого $S\subset\mathbb{R}^m$, такого, что $\varphi_\varepsilon(x)$ определено для всех $x\in S$), если и только если $\operatorname{div}\xi = 0$ всюду.

1.37. Пусть $\partial_i = \partial/\partial x^i$, dx^i, $i = 1, \ldots, m$, — стандартные базисы в $T\mathbb{R}^m$ и $T^*\mathbb{R}^m$ соответственно. Пусть ω есть r-форма на $\mathbb{R}^m$. Докажите следующие формулы:

$$\partial_k\,\lrcorner\,(dx^l\wedge\omega) = -dx^l\wedge(\partial_k\,\lrcorner\,\omega), \qquad k\neq l,$$

$$\partial_k\,\lrcorner\,(dx^k\wedge\omega) = \omega - dx^k\wedge(\partial_k\,\lrcorner\,\omega),$$

$$\sum_{k=1}^{m}\partial_k\,\lrcorner\,(dx^k\wedge\omega) = (m-r)\,\omega.$$