$\cup\{x^2+y^2=1,\ z=0\})$. Инвариант $\zeta(x, y, z)$ — решение пары уравнений $\mathbf{v}(\zeta)=0=\mathbf{w}(\zeta)$. Прежде всего заметим, что независимые инварианты поля $\mathbf{v}$ — это в точности $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и z. Выразим теперь поле $\mathbf{w}$ через r и z:

$$\mathbf{w}=2rz\frac{\partial}{\partial r}+(z^2+1-r^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Поскольку ζ должна быть функцией от инвариантов r, z векторного поля $\mathbf{v}$, она должна быть решением дифференциального уравнения

$$\mathbf{w}(\zeta)=2rz\frac{\partial\zeta}{\partial r}+(z^2+1-r^2)\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0.$$

Характеристической системой в этом случае будет

$$\frac{dr}{2rz}=\frac{dz}{z^2+1-r^2}.$$

Решая это обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем, что

$$\zeta=\frac{z^2+r^2+1}{r}=\frac{x^2+y^2+z^2+1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

является единственным независимым инвариантом этой группы. (Этот результат был дан в примере 1.42 без подробных промежуточных вычислений.)

2.2. ГРУППЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предположим, что мы рассматриваем систему $\mathcal{S}$ дифференциальных уравнений, включающую p независимых переменных $x=(x^1, \ldots, x^p)$ и q зависимых переменных $u=(u^1, \ldots, u^q)$. Решения этой системы будут иметь вид $u=f(x)$, или, покомпонентно, $u^\alpha=f^\alpha(x^1, \ldots, x^p)$, $\alpha=1, \ldots, q$ [1]). Пусть $X=\mathbb{R}^p$ с координатами $x=(x^1, \ldots, x^p)$ — пространство, представляющее независимые переменные, и пусть $U=\mathbb{R}^q$ с координатами $u=(u^1, \ldots, u^q)$ представляет зависимые переменные. Группа симметрий системы $\mathcal{S}$ — это локальная группа преобразований, которую мы обозначаем через G, действующая на некотором открытом подмножестве $M\subset X\times U$ таким образом, что «G переводит решения системы $\mathcal{S}$ в другие решения системы $\mathcal{S}$». Отметим, что в нашем определении симметрии мы допускаем про-

---

[1]) Мы систематически используем латинские буквы для верхних или нижних индексов, когда речь идет о независимых переменных, и греческие буквы, когда речь идет о зависимых переменных.

извольные нелинейные преобразования и зависимых, и независимых переменных.

Чтобы действовать строго, мы должны точно объяснить, как данное преобразование g из группы Ли G преобразует функцию $u = f(x)$. Мы начинаем с отождествления функции $u = f(x)$ и ее графика

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \colon x \in \Omega\} \subset X \times U,$$

где $\Omega \subset X$ — область определения функции f. Заметим, что Γ_f — некоторое p-мерное подмногообразие в $X \times U$. Если

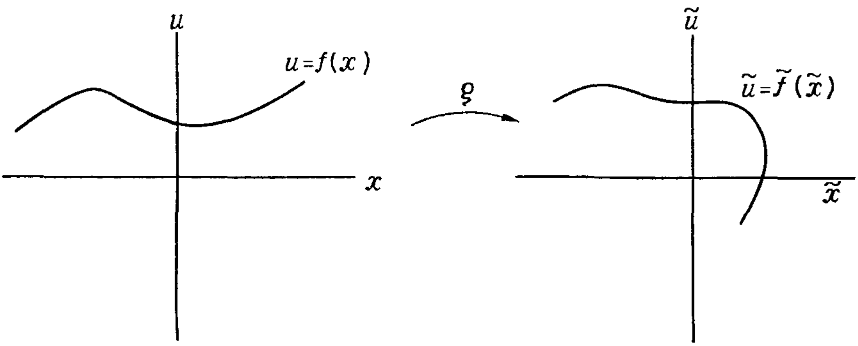

Рис. 6. Действие группы преобразований на функцию.

$\Gamma_f \subset M_g$, где M_g — область определения преобразования g, то преобразование g переводит Γ_f в

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) \colon (x, u) \in \Gamma_f\}.$$

Множество $g \cdot \Gamma_f$ не обязано быть графиком какой-либо однозначной функции $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Однако, поскольку группа G действует гладко и единичный элемент группы G оставляет Γ_f неизменным, подходящим образом уменьшив область определения Ω функции f, мы гарантируем, что для элемента g, близкого к единичному, результат преобразования $g \cdot \Gamma_f = \Gamma_{\tilde{f}}$ является графиком некоторой одозначной гладкой функции $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Мы пишем $\tilde{f} = g \cdot f$ и называем функцию $\tilde{f}$ *образом* функции f при преобразовании g.

Пример 2.21. Пусть $p = 1$, $q = 1$, так что $X = \mathbb{R}$ с единственной независимой переменной x и $U = \mathbb{R}$ с единственной зависимой переменной u. (Таким образом, мы находимся в ситуации, когда есть одно обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее одну функцию $u=f(x)$.) Пусть $G=\mathrm{SO}(2)$ — группа вращений, действующая на $X\times U\simeq\mathbb{R}^2$. Преобразования из группы G задаются формулой

$$(\tilde{x},\ \tilde{u})=\theta\cdot(x,\ u)=(x\cos\theta-u\sin\theta,\ x\sin\theta+u\cos\theta). \tag{2.13}$$

Предположим, что $u=f(x)$ — функция, графиком которой является подмножество $\Gamma_f\subset X\times U$. Группа $\mathrm{SO}(2)$ действует на f вращением ее графика. Очевидно, что, если угол θ достаточно велик, повернутый график $\theta\cdot\Gamma_f$ не будет графиком однозначной функции. Однако если $f(x)$ определена на конечном интервале $a\leqslant x\leqslant b$ и $|\theta|$ не слишком велик, то $\theta\cdot\Gamma_f$ будет графиком корректно определенной функции $\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})$, $\Gamma_{\tilde{f}}=\theta\cdot\Gamma_f$.

В качестве характерного примера рассмотрим линейную функцию

$$u=f(x)=ax+b.$$

Ее график — прямая, так что, повернув его на угол θ, мы получим другую прямую, которая, если только она не оказалась вертикальной, будет графиком другой линейной функции $\theta\cdot f=$ $=\tilde{f}$, образа функции f при вращении на угол θ. Чтобы получить точную формулу для $\theta\cdot f$, заметим, что по формуле (2.13) точка $(x,\ u)=(x,\ ax+b)$ на графике функции f перейдет в точку

$$(\tilde{x},\ \tilde{u})=(x\cos\theta-(ax+b)\sin\theta,\ x\sin\theta+(ax+b)\cos\theta).$$

Чтобы найти $\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})$, мы должны исключить x из пары уравнений; это можно сделать, если $\operatorname{ctg}\theta\neq 0$ (в частности, если угол θ достаточно близок к 0), т. е. если график не вертикален. Получаем

$$x=\frac{\tilde{x}+b\sin\theta}{\cos\theta-a\sin\theta},$$

следовательно, $\theta\cdot f=\tilde{f}$ задается формулой

$$\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})=\frac{\sin\theta+a\cos\theta}{\cos\theta-a\sin\theta}\tilde{x}+\frac{b}{\cos\theta-a\sin\theta}.$$

Это, как мы отметили ранее, снова линейная функция.

В общем случае процедура нахождения образа $\tilde{f}=g\cdot f$ функции f почти такая же, как в этом элементарном примере. Предположим, что преобразование g задано в координатах формулой

$$(\tilde{x},\ \tilde{u})=g\cdot(x,\ u)=(\Xi_g(x,\ u),\ \Phi_g(x,\ u)),$$

где Ξ_g, Φ_g — гладкие функции. Тогда график $\Gamma_{\tilde{f}}=g\cdot\Gamma_f$ функции $g\cdot f$ параметрически задается уравнениями

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=\Xi_g(x,\ f(x))=\Xi_g\circ(\mathbb{1}\times f)(x),\\ \tilde{u}&=\Phi_g(x,\ f(x))=\Phi_g\circ(\mathbb{1}\times f)(x).\end{aligned}\qquad x\in\Omega.$$

Здесь $\mathbb{1}$ обозначает функцию, тождественную на X, так что $\mathbb{1}(x) = x$, а $\times$ — декартово произведение функций. Чтобы явно найти $\tilde{f} = g \cdot f$, мы должны исключить x из этих двух систем уравнений. Поскольку при $g = e$ $\Xi_e \circ (\mathbb{1} \times f) = \mathbb{1}$, мы знаем, что для g, достаточно близкого к единичному элементу, матрица Якоби отображения $\Xi_g \circ (\mathbb{1} \times f)$ невырожденна, и, следовательно, по теореме об обратной функции мы можем локально разрешить первую систему относительно x:

$$x = [\Xi_g \circ (\mathbb{1} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

Подстановка во вторую систему дает требуемое уравнение для $g \cdot f$:

$$g \cdot f = [\Phi_g \circ (\mathbb{1} \times f)] \circ [\Xi_g \circ (\mathbb{1} \times f)]^{-1}, \tag{2.14}$$

которое имеет место, если обратим второй сомножитель. Эта общая формула довольно громоздкая, чего и следовало ожидать, исходя из нашего опыта работы с линейными функциями и группой вращений.

Пример 2.22. Рассмотрим частный случай группы G преобразований лишь независимых переменных x. Преобразования из группы G имеют специальный вид

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Xi_g(x), u),$$

где Ξ_g на самом деле — диффеоморфизм пространства X и $\Xi_g^{-1} = \Xi_{g^{-1}}$ там, где они определены. Если $\Gamma_f = \{x, f(x))\}$ — график гладкой функции, то его образ $g \cdot \Gamma_f = \{g \cdot (x, f(x))\}$ *всегда* будет графиком гладкой функции. Действительно,

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, f(x)) = (\Xi_g(x), f(x)).$$

Мы легко можем исключить x, обращая Ξ_g:

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f\left(\Xi_g^{-1}(\tilde{x})\right) = f\left(\Xi_{g^{-1}}(\tilde{x})\right).$$

Например, если G — группа сдвигов

$$(x, u) \longmapsto (x + \varepsilon a, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

где $a \in X$ фиксировано, то образ функции $u = f(x)$ — сдвиг

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(\tilde{x} - \varepsilon a)$$

функции f.

Аналогичный результат справедлив в более общем случае *проектируемой* группы преобразований, когда действие на независимые переменные не зависит от зависимых переменных:

$$g \cdot (x, u) = (\Xi_g(x), \Phi_g(x, u)).$$

Например, однопараметрическая группа

$$g_\varepsilon\colon (x, t, u) \longmapsto (x + 2\varepsilon t, t, e^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t} u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

возникает как группа симметрий уравнения теплопроводности. (См. пример 2.41.) Если $u = f(x, t)$ — произвольная функция, то g_ε преобразует ее в функцию

$$\tilde{u} = e^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t} \cdot u = e^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t} \cdot f(x, t),$$

которую можно выразить через $(\tilde{x}, \tilde{t}) = g_\varepsilon \cdot (x, t) = (x + 2\varepsilon t, t)$. Поэтому в данном частном случае преобразованная функция имеет вид

$$\tilde{u} = e^{-\varepsilon(\tilde{x} - 2\varepsilon\tilde{t}) - \varepsilon^2 t} \cdot f(\tilde{x} - 2\varepsilon\tilde{t}, \tilde{t}) = e^{-\varepsilon\tilde{x} + \varepsilon^2\tilde{t}} \cdot f(\tilde{x} - 2\varepsilon\tilde{t}, \tilde{t}).$$

(Отметим несоответствие с выражениями для самих преобразований из группы. Советуем читателю разобрать несколько примеров, чтобы усвоить, как это практически делается.)

Мы можем теперь дать строгое определение понятия группы симметрий системы дифференциальных уравнений.

Определение 2.23. Пусть $\mathscr{S}$ — система дифференциальных уравнений. *Группа симметрий* системы $\mathscr{S}$ — это любая локальная группа преобразований, которую мы обозначаем G, действующая на открытом подмножестве M пространства независимых и зависимых переменных системы, обладающая следующим свойством. Если $u = f(x)$ — решение системы $\mathscr{S}$ и если для $g \in G$ определено $g \cdot f$, то $u = g \cdot f(x)$ — также решение системы. (Под *решением* мы понимаем любое гладкое решение $u = f(x)$, определенное на любой области $\Omega \subset X$.)

Например, в случае обыкновенного дифференциального уравнения $u_{xx} = 0$ группа вращений $\mathrm{SO}(2)$, рассмотренная в примере 2.21, очевидно, является группой симметрий, поскольку решения — это все линейные функции, а группа $\mathrm{SO}(2)$ переводит любую линейную функцию в другую линейную функцию. Другой простой пример — уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Здесь группа сдвигов

$$(x, t, u) \longmapsto (x + \varepsilon a, t + \varepsilon b, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

является группой симметрий, поскольку $u = f(x - \varepsilon a, t - \varepsilon b)$ — решение уравнения теплопроводности, если $u = f(x, t)$ — решение. Читатель может доставить себе удовольствие убедиться, что группа, выписанная в конце примера 2.22, также является группой симметрий уравнения теплопроводности. Это означает, что функция

$$u = e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} f(x - 2\varepsilon t,\ t)$$

является решением уравнения теплопроводности, если $u = f(x,\ t)$ — решение этого уравнения.

Одно из очевидных преимуществ знания группы симметрий системы дифференциальных уравнений состоит в том, что мы по известным решениям можем строить новые. А именно, если нам известно решение $u = f(x)$, то в соответствии с определением $\tilde{u} = g \cdot f(\tilde{x})$ — тоже решение для любого элемента g группы G, так что у нас есть возможность построить целое семейство решений, подвергая известное решение действию всевозможных элементов группы. Например, в рассмотренном выше случае группы симметрий уравнения теплопроводности, исходя из тривиального решения $u = c$, мы выводим существование двупараметрического семейства экспоненциальных решений

$$u(x,\ t) = c e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t}.$$

Мы могли бы далее подвергнуть эти решения действию группы сдвигов, но в этом случае новых решений не получится. Читатель может попытаться увидеть, что происходит с другими известными решениями уравнения теплопроводности, например с фундаментальным решением, под действием этой группы.

Основная цель этой главы — получить работоспособный критерий, позволяющий легко проверять, является ли данная группа преобразований группой симметрий данной системы дифференциальных уравнений. По прямой аналогии с критерием теоремы 2.8 для систем алгебраических уравнений этот критерий будет инфинитезимальным. На самом деле, как только мы разработаем соответствующие геометрические представления для изучения систем дифференциальных уравнений, мы будем готовы непосредственно обратиться к теореме 2.8, чтобы установить инфинитезимальный критерий инвариантности. А имея этот критерий в руках, мы будем готовы не только упростить проверку того, является ли данная группа группой симметрий нашей системы; на самом деле мы будем в состоянии вычислить наиболее общую группу симметрий системы посредством ряда совершенно стандартных вычислений.

2.3. ОПЕРАЦИЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Прежде чем осуществлять нашу программу отыскания симметрий дифференциальных уравнений, пользуясь аналогией с инфинитезимальными методами для алгебраических уравне-