Теорема Стокса связывает интегралы от m-форм по компактному m-мерному многообразию M с интегралами от $(m-1)$-форм по границе ∂M. Простейшее многообразие с границей — верхнее полупространство $\mathbb{H}^m=\{(x^1, \ldots, x^m)\colon x^m \geqslant 0\}$ пространства $\mathbb{R}^m$, причем $\partial\mathbb{H}^m=\{(x^1, \ldots, x^{m-1}, 0)\}\simeq\mathbb{R}^{m-1}$. Всякое другое многообразие с границей определяется с помощью координатных карт $\chi_\alpha\colon U_\alpha\to V_\alpha$, где $V_\alpha\subset\mathbb{H}^m$ открыто (это означает, что $V_\alpha=\mathbb{H}^m\cap\tilde{V}_\alpha$, где $\tilde{V}_\alpha\subset\mathbb{R}^m$ открыто). Граница карты — это $\partial U_\alpha=\chi_\alpha^{-1}[\partial V_\alpha]$, $\partial V_\alpha=V_\alpha\cap\partial\mathbb{H}^m$, а ∂M — объединение всех таких границ координатных карт. Таким образом, ∂M — гладкое $(m-1)$-мерное многообразие без границы.

Граница полупространства $\mathbb{H}^m$ получает «индуцированную» ориентацию $(-1)^m dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{m-1}$ из формы объема $dx^1\wedge\ldots\wedge dx^m$, определяющей ориентацию на самом $\mathbb{H}^m$. Если M — ориентированное многообразие с границей, то ∂M снабжается индуцированной ориентацией, так что всякая ориентированная координатная карта $\chi_\alpha\colon U_\alpha\to V_\alpha$ на M сужается до ориентированной координатной карты $\partial\chi_\alpha\colon\partial U_\alpha\to\partial V_\alpha$ на ∂M. Имея эти определения, мы можем сформулировать теорему Стокса в общем виде.

Теорема 1.68. *Пусть M — компактное ориентированное m-мерное многообразие с границей ∂M. Пусть ω — гладкая $(m-1)$-форма, определенная на M. Тогда* $\int\limits_{\partial M}\omega=\int\limits_M d\omega$.

Пользуясь отождествлением дифференциала d с обычными операциями дифференцирования векторов в $\mathbb{R}^3$, читатель может проверить, что теорема 1.68 приводит к обычной форме теоремы Стокса и теореме о дивергенции из векторного исчисления. Более общо, имеется тесная связь между комплексом де Рама, теоремой Стокса и топологией многообразия M, но дальнейшее обсуждение завело бы нас слишком далеко, и на этом мы заканчиваем краткое введение в этот предмет.

Замечания

В этой главе мы смогли дать лишь сокращенное введение в обширные и важные теории групп Ли и дифференцируемых многообразий. Имеется много прекрасных книг, которые с пользой для себя может изучить читатель, заинтересованный в дальнейшем углублении в эти области. Среди них — книги Warner [1], Boothby [1], Thirring [1; ch. 2] и Miller [2]. Книга Понтрягина [1] полезна как образец подхода к этому предмету, основанного на понятии локальной группы Ли. Она содержит много доказательств важных теорем, которые трудно найти где-либо еще. Можно было бы упомянуть и много других работ.

Исторически эти две области — дифференцируемые многообразия и группы Ли — тесно взаимодействовали в процессе их развития, причем каждая стимулировала дальнейшую работу в другой области. Тем не менее, сам Ли извлек исходную мотивировку из захватывающего успеха применения теории групп Галуа к решению полиномиальных уравнений и стремился создать аналогичную теорию для решения дифференциальных уравнений с помощью *своей* теории непрерывных групп. Хотя он не достиг этой цели (более изящная теория Пикара — Вессио является правильной «теорией Галуа дифференциальных уравнений» — см. Pommaret [2]), его плодотворное влияние на все аспекты этого предмета продолжается по сей день.

Во времена Ли все группы Ли были локальными группами и возникали конкретно как группы преобразований некоторого евклидова пространства. Глобальный абстрактный подход созревал довольно медленно. Первое современное определение многообразия с координатными картами появилось у Картана (Cartan [2]). (Сам Картан сыграл фундаментальную роль в истории групп Ли; его определение многообразия появилось под влиянием книги Вейля Weyl [1] о римановых поверхностях, а также близких идей Шрайера (см. Schreier [1]).) Переход от локальной группы Ли к сегодняшнему определению, использующему теорию многообразий, также был совершен Картаном (Cartan [2]). Кроме того, Картан ввел понятие односвязной накрывающей группы группы Ли и заметил, что односвязная накрывающая группа группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ не является подгруппой никакой матричной группы $\mathrm{GL}(n)$ (Cartan [3]). (Интересно, что имеется реализация этой глобальной группы как открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^3$ (Bargmann [1]).) Более доступный пример группы Ли, которую нельзя реализовать как группу матриц, можно найти в работе Birkhoff [1].

Фундаментальным инструментом Ли в его теории была инфинитезимальная форма группы Ли, называемая теперь алгеброй Ли. В локальном варианте теорема о соответствии между группой Ли и правоинвариантными или левоинвариантными векторными полями, образующими ее алгебру Ли, называется первой основной теоремой Ли. Восстановление локальной группы Ли по ее алгебре Ли составляет вторую основную теорему Ли; ее доказательство, не основанное на теореме Адо, можно найти в книге Понтрягина [1; теорема 89]. Построение глобальной группы Ли по ее алгебре Ли приведено у Картана (Cartan [3]); см. также Понтрягин [1; теорема 96]. Доказательство основано на современной теореме Адо из работы Адо [1] (см. также

Jacobson [1; гл. 6]), приведенное здесь доказательство — более новое. В третьей основной теореме Ли утверждается, что структурные константы однозначно определяют алгебру Ли и, следовательно, группу Ли. Полное доказательство существования общего соответствия между подгруппами группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли можно найти в книге Warner [1; теоремы 3.19 и 3.28]. Теорема 1.19 о замкнутых подгруппах групп Ли принадлежит Картану (Cartan [2]); доказательство см. Warner [1; теорема 3.42]. Теорема 1.57 о восстановлении группы преобразований по ее инфинитезимальным образующим восходит к Ли; доказательство см. у Понтрягина [1; теорема 98]. Использованное здесь определение регулярной группы преобразований основано на материале монографии Palais [1] и развивается далее в гл. 3.

Тогда как векторные поля берут свое начало в изучении математической физики, современная геометрическая формулировка во многом обязана работе Пуанкаре Poincaré [1], влияние которого, как и влияние Ли, прослеживается на всем предмете. Обозначение для векторного поля, принятое здесь и вообще в современной дифференциальной геометрии, однако, происходит из обозначения Ли инфинитезимальных образующих группы преобразований. Потоки векторных полей достаточно естественно возникают в механике жидкости; см. Wilczynski [1], где устанавливается связь между их физической и теоретико-групповой интерпретациями.

Теорема Фробениуса 1.43 изначально появилась как теорема о природе решений определенных систем однородных линейных уравнений с частными производными первого порядка; см. Frobenius [1] и обсуждение инвариантов в § 2.1. Ее превращение в теорему из дифференциальной геометрии впервые произошло в важной книге Chevalley [1] по группам Ли. (В этой книге в первый раз была собрана вместе большая часть современных определений и теорем по этому предмету.) Доказательство полурегулярного варианта теоремы Фробениуса можно найти в книге Warner [1; теорема 1.64], а доказательство, использующее современный метод, принадлежащий Вейнстейну, — в книге Abraham, Marsden [1; p. 93]. Этот результат распространил на системы векторных полей переменного ранга Херманн (Hermann [1], [2]). Впоследствии он был еще обобщен — см. Sussmann [1], — однако осталось еще много работы, в частности, по выяснению структуры особых множеств. В этих и других работах термины «распределение» или «дифференциальная система» применяются к тому, что мы просто называем системой векторных полей. (Такая терминология особенно сбивает с толку, когда она появляется в совершенно ином контексте в функциональном анализе.) Далее, вместо нашего термина «интегрируемый» чаще используют термин «вполне интегрируемый», но этот последний имеет совсем другие значения при изучении гамильтоновых систем, что и мотивирует наш выбор терминологии.

Дифференциальные формы берут свое начало в работе Грассмана и в попытках найти многомерное обобщение теоремы Стокса. В руках Пуанкаре и Картана они стали мощным инструментом в изучении дифференциальной геометрии, топологии и дифференциальных уравнений. Уже у Пуанкаре (Poincaré [1]) мы находим основные понятия внешнего произведения, внутреннего произведения, дифференциала и как многомерную форму теоремы Стокса, так и лемму, носящую его имя. См. также Cartan [1], где эта теория получает дальнейшее развитие и применяется к дифференциальным уравнениям. Понятие производной Ли, однако, в сущности, созданное Пуанкаре (см. также Cartan [1]), впервые было формально определено Схоутеном и его соавторами; см. Schouten, Struik [1; p. 142]. Эта последняя работа содержит также первое доказательство леммы Пуанкаре, основанное на основной формуле гомотопии. Наконец, связи с топологией, происходящие из теоремы де Рама, можно найти в книгах Warner [1; гл. 5] и Bott, Tu [1].

Упражнения

1.1. *Вещественное проективное m-мерное пространство* определяется как множество всех прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^{m+1}$. Точнее, мы определяем отношение эквивалентности на $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}$, полагая $x \sim y$, если и только если $x = \lambda y$ для некоторого ненулевого числа λ. Тогда $\mathbb{RP}^m$ — соответствующее множество всех классов эквивалентности в $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}$.

(a) Докажите, что $\mathbb{RP}^m$ — многообразие размерности m, предъявив координатные карты.

(b) Докажите, что $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$, и предъявите диффеоморфизм.

(c) Пусть S^m — единичная сфера в $\mathbb{R}^{m+1}$. Докажите, что отображение $F: S^m \to \mathbb{RP}^m$, ставящее в соответствие точке $x \in S^m$ ее класс эквивалентности в $\mathbb{RP}^m$, является гладким накрывающим отображением. Что будет прообразом $F^{-1}\{z\}$ точки $z \in \mathbb{RP}^m$?

***1.2.** *Грассмановы многообразия.* Пусть $0 < m < n$.

(a) Докажите, что пространство $\mathrm{GL}(m, n)$ всех матриц размера $m \times n$ максимального ранга — аналитическое многообразие размерности $m \cdot n$.

(b) Пусть $\mathrm{Grass}\,(m, n)$ обозначает множество всех m-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$. Покажите, что на $\mathrm{Grass}\,(m, n)$ можно задать структуру аналитического многообразия размерности $m(n-m)$. (*Указание.* Любому базису такого m-мерного подпространства соответствует матрица из $\mathrm{GL}(m, n)$, строки которой составляют этот базис. Покажите, что базис можно выбрать так, чтобы эта матрица имела m таких же столбцов, как единичная матрица; оставшиеся элементы дадут локальные координаты для $\mathrm{Grass}(m, n)$.)

(c) Пусть $\mathrm{F}: \mathrm{GL}(m, n) \to \mathrm{Grass}(m, n)$ — отображение, ставящее в соответствие матрице A подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, порожденное ее строками. Докажите, что F — аналитическое отображение многообразий.