2. Группы симметрий дифференциальных уравнений

Полная группа симметрий системы дифференциальных уравнений — это наибольшая локальная группа преобразований, действующих на независимые и зависимые переменные системы и обладающих свойством переводить решения системы в другие ее решения. Главная цель этой главы — дать удобный систематический вычислительный метод, явно определяющий полную группу симметрий произвольной заданной системы дифференциальных уравнений. Чтобы полностью использовать преимущества инфинитезимальной техники, развитой в предыдущей главе, мы сосредоточиваем внимание на связных локальных группах Ли симметрий, оставляя в стороне вопросы, относящиеся к дискретным симметриям (таким, как отражения). Прежде чем приступать к случаю дифференциальных уравнений, жизненно необходимо решить соответствующую задачу в более простой ситуации групп симметрий систем алгебраических уравнений, что мы и делаем в первом параграфе. Во втором параграфе изучается точное определение группы симметрий системы дифференциальных уравнений, что требует знания того, как именно элементы группы преобразуют решения. Соответствующий инфинитезимальный метод опирается на важное понятие «продолжения» действия группы на пространство производных зависимых переменных системы. Ключевая «формула продолжения» для инфинитезимальной образующей группы преобразований, данная в теореме 2.36, доставляет основу для систематического описания групп симметрий дифференциальных уравнений. Приложения к играющим важную роль в физике уравнениям с частными производными, включая уравнение теплопроводности, уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега — де Фриза и уравнения Эйлера течения идеальной жидкости, представлены в § 2.4.

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений Ли показал, каким образом знание однопараметрической группы симметрий позволяет понизить порядок уравнения на единицу. В частности, уравнение первого порядка с известной однопараметрической группой симметрий может быть решено в квадратурах. В случае групп симметрий высших размерностей ситуация более тонкая: вообще говоря, невозможно понизить порядок уравнения, инвариантного относительно r-параметрической группы симметрий, на r единиц, пользуясь только квадратурами. Мы подробно обсудим, как работает эта теория в случае многопараметрических групп симметрий уравнений высших порядков и систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В последнем параграфе этой главы рассматриваются более технические математические результаты, и читатель, ориентирующийся на приложения, на первых порах благополучно может его пропустить. Основная теорема, обратная к теореме о существовании групп симметрий, позволяет узнать, каждая ли (непрерывная) группа симметрий получается указанными методами. Кроме алгебраического условия максимальности ранга дополнительно требуется результат о существовании, известный как «локальная разрешимость». В случае аналитических систем эти вопросы связаны с проблемой существования у системы нехарактеристических направлений, что позволило бы применить теорему существования Коши — Ковалевской. Такие системы объявляются нормальными системами, однако существуют и анормальные системы — несколько примеров таких систем мы приводим. Правильное понимание этих вещей будет решающим для формулирования и доказательства в гл. 5 теорем Нётер, связывающих группы симметрий и законы сохранения.

2.1. СИММЕТРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Прежде чем рассматривать группы симметрий дифференциальных уравнений, важно как следует разобрать принципиально более простой случай групп симметрий систем алгебраических уравнений. Под системой алгебраических уравнений мы понимаем систему уравнений

$$F_\nu(x)=0, \quad \nu=1, \ldots, l,$$

где $F_1(x), \ldots, F_l(x)$ — гладкие вещественнозначные функции, заданные на точках x некоторого многообразия M. (Заметим, что прилагательное «алгебраические» используется лишь, чтобы отличить этот случай от систем дифференциальных уравнений; оно *не* означает, что F_ν должны быть многочленами — это произвольные дифференцируемые функции.) *Решение* — это точка $x \in M$, такая, что $F_\nu(x)=0$, $\nu=1, \ldots, l$. *Группой симметрий* системы будет локальная группа G преобразований, действующая на M и обладающая тем свойством, что G преобразует решения этой системы в другие ее решения. Иными словами, если x — решение, g — элемент группы и определено действие g на x, то мы требуем, чтобы $g \cdot x$ также было решением. В этом параграфе мы, главным образом, сосредоточимся на отыскании легко проверяемых условий того, что данная группа преобразований будет группой симметрий такой системы.

Инвариантные подмножества

Более общо, мы можем рассматривать группы симметрий произвольных подмножеств данного многообразия.

Определение 2.1. Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на многообразии M. Подмножество $\mathcal{S} \subset M$ называется *G-инвариантным*, а группа G называется *группой симметрий* подмножества $\mathcal{S}$, если для любых $x \in \mathcal{S}$ и $g \in G$, таких, что определено действие g на x, $g \cdot x \in \mathcal{S}$.

Пример 2.2. Пусть $M = \mathbb{R}^2$.

(a) Если G_c — однопараметрическая группа сдвигов

$$(x, y) \mapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

где c — некоторая фиксированная постоянная, то, как легко видеть, прямые $x = cy + d$ G_c-инвариантны, будучи в точности орбитами группы G_c. Можно также без труда увидеть, что всякое инвариантное подмножество в $\mathbb{R}^2$ является просто объединением некоторого набора таких прямых. Например, полоса $\{(x, y)\colon k_1 < x - cy < k_2\}$ G_c-инвариантна.

(b) В качестве второго элементарного примера рассмотрим однопараметрическую группу G^α растяжений (или *группу масштабных преобразований*)

$$(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda^\alpha y), \quad \lambda > 0,$$

где α — константа. Начало координат $(0, 0)$ есть G^α-инвариантное подмножество, как и положительные и отрицательные координатные полуоси (например $\{(x, 0)\colon x > 0\}$). Сами оси как объединения инвариантных подмножеств также инвариантны. Таким образом, подмногообразие $\{(x, y)\colon xy = 0\}$, состоящее из обеих координатных осей, инвариантно. Другие инвариантные множества имеют вид $y = k|x|^\alpha$ при $x > 0$ или $x < 0$ либо являются объединениями указанных орбит группы G^α.

В большинстве наших приложений множество $\mathcal{S}$ будет множеством решений или *подмногообразием*, определяемым как множество общих нулей набора гладких функций $F = (F_1, \ldots, F_l)$:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_F = \{x\colon\ F_\nu(x) = 0,\ \nu = 1, \ldots, l\}.$$

Если множества $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ G-инвариантны, то G-инвариантными будут и множества $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

Инвариантные функции

Кроме симметрий множества решений системы алгебраических уравнений мы можем рассматривать симметрии функции $F(x)$, задающей эту систему.

Определение 2.3. Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на многообразии M. Функция $F\colon M \to N$, где N — другое многообразие, называется *G-инвариантной функцией*, если для всех $x \in M$ и всех $g \in G$, таких, что определено действие g на x,

$$F(g \cdot x) = F(x).$$

Вещественнозначная G-инвариантная функция $\zeta\colon M \to \mathbb{R}$ называется просто *инвариантом* группы G. Заметим, что отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^l$ G-инвариантно, если и только если каждая его компонента F_ν $(F = (F_1, \ldots, F_l))$ — инвариант группы G.

Пример 2.4. (a) Пусть G_c — группа сдвигов на плоскости, рассмотренная в примере 2.2(a). Тогда функция

$$\zeta(x, y) = x - cy$$

является инвариантом группы G_c, поскольку

$$\zeta(x + c\varepsilon, y + \varepsilon) = \zeta(x, y)$$

для всех ε. На самом деле нетрудно видеть, что *всякий* инвариант этой группы сдвигов имеет вид $\tilde{\zeta}(x, y) = f(x - cy)$, где f — гладкая функция одной переменной $x - cy$.

(b) Для группы растяжений

$$G^1\colon\ (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda > 0,$$

функция

$$\zeta(x, y) = x/y$$

является инвариантом, определенным на верхней и нижней полуплоскостях $\{y \neq 0\}$. Среди других инвариантов — угловая координата $\theta = \operatorname{Arctg}(y/x)$, гладкая, скажем, на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y): x \leqslant 0\}$, но не являющаяся глобально однозначной, и функция

$$\tilde{\zeta}(x, y) = xy/(x^2 + y^2),$$

гладкая всюду, кроме начала координат. В этом случае у группы G^1 не существует отличного от постоянной гладкого глобально определенного инварианта. Аналогичные замечания применимы и к более общим группам растяжений G^α из примера 2.2(b) с $\alpha > 0$.

Если F: $M \to \mathbb{R}^l$ есть G-инвариантная функция, то очевидно, что каждое множество уровня функции F будет G-инвариантным подмножеством многообразия M. Однако *неверно*, что если множество нулей гладкой функции $\{x: F(x) = 0\}$ — инвариантное подмножество многообразия M, то и сама функция инвариантна. Например, как мы видели в предыдущем примере, $\{(x, y): xy = 0\}$ — инвариантное подмножество группы растяжений G^1. Но $F(x, y) = xy$ не является инвариантной функцией этой группы, поскольку

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 xy \neq F(x, y)$$

при $\lambda \neq 1$. Однако если *каждое* множество уровня функции F инвариантно, то F — инвариантная функция.

Предложение 2.5. *Если группа G действует на многообразии M и F: $M \to \mathbb{R}^l$ — гладкая функция, то F будет G-инвариантной функцией, если и только если каждое множество уровня $\{F(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}^l$, будет G-инвариантным подмножеством многообразия M.*

Доказательство этого результата мы оставляем читателю. Таким образом, в примере 2.4(a) прямые $x = cy + d$ — это просто множества уровня G_c-инвариантной функции $\zeta(x, y) = x - cy$, и, следовательно, они автоматически являются G_c-инвариантными подмножествами. Обратно, G_c-инвариантность функции ζ следует из того факта, что каждое ее множество уровня G_c-инвариантно (на самом деле это орбиты группы G_c).

Другая точка зрения на предыдущие наблюдения состоит в том, что полная группа симметрий множества решений $\mathcal{S}_F = \{F(x) = 0\}$ некоторой системы алгебраических уравнений, вообще говоря, больше, чем группа симметрий функции F, задающей это множество решений. Здесь «полная группа симметрий» означает, в не совсем строгом смысле, наибольшую группу преобразований, оставляющих многообразие или функцию инвариантными. Для алгебраических уравнений такая группа обычно не конечномерна, но идея этого замечания должна быть ясна. Важность расширения нашего понятия симметрии на симметрии множества решений, а не определяющих их функций, станет очевидной, когда мы обратимся к группам симметрий дифференциальных уравнений, и приведет нас к большему разнообразию групп симметрий.

Инфинитезимальная инвариантность

Мощь теории групп Ли заложена в решающем наблюдении, что сложные нелинейные условия инвариантности подмножества или функции относительно самих преобразований из группы можно заменить эквивалентным линейным условием **инфинитезимальной** инвариантности относительно соответствующих инфинитезимальных образующих действия группы. Этот инфинитезимальный критерий легко проверяется на практике и, таким образом, дает ключ к явному отысканию групп симметрий систем дифференциальных уравнений. Важность его нельзя переоценить. Мы начинаем с более простого случая инвариантной функции. Здесь инфинитезимальный критерий инвариантности следует непосредственно из основной формулы, описывающей, как меняется функция под действием потока, порожденного векторным полем.

Предложение 2.6. *Пусть G — связная группа преобразований, действующая на многообразии M. Гладкая вещественнозначная функция $\zeta\colon M \to \mathbb{R}$ является инвариантной функцией группы G, если и только если*

$$\mathbf{v}(\zeta) = 0 \ \text{для всех} \ x \in M \tag{2.1}$$

и каждой инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ группы G.

Доказательство. В соответствии с (1.17), если $x \in M$, то

$$\frac{d}{d\varepsilon}\zeta(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = \mathbf{v}(\zeta)[\exp(\varepsilon\mathbf{v})x],$$

когда выражение $\exp(\varepsilon\mathbf{v})x$ определено. Подстановка $\varepsilon = 0$ доказывает необходимость условия (2.1). Обратно, если условие (2.1) выполнено всюду, то

$$\frac{d}{d\varepsilon}\zeta(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = 0$$

в области определения, а следовательно, $\zeta(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x)$ — константа для связной локальной однопараметрической подгруппы $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ группы $G_x = \{g \in G\colon g\cdot x \text{ определено}\}$. Но в силу (1.40) каждый элемент группы G_x можно записать в виде конечного произведения экспонент инфинитезимальных образующих $\mathbf{v}_i$ группы G, и, значит, $\zeta(g\cdot x)=\zeta(x)$ для всех $g\in G_x$. □

Если образующие $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ составляют базис алгебры Ли инфинитезимальных образующих группы G (эту алгебру мы обозначим $\mathfrak{g}$), то предложение 2.6 утверждает, что функция $\zeta(x)$ — инвариант, если и только если $\mathbf{v}_k(\zeta)=0$, $k=1, \ldots, r$. В локальных координатах

$$\mathbf{v}_k=\sum_{i=1}^{m}\xi_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

так что функция ζ должна быть решением однородной системы линейных уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathbf{v}_k(\zeta)=\sum_{i=1}^{m}\xi_k^i(x)\frac{\partial\zeta}{\partial x^i}=0,\quad k=1, \ldots, r. \tag{2.2}$$

Пример 2.7. Для группы сдвигов G_c из примера 2.4(а) инфинитезимальная образующая — это векторное поле $\mathbf{v}=c\partial_x+\partial_y$. Имеем

$$\mathbf{v}(x-cy)=(c\partial_x+\partial_y)(x-cy)=c-c=0,$$

так что условие инфинитезимального критерия выполнено. Аналогичное вычисление проверяет инфинитезимальный критерий (2.1) для инвариантов группы растяжений G^α, инфинитезимальной образующей которой является векторное поле $x\partial_x+\alpha y\partial_y$.

Для случая множества решений системы алгебраических уравнений $F(x)=0$ инфинитезимальный критерий инвариантности требует выполнения дополнительных условий на определяющие функции F, а именно условия максимальиости раига из определения 1.7. (Если функция F случайно оказалась G-инвариантной, то в силу предложения 2.5 условие максимальности ранга может быть опущено, однако в общем случае оно существенно.)

Теорема 2.8. *Пусть G — связная локальная группа Ли преобразований, действующая на m-мерном многообразии M. Пусть отображение $F\colon M\to\mathbb{R}^l$, $l\leqslant m$, определяет систему алгебраических уравнений*

$$F_\nu(x)=0,\quad \nu=1, \ldots, l.$$

Предположим, что это система максимального ранга, т. е. что ее матрица Якоби $(\partial F_\nu/\partial x^k)$ имеет ранг l в каждой точке x, *являющейся решением системы. Тогда G — группа симметрий этой системы, если и только если*

$$\mathbf{v}[F_\nu(x)]=0, \quad \nu=1, \ \ldots, \ l, \ \textit{когда} \ F(x)=0, \tag{2.3}$$

для каждой инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ группы G. (Подчеркнем, что требование (2.3) накладывается лишь на решения x системы.)

Доказательство. Необходимость условия (2.3) получается дифференцированием тождества

$$F(\exp(\varepsilon\mathbf{v})\,x)=0,$$

в котором x — решение, а $\mathbf{v}$ — инфинитезимальная образующая группы G, по ε и подстановкой $\varepsilon=0$.

Для доказательства достаточности предположим, что x_0 — решение системы. Используя условие максимальности ранга, мы можем выбрать локальные координаты $y=(y^1, \ldots, y^m)$ так, чтобы в них $x_0=0$, а отображение F имело простой вид $F(y)=(y^1, \ldots, y^l)$, ср. теорему 1.8. Пусть

$$\mathbf{v}=\xi^1(y)\frac{\partial}{\partial y^1}+\ldots+\xi^m(y)\frac{\partial}{\partial y^m}$$

— произвольная инфинитезимальная образующая группы G, выраженная в новых координатах. Условие (2.3) означает, что

$$\mathbf{v}(y^\nu)=\xi^\nu(y)=0, \quad \nu=1, \ \ldots, \ l, \tag{2.4}$$

если только $y^1=y^2=\ldots=y^l=0$. Далее, поток $\varphi(\varepsilon)=\exp(\varepsilon v)\cdot x_0$ векторного поля $\mathbf{v}$ через точку $x_0=0$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi^i}{d\varepsilon}=\xi^i(\varphi(\varepsilon)), \quad \varphi^i(0)=0, \quad i=1, \ \ldots, \ m.$$

В силу (2.4) и единственности решения с данными начальными условиями мы заключаем, что $\varphi^\nu(\varepsilon)=0$ для $\nu=1, \ldots, l$ и достаточно малого ε. Таким образом, мы показали, что если x_0 — решение системы $F(x)=0$, $\mathbf{v}$ — произвольная инфинитезимальная образующая группы G и ε — достаточно малое число, то $\exp(\varepsilon\mathbf{v})\cdot x_0$ снова будет решением системы. Поскольку множество решений $\mathcal{S}_F=\{x\colon F(x)=0\}$ замкнуто, свойство (1.13) и непрерывиость $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ позволяют сделать такое же заключение для всех $g=\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ в связной однопараметрической подгруппе группы G_{x_0}, порожденной $\mathbf{v}$. Применение формулы (1.40) аналогично тому, как это было сделано в доказательстве предложения 2.6, завершает доказательство теоремы в общем случае. □

Пример 2.9. Пусть $G = \mathrm{SO}(2)$ — группа вращений плоскости с инфинитезимальной образующей $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$. Единичная окружность $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ — инвариантное подмножество группы $\mathrm{SO}(2)$, поскольку это множество нулей инвариантной функции $\zeta(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; действительно,

$$\mathbf{v}(\zeta) = -2xy + 2xy = 0$$

всюду, так что условие (2.3) справедливо на самой единичной окружности. Выполнение условия максимальности ранга для ζ следует из того, что градиент $\nabla\zeta = (2x, 2y)$ не обращается в нуль на S^1; впрочем, как было замечено перед теоремой 2.8, нам на самом деле не нужно проверять это условие, поскольку ζ — инвариантная функция.

В качестве менее тривиального примера рассмотрим функцию

$$F(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^2 - 1.$$

Имеем

$$\mathbf{v}(F) = -4x^3y - 2xy^3 + 2x^3y + 2xy = -2xy(x^2 + 1)^{-1}F(x, y),$$

следовательно, $\mathbf{v}(F) = 0$ при $F = 0$. Кроме того,

$$\nabla F = (4x^3 + 2xy^2, \ 2x^2y + 2y)$$

обращается в нуль лишь при $x = y = 0$, но эта точка не является решением уравнения $F(x, y) = 0$; значит, условие максимальности ранга выполняется. Мы заключаем, что множество решений $\{(x, y): x^4 + x^2y^2 + y^2 = 1\}$ — инвариантное относительно вращений подмножество пространства $\mathbb{R}^2$. Действительно, мы можем разложить F на множители:

$$x^4 + x^2y^2 + y^2 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1),$$

следовательно, множество решений — это в точности единичная окружность. Заметим, что функция $F(x, y)$ *не будет* в этом случае $\mathrm{SO}(2)$-инвариантной; на самом деле большинство других множеств уровня функции F *не будут* инвариантны относительно вращений.

Наконец, чтобы подчеркнуть важность условия максимальности ранга, рассмотрим функцию

$$H(x, y) = y^2 - 2y + 1.$$

Множество решений $\{H(x, y)=0\}$ — горизонтальная прямая $\{y=1\}$, не инвариантная, очевидно, относительно вращений. Однако

$$\mathbf{v}(H)=2xy-2x=2x(y-1)=0$$

при $H(x, y)=0$, так что инфинитезимальное условие (2.3) в этом случае не выполняется. Дело в том, что $\nabla H=(0, 2y-2)$ обращается в нуль на всем множестве решений, так что условие максимальности ранга не выполняется.

Условие максимальности ранга необходимо для применения нашего критерия инфинитезимальной симметрии, играющего ключевую роль в развитии теории как алгебраических, так и дифференциальных уравнений. В дальнейшем нам понадобится несколько элементарных следствий этого условия, и мы сформулируем их здесь для удобства ссылок. Доказательства намечены в упр. 2.5.

Предложение 2.10. *Пусть $F\colon M\to\mathbb{R}^l$ — отображение максимального ранга на подмногообразии $\mathscr{S}_F=\{x\colon F(x)=0\}$. Тогда вещественнозначная функция $f\colon M\to\mathbb{R}$ обращается в нуль на $\mathscr{S}_F$, если и только если существуют такие гладкие функции $Q_1(x), \ldots, Q_l(x)$, что*

$$f(x)=Q_1(x)F_1(x)+\ldots+Q_l(x)F_l(x) \tag{2.5}$$

для всех $x\in M$.

Здесь снова существенно условие максимальности ранга. Например, пусть $F(x,y)=y^2-2y+1$. Тогда функция $f(x,y)=$ $=y-1$ обращается в нуль на всех решениях уравнения $F(x,y)=0$, а именно иа множестве $\mathscr{S}_F=\{y=1\}$, однако не существует такой гладкой функции $Q(x, y)$, что $f(x, y)=$ $=Q(x, y)F(x, y)$.

Согласно предложению 2.10, мы можем заменить инфинитезимальный критерий (2.3) инвариантности эквивалентным условием

$$\mathbf{v}(F_\nu)=\sum_{\mu=1}^{l} Q_{\nu\mu}(x)F_\mu(x), \quad \nu=1, \ldots, l, \quad x\in M, \tag{2.6}$$

для функций $Q_{\nu\mu}\colon M\to\mathbb{R}$, $\mu, \nu=1, \ldots, l$, которые надо определить. На самом деле мы доказывали таким способом инвариантность во втором случае в примере 2.9, где $Q(x, y)=$ $=-2xy/(x^2+1)$. *Оба* условия (2.3) и (2.6) полезны для проверки инвариантности, и оба они будут использоваться в различных примерах.

Функции $Q_\nu(x)$ из (2.5), вообще говоря, определены неоднозначно. Например, пусть

$$F_1(x, y, z) = x, \quad F_2(x, y, z) = y,$$

так что множество решений $\mathscr{S} = \{F_1 = F_2 = 0\}$ — ось z в $\mathbb{R}^3$. Функция

$$f(x, y, z) = xz + y^2$$

обращается в нуль на $\mathscr{S}$ и на самом деле может быть записана как

$$f = zF_1 + yF_2 \quad \text{или} \quad f = (z - y)F_1 + (x + y)F_2.$$

Вообще говоря, если

$$f(x) = \sum_\nu Q_\nu(x) F_\nu(x) = \sum_\nu \tilde{Q}_\nu(x) F_\nu(x),$$

то разности $R_\nu(x) = Q_\nu(x) - \tilde{Q}_\nu(x)$ удовлетворяют однородной системе

$$\sum_{\nu=1}^{l} R_\nu(x) F_\nu(x) = 0 \tag{2.7}$$

для всех $x \in M$. Следующее предложение указывает некоторые свойства таких функций.

Предложение 2.11. *Пусть отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^l$ имеет максимальный ранг на $\mathscr{S}_F = \{F(x) = 0\}$. Пусть $R_1(x), \ldots, R_l(x)$ — вещественные функции, удовлетворяющие системе* (2.7) *для всех $x \in M$. Тогда $R_\nu(x) = 0$ для всех $x \in \mathscr{S}_F$ и существуют функции $S_\nu^\mu(x)$, $\nu, \mu = 1, \ldots, l$,* такие, что

$$R_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{l} S_\nu^\mu(x) F_\mu(x), \quad x \in M. \tag{2.8}$$

Более того, функции S_ν^μ можно выбрать кососимметричными по индексам:

$$S_\nu^\mu(x) = -S_\mu^\nu(x),$$

и в этом случае условие (2.8) *необходимо и достаточно для того, чтобы условие* (2.7) *выполнялось всюду.*

Локальная инвариантность

Полезно также ввести понятие локально инвариантной функции или подмножества относительно группы преобразований. В этом случае мы требуем лишь инвариантности относительно преобразований из группы, достаточно близких к тождественному.

Определение 2.12. Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на многообразии M. Подмножество $\mathcal{S} \subset M$ называется *локально G-инвариантным*, если для любого $x \in \mathcal{S}$ существует окрестность $\tilde{G}_x \subset G_x$ единицы группы G, такая, что $g \cdot x \in \mathcal{S}$ для всех $g \in \tilde{G}_x$. Гладкая функция F: $U \to N$, где U — некоторое открытое подмножество в M, называется *локально G-инвариантной*, если для любого $x \in U$ существует окрестность $\tilde{G}_x$ единицы e в G, такая, что $F(g \cdot x) = F(x)$ для всех $g \in \tilde{G}_x$. Функция F называется *глобально G-инвариантной* (даже если она определена лишь на открытом подмножестве многообразия M), если $F(g \cdot x) = F(x)$ для всех $x \in U$, $g \in G$, таких, что $g \cdot x \in U$.

Пример 2.13. Пусть G — группа горизонтальных сдвигов

$$(x, y) \mapsto (x + \varepsilon, y)$$

в $\mathbb{R}^2$. Тогда отрезок

$$\{(x, y): y = 0, -1 < x < 1\}$$

является локально G-инвариантным, но не G-инвариантным.

Аналогично, функция

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \text{ или } y > 0 \text{ и } x > 0, \\ e^{-1/y}, & y > 0 \text{ и } x < 0, \end{cases}$$

является гладкой и локально G-инвариантной на $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y): y \geqslant 0\}$, поскольку

$$\zeta(x + \varepsilon, y) = \zeta(x, y)$$

для $|\varepsilon| < |x|$; ясно, что ζ не является глобально G-инвариантной.

Предложение 2.14. *Пусть $N \subset M$ — подмногообразие многообразия M. Тогда N локально G-инвариантно, если и только если $\mathfrak{g}|_x \subset TN|_x$ для всякого $x \in N$. Иными словами, N локально G-инвариантно, если и только если инфинитезимальные образующие $\mathbf{v}$ группы G всюду касаются N.*

Доказательство мы оставляем читателю; см. упр. 2.1.

Инварианты и функциональная зависимость

Часто возникает вопрос, «сколько» инвариантов имеет данная группа преобразований. Чтобы точно поставить задачу, заметим прежде всего, что если $\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x)$ — инварианты (локальные либо глобальные) группы преобразований и $F(z^1, \ldots, z^k)$ — произвольная гладкая функция, то $\zeta(x) =$

$= F(\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x))$ тоже будет инвариантом (того же типа). Такой инвариант не добавляет никакой новой информации в данной задаче и называется *функционально зависимым* от предыдущих инвариантов $\zeta^1, \ldots, \zeta^k$. Практически нам нужно лишь классифицировать функционально независимые инварианты действия группы, все остальные инварианты получаются с помощью соотношений указанного вида.

Определение 2.15. Пусть $\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x)$ — гладкие вещественные функции, определенные на многообразии M. Тогда

(a) функции $\zeta^1, \ldots, \zeta^k$ называются *функционально зависимыми*, если для всякого $x \in M$ существуют окрестность U точки x и гладкая вещественная функция $F(z^1, \ldots, z^k)$, не равная тождественно нулю ни на каком открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^k$, такая, что

$$F(\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x)) = 0 \tag{2.9}$$

для всех $x \in U$;

(b) функции $\zeta^1, \ldots, \zeta^k$ называются *функционально независимыми*, если они не являются функционально зависимыми ни при каком ограничении на открытое подмножество $U \subset M$; иными словами, если функция $F(z^1, \ldots, z^k)$ такова, что для всех x из некоторого открытого подмножества $U \subset M$ выполнено (2.9), то $F(z^1, \ldots, z^k) \equiv 0$ для всех z из некоторого открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^k$ (которое содержится в образе U).

Например, функции x/y и $xy/(x^2+y^2)$ функционально зависимы на $\{(x, y)\colon y \neq 0\}$, поскольку там

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x/y}{1+(x/y)^2} = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

С другой стороны, x/y и $x+y$ функционально независимы в их области определения, так как если $F(x+y, x/y) \equiv 0$ для (x, y) из произвольного открытого подмножества в $\mathbb{R}^2$, то по теореме об обратной функции образ содержит открытое подмножество из $\mathbb{R}^2$, на котором $F = 0$.

Заметим, что функциональная зависимость и функциональная независимость не исчерпывают все возможности, кроме случая аналитических функций, в котором обращение в нуль (2.9) в некотором открытом множестве влечет за собой обращение в нуль всюду. Например, гладкие функции

$$\eta(x, y) = x, \quad \zeta(x, y) = \begin{cases} x, & y \leqslant 0, \\ x + e^{-1/y}, & y > 0, \end{cases}$$

зависимы в нижней полуплоскости $\{y<0\}$, независимы в верхней полуплоскости $\{y>0\}$ и *не являются ни зависимыми, ни независимыми* на всей плоскости (x, y). Наконец, заметим, что функции $\zeta^1, \ldots, \zeta^k$ могут быть локально функционально зависимы, но может не существовать такой функции $F(z^1, \ldots, z^k)$, не являющейся тождественным нулем, что (2.9) выполняется для всех $x \in M$. Например, образ $\{(\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x)): x \in M\}$ может быть всюду плотным в некотором открытом подмножестве из $\mathbb{R}^k$, так что (2.9) будет справедливо лишь при $F \equiv 0$.

Классическое необходимое и достаточное условие функциональной зависимости функций $\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x)$ состоит в том, что их матрица Якоби $(\partial\zeta^i/\partial x^j)$ размера $k \times m$ всюду имеет ранг $\leqslant k-1$. (См. замечания в конце этой главы, относящиеся к доказательству данного результата.)

Теорема 2.16. *Пусть $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^k)$ — гладкое отображение из M в $\mathbb{R}^k$. Тогда $\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x)$ функционально зависимы, если и только если $d\zeta|_x$ имеет ранг строго меньше k для всех $x \in M$.*

Основная теорема, касающаяся числа независимых инвариантов группы преобразований, состоит в следующем.

Теорема 2.17. *Пусть группа G полурегулярно действует на m-мерном многообразии M и ее орбиты s-мерны. Если $x_0 \in M$, то существует ровно $m-s$ функционально независимых локальных инвариантов $\zeta^1(x), \ldots, \zeta^{m-s}(x)$, определенных в окрестности точки x_0. Более того, всякий другой инвариант действия группы, определенный вблизи точки x_0, имеет вид*

$$\zeta(x) = F(\zeta^1(x), \ldots, \zeta^{m-s}(x)), \tag{2.10}$$

где F — некоторая гладкая функция. Если действие группы G регулярно, то эти инварианты можно выбрать так, чтобы они были глобально инвариантны в окрестности точки x_0.

Доказательство. Пользуясь теоремой Фробениуса 1.43, мы можем выбрать плоские локальные координаты $y = \psi(x)$ вблизи точки x_0 для системы векторных полей $\mathfrak{g}$, порожденной инфинитезимальными образующими группы G, в которых орбиты группы G будут слоями $\{y^1 = c_1, \ldots, y^{m-s} = c_{m-s}\}$. Тогда новые координаты $y^1 = \zeta^1(x), \ldots, y^{m-s} = \zeta^{m-s}(x)$ сами будут локальными инвариантами для G, будучи постоянными на каждом слое. Более того, всякий иной инвариант группы G тоже должен быть постоянным на этих слоях и, следовательно может быть только функцией от $y^1, \ldots, y^{m-s}$. Наконец, если группа G действует регулярно, мы можем выбрать нашу плоскую координатную карту так, чтобы каждая орбита пересекала ее не более чем по одному слою. В этом случае $y^1, \ldots, y^{m-s}$ на самом деле будут глобальными инвариантами. □

В классической терминологии построенные в этой теореме инварианты называются *полной системой функционально независимых инвариантов.* Мы показали, что если найдена такая полная система, то любой другой инвариант группы G можно выразить как функцию от этих инвариантов. Имеется аналогичный результат и для инвариантных подмногообразий.

Предложение 2.18. *Пусть группа G действует на многообразие M полурегулярно, и пусть $\zeta^1(x), \ldots, \zeta^{m-s}(x)$ — полная система функционально независимых инвариантов, определенных на некотором открытом подмножестве $W \subset M$. Если подмногообразие $\mathcal{S}_F = \{x\colon F(x) = 0\}$ G-инвариантно, то для каждого решения $x_0 \in \mathcal{S}_F$ существует окрестность $\tilde{W} \subset W$ точки x_0 и «эквивалентная» G-инвариантная функция $\tilde{F}(x) = \tilde{F}(\zeta^1(x), \ldots \ldots, \zeta^{m-s}(x))$, множество решений которой совпадает с множеством решений функции F в $\tilde{W}$:*

$$\mathcal{S}_F \cap \tilde{W} = \mathcal{S}_{\tilde{F}} \cap \tilde{W} = \{x \in \tilde{W}\colon \tilde{F}(\zeta^1(x), \ldots, \zeta^{m-s}(x)) = 0\}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что мы можем пополнить систему инвариантов $y^1 = \zeta^1(x), \ldots, y^{m-s} = \zeta^{m-s}(x)$ так, чтобы получить плоские локальные координаты $y = (y^1, \ldots, y^m)$ для G вблизи точки x_0. На самом деле недостающие координаты $\hat{y} = (y^{m-s+1}, \ldots, y^m)$ можно выбрать среди данных координат $(x^1, \ldots, x^m)$, так что $\hat{y} = \hat{x} = (x^{i_1}, \ldots \ldots, x^{i_s})$. Например, если $\partial(\zeta^1, \ldots, \zeta^{m-s})/\partial(x^1, \ldots, x^{m-s}) \neq 0$ в точке x_0, то мы можем положить $\hat{x} = (x^{m-s+1}, \ldots, x^m)$. Такая замена координат имеет вид $y = \psi(x) = (\zeta(x), \hat{x})$, где $\zeta(x)$ обозначает инварианты, а компоненты $\hat{x}$ называются *параметрическими переменными.* Мы пишем $F(x) = F^*(y) = F^*(\zeta(x), \hat{x})$ в этих координатах, так что $F^* = F \circ \psi^{-1}$. Положим

$$\tilde{F}(\zeta(x)) = F^*(\zeta(x), \hat{x}_0),$$

где $\hat{x}_0$ — значение параметрических переменных $\hat{x}$ в точке x_0. Поскольку подмногообразие $\mathcal{S}_F$ G-инвариантно и орбиты группы G в этих координатах — общие множества уровня (или слои) $\{\zeta(x) = c\}$ инвариантов, мы получаем, что $F^*(\zeta(x), \hat{x}) = 0$, если и только если $F^*(\zeta(x), \hat{x}_0) = 0$, так как обе точки лежат в одном и том же слое. □

Заметим, что если сама функция F не G-инвариантна, то соответствующая функция $\tilde{F}$ не будет с ней совпадать; совпадают лишь их множества решений. Например, в случае, представленном в примере 2.9, функция $F(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^2 - 1$ имеет то же множество решений, что и $SO(2)$-инвариантная функция $\tilde{F}(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, хотя они, очевидно, нигде не совпадают.

Методы построения инвариантов

Осталось показать, как найти инварианты данного действия группы. Предположим сначала, что G — однопараметрическая группа преобразований, действующая на M, с инфинитезимальной образующей

$$\mathbf{v} = \xi^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \xi^m(x)\frac{\partial}{\partial x^m},$$

выраженной в некоторых данных локальных координатах. Локальный инвариант $\zeta(x)$ группы G — это решение линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка

$$\mathbf{v}(\zeta) = \xi^1(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^1} + \ldots + \xi^m\frac{\partial \zeta}{\partial x^m} = 0. \qquad (2.11)$$

Теорема 2.17 утверждает, что если $\mathbf{v}|_x \neq 0$, то существует $m-1$ функционально независимых инвариантов; следовательно, уравнение (2.11) имеет в окрестности точки x_0 $m-1$ функционально независимых решений.

Классическая теория таких уравнений показывает, что общее решение уравнения (2.11) можно найти интегрированием соответствующей *характеристической системы* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \ldots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}. \qquad (2.12)$$

Решения системы (2.12) имеют вид

$$\zeta^1(x^1, \ldots, x^m) = c_1, \ \ldots, \ \zeta^{m-1}(x^1, \ldots, x^m) = c_{m-1},$$

где $c_1, \ldots, c_{m-1}$ — постоянные интегрирования, а $\zeta^i(x)$ — функции, не зависящие от c_j. Теперь легко видеть, что функции $\zeta^1, \ldots, \zeta^{m-1}$ — искомые функционально независимые решения уравнения (2.11). Любой другой инвариант, т. е. любое другое решение уравнения (2.11), обязан быть функцией от $\zeta^1, \ldots$ $\ldots, \zeta^{m-1}$. Проиллюстрируем эту технику двумя примерами.

Пример 2.19. (а) Рассмотрим группу вращений $SO(2)$, имеющую инфинитезимальную образующую $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$. Соответствующая характеристическая система — это

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x},$$

т. е. обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое легко решается; его решения $x^2 + y^2 = c$, где c — произвольная постоянная. Таким образом, $\zeta(x, y) = x^2 + y^2$ (или любая функция от ζ) — единственный независимый инвариант группы вращений.

(b) Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2)\frac{\partial}{\partial z},$$

определенное на $\mathbb{R}^3$. Заметим, что $\mathbf{v}$ никогда не обращается в нуль, поэтому можно найти два независимых инварианта однопараметрической группы, порожденной векторным полем $\mathbf{v}$, в окрестности любой точки в $\mathbb{R}^3$. Характеристической системой в этом случае является

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Первое из этих двух уравнений было решено в примере (а), так что один из инвариантов — радиус $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Чтобы найти другой инвариант, заметим, что r постоянно для всех решений характеристической системы, поэтому мы можем, прежде чем интегрировать, заменить x на $\sqrt{r^2 - y^2}$. Это приводит к уравнению

$$\frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{dz}{1 + z^2},$$

которое имеет решение

$$\arcsin\frac{y}{r} = \operatorname{arctg} z + k,$$

где k — произвольная постоянная. Таким образом,

$$\operatorname{arctg} z - \arcsin\frac{y}{r} = \operatorname{arctg} z - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

— второй независимый инвариант для v. Немного более простое выражение получится, если взять тангенс от этого инварианта, который равен $(xz - y)/(yz + x)$, так что

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \zeta = \frac{xz - y}{yz + x}$$

доставляют полную систему функционально независимых инвариантов (при $yz \neq -x$). Как обычно, всякая функция от r и ζ также является инвариантом, так что, например,

$$\tilde{\zeta} = \frac{r}{\sqrt{1+\zeta^2}} = \frac{x+yz}{\sqrt{1+z^2}}$$

тоже инвариант, который вместе с r составляет еще одну пару независимых инвариантов. (Эта итерационная техника, использующая знание некоторых инвариантов для упрощения вычисления оставшихся инвариантов, вообще очень полезна при решении характеристических систем.)

Вычисление независимых инвариантов r-параметрических групп преобразований при $r > 1$ может оказаться очень сложным. Если векторные поля $\mathbf{v}_k = \sum \xi_k^i(x)\,\partial/\partial x^i$, $k = 1, \ldots, r$, составляют базис инфинитезимальных образующих, то, чтобы найти инварианты, нужно решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\mathbf{v}_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^i} = 0, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Иными словами, каждый инвариант ζ должен быть *общим инвариантом* для всех векторных полей $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Один способ состоит в том, чтобы сначала вычислить инварианты одного векторного поля, скажем, $\mathbf{v}_1$. Поскольку всякий общий инвариант ζ должен быть, в частности, инвариантом поля $\mathbf{v}_1$, мы можем записать ζ как некоторую функцию от вычисленных инвариантов поля $\mathbf{v}_1$. Таким образом, можно найти выражения для оставшихся векторных полей $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, пользуясь инвариантами поля $\mathbf{v}_1$ как координатами, а затем искать общие инварианты этих «новых» $r-1$ векторных полей. Индуктивное осуществление этой процедуры приведет в конце концов к общим инвариантам всех векторных полей, выраженным в терминах общих инвариантов первых $r-1$ из них. Этот процесс станет яснее на примере.

Пример 2.20. Рассмотрим векторные поля

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{w} = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2+1-x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

на $\mathbb{R}^3$. Они рассматривались в примере 1.42, где было показано, что они порождают двухпараметрическую абелеву группу преобразований на $\mathbb{R}^3$, регулярную на $M = \mathbb{R}^3 \setminus (\{x=y=0\} \cup$

$\cup\{x^2+y^2=1,\ z=0\})$. Инвариант $\zeta(x, y, z)$ — решение пары уравнений $\mathbf{v}(\zeta)=0=\mathbf{w}(\zeta)$. Прежде всего заметим, что независимые инварианты поля $\mathbf{v}$ — это в точности $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и z. Выразим теперь поле $\mathbf{w}$ через r и z:

$$\mathbf{w}=2rz\frac{\partial}{\partial r}+(z^2+1-r^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Поскольку ζ должна быть функцией от инвариантов r, z векторного поля $\mathbf{v}$, она должна быть решением дифференциального уравнения

$$\mathbf{w}(\zeta)=2rz\frac{\partial\zeta}{\partial r}+(z^2+1-r^2)\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0.$$

Характеристической системой в этом случае будет

$$\frac{dr}{2rz}=\frac{dz}{z^2+1-r^2}.$$

Решая это обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем, что

$$\zeta=\frac{z^2+r^2+1}{r}=\frac{x^2+y^2+z^2+1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

является единственным независимым инвариантом этой группы. (Этот результат был дан в примере 1.42 без подробных промежуточных вычислений.)

2.2. ГРУППЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предположим, что мы рассматриваем систему $\mathscr{S}$ дифференциальных уравнений, включающую p независимых переменных $x=(x^1, \ldots, x^p)$ и q зависимых переменных $u=(u^1, \ldots, u^q)$. Решения этой системы будут иметь вид $u=f(x)$, или, покомпонентно, $u^\alpha=f^\alpha(x^1, \ldots, x^p)$, $\alpha=1, \ldots, q$ [1]. Пусть $X=\mathbb{R}^p$ с координатами $x=(x^1, \ldots, x^p)$ — пространство, представляющее независимые переменные, и пусть $U=\mathbb{R}^q$ с координатами $u=(u^1, \ldots, u^q)$ представляет зависимые переменные. Группа симметрий системы $\mathscr{S}$ — это локальная группа преобразований, которую мы обозначаем через G, действующая на некотором открытом подмножестве $M\subset X\times U$ таким образом, что «G переводит решения системы $\mathscr{S}$ в другие решения системы $\mathscr{S}$». Отметим, что в нашем определении симметрии мы допускаем про-

[1]) Мы систематически используем латинские буквы для верхних или нижних индексов, когда речь идет о независимых переменных, и греческие буквы, когда речь идет о зависимых переменных.