группой симметрий уравнения теплопроводности. Это означает, что функция

$$u = e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} f(x - 2\varepsilon t, t)$$

является решением уравнения теплопроводности, если $u = f(x, t)$ — решение этого уравнения.

Одно из очевидных преимуществ знания группы симметрий системы дифференциальных уравнений состоит в том, что мы по известным решениям можем строить новые. А именно, если нам известно решение $u = f(x)$, то в соответствии с определением $\tilde{u} = g \cdot f(\tilde{x})$ — тоже решение для любого элемента g группы G, так что у нас есть возможность построить целое семейство решений, подвергая известное решение действию всевозможных элементов группы. Например, в рассмотренном выше случае группы симметрий уравнения теплопроводности, исходя из тривиального решения $u = c$, мы выводим существование двупараметрического семейства экспоненциальных решений

$$u(x, t) = ce^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t}.$$

Мы могли бы далее подвергнуть эти решения действию группы сдвигов, но в этом случае новых решений не получится. Читатель может попытаться увидеть, что происходит с другими известными решениями уравнения теплопроводности, например с фундаментальным решением, под действием этой группы.

Основная цель этой главы — получить работоспособный критерий, позволяющий легко проверять, является ли данная группа преобразований группой симметрий данной системы дифференциальных уравнений. По прямой аналогии с критерием теоремы 2.8 для систем алгебраических уравнений этот критерий будет инфинитезимальным. На самом деле, как только мы разработаем соответствующие геометрические представления для изучения систем дифференциальных уравнений, мы будем готовы непосредственно обратиться к теореме 2.8, чтобы установить инфинитезимальный критерий инвариантности. А имея этот критерий в руках, мы будем готовы не только упростить проверку того, является ли данная группа группой симметрий нашей системы; на самом деле мы будем в состоянии вычислить наиболее общую группу симметрий системы посредством ряда совершенно стандартных вычислений.

2.3. ОПЕРАЦИЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Прежде чем осуществлять нашу программу отыскания симметрий дифференциальных уравнений, пользуясь аналогией с инфинитезимальными методами для алгебраических уравнений, которые обсуждались в § 2.1, нам нужно заменить несколько расплывчатое понятие системы дифференциальных уравнений конкретным геометрическим объектом, который определяется обращением в нуль некоторых функций. Чтобы сделать это, нам нужно «продолжить» основное пространство $X \times U$, представляющее независимые и зависимые переменные, до пространства, представляющего также различные частные производные, встречающиеся в системе. Эта конструкция представляет собой сильно упрощенный вариант теории расслоения струй, возникающей в дифференциально-геометрической теории уравнений с частными производными. Чтобы избежать введения слишком обширного постороннего аппарата, мы работаем здесь исключительно в евклидовом пространстве. (Обобщения см. в § 3.5.)

У данной гладкой вещественной функции $f(x) = f(x^1, \ldots, x^p)$ от p независимых переменных имеется

$$p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$$

различных частных производных k-го порядка. Мы пользуемся мультииндексным обозначением

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \ldots \partial x^{j_k}}$$

для этих производных. В таких обозначениях $J = (j_1, \ldots, j_k)$ — *неупорядоченный* набор k целых чисел, таких, что $1 \leqslant j_\varkappa \leqslant p$, указывающих, по каким переменным берутся производные. *Порядок* такого мультииндекса, который мы обозначаем $\#J \equiv k$, указывает, как много производных взято. Более общо, если $f\colon X \to U$ — гладкая функция из $X \simeq \mathbb{R}^p$ в $U \simeq \mathbb{R}^q$, так что $u = f(x) = (f^1(x), \ldots, f^q(x))$, то требуется $q \cdot p_k$ чисел $u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$, чтобы представить все различные частные производные k-го порядка всех компонент функции f в точке x. Пусть $U_k \equiv \mathbb{R}^{q \cdot p_k}$ — евклидово пространство этой размерности, снабженное координатами u_J^α, отвечающими $\alpha = 1, \ldots, q$ и мультииндексам $J = (j_1, \ldots, j_k)$ порядка k, предназначенное, чтобы представить указанные производные. Далее, пусть $U^{(n)} = U \times U_1 \times \ldots \times U_n$ — декартово произведение. Координаты этого пространства представляют все производные функций $u = f(x)$ всех порядков от 0 до n. Отметим, что $U^{(n)}$ — евклидово пространство размерности

$$q + qp_1 + \ldots qp_n = q\binom{p+n}{n} \equiv qp^{(n)}.$$

Типичная точка пространства $U^{(n)}$ будет обозначаться через $u^{(n)}$, так что $u^{(n)}$ имеет $q\cdot p^{(n)}$ различных компонент u_J^α, где $\alpha=1,\ldots$ $\ldots, q$, а J пробегает все неупорядоченные мультииндексы $J=$ $=(j_1,\ldots,j_k)$ с $1\leqslant j_\varkappa\leqslant p$ и $0\leqslant k\leqslant n$. (Мы принимаем, что для $k=0$ имеется только один такой мультииндекс, который обозначается 0, а u_0^α означают в точности компоненты u^α самой функции u.)

Пример 2.24. Рассмотрим случай $p=2$, $q=1$. Тогда $X\simeq$ $\simeq\mathbb{R}^2$ имеет координаты $(x^1,x^2)=(x,y)$, а $U\simeq\mathbb{R}$ имеет одну координату u. Пространство U_1 изоморфно пространству $\mathbb{R}^2$ с координатами (u_x,u_y), поскольку они представляют все частные производные первого порядка функции u по x и y. Аналогично, $U_2\simeq\mathbb{R}^3$ имеет координаты (u_{xx},u_{xy},u_{yy}), соответствующие частным производным второго порядка функции u, и в общем случае $U_k\simeq\mathbb{R}^{k+1}$, поскольку имеется $k+1$ частных производных функции u порядка k, а именно $\partial^k u/\partial x^i\partial y^{k-i}$, $i=0,\ldots$ $\ldots, k$. Наконец, пространство $U^{(2)}=U\times U_1\times U_2\simeq\mathbb{R}^6$ с координатами $u^{(2)}=(u;\ u_x,u_y;\ u_{xx},u_{xy},u_{yy})$ представляет все производные функции u по x и y порядка не больше 2.

Для данной гладкой функции $u=f(x)$, $f\colon X\to U$, имеется индуцированная функция $u^{(n)}=\mathrm{pr}^{(n)}f(x)$, называемая n-м *продолжением* функции f, которая определяется уравнениями

$$u_J^\alpha=\partial_J f^\alpha(x).$$

Таким образом, $\mathrm{pr}^{(n)}f$ — это функция из X в пространство $U^{(n)}$, и для каждого x из X $\mathrm{pr}^{(n)}f(x)$ — это вектор, $q\cdot p^{(n)}$ компонент которого представляют собой значения функции f и всех ее производных вплоть до порядка n в точке x. Например, в рассмотренном выше случае $p=2$, $q=1$ для данной функции $u=f(x,y)$ второе продолжение $u^{(2)}=\mathrm{pr}^{(2)}f(x,y)$ задается формулой

$$(u;\ u_x,\ u_y;\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy})=\left(f;\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \tag{2.15}$$

где все вычислено в точке (x,y). Другой способ рассматривать n-е продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}f(x)$ состоит в том, чтобы представлять его многочленом Тейлора степени n функции f в точке x, поскольку производные порядка $\leqslant n$ определяют многочлен Тейлора и наоборот.

Полное пространство $X\times U^{(n)}$, координаты которого представляют независимые переменные, зависимые переменные и производные от зависимых переменных вплоть до порядка n, называется *пространством струй* n-го порядка (*n-струй*) пространства $X \times U$. (n-е продолжение $\mathrm{pr}^{(n)} f(x)$ называют также *n-струей* функции f, однако мы будем придерживаться более осмысленного термина «продолжение».) Нас часто интересуют дифференциальные уравнения, определенные не на всем пространстве $X \times U$, а лишь на некотором открытом подмножестве $M \subset X \times U$. В этом случае мы определяем пространство n-струй

$$M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times \ldots \times U_n.$$

Если $u = f(x)$ — функция, график которой лежит в M, то ее n-е продолжение $\mathrm{pr}^{(n)} f(x)$ — функция, график которой лежит в пространстве n-струй $M^{(n)}$.

Системы дифференциальных уравнений

Система $\mathscr{S}$ дифференциальных уравнений n-го порядка от p независимых и q зависимых переменных задается как система уравнений

$$\Delta_\nu (x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

содержащая $x = (x^1, \ldots, x^p)$, $u = (u^1, \ldots, u^q)$ и производные от функции u по x до порядка n. Функции $\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1 (x, u^{(n)}), \ldots, \Delta_l (x, u^{(n)}))$ будут предполагаться гладкими по своим аргументам, так что Δ можно рассматривать как гладкое отображение из пространства струй $X \times U^{(n)}$ в некоторое l-мерное евклидово пространство:

$$\Delta\colon X \times U^{(n)} \to \mathbb{R}^l.$$

Дифференциальные уравнения указывают, где данное отображение Δ обращается в нуль на $X \times U^{(n)}$, и таким образом определяют подмногообразие

$$\mathscr{S}_\Delta = \{(x, u^{(n)})\colon \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}$$

полного пространства струй. Мы можем отождествить систему дифференциальных уравнений с соответствующим подмногообразием, реализуя таким образом «абстрактные» связи между различными производными функции u, которые определяются системой, как некоторое конкретное геометрическое подмножество $\mathscr{S}_\Delta$ пространства струй $X \times U^{(n)}$. Мы будем употреблять один и тот же символ «Δ» как сокращение и для системы дифференциальных уравнений $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$, и для отображения $\Delta\colon X \times U^{(n)} \to \mathbb{R}^l$, которое эта система определяет. Это не приведет к путанице.

С такой точки зрения гладкое *решение* данной системы дифференциальных уравнений — это гладкая функция $u = f(x)$, такая, что

$$\Delta_\nu(x, \operatorname{pr}^{(n)} f(x)) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

если x лежит в области определения функции f. Это просто переформулировка того факта, что производные $\partial_J f^\alpha(x)$ функции f должны удовлетворять алгебраическим соотношениям, налагаемым системой дифференциальных уравнений. Это условие эквивалентно утверждению, что график продолжения $\operatorname{pr}^{(n)} f(x)$ целиком должен лежать внутри подмногообразия $\mathcal{S}_\Delta$, определенного системой:

$$\Gamma_f^{(n)} \equiv \{(x, \operatorname{pr}^{(n)} f(x))\} \subset \mathcal{S}_\Delta = \{\Delta(x, u^{(n)}) = 0\}.$$

Таким образом, мы можем считать, что система дифференциальных уравнений n-го порядка — это подмногообразие $\mathcal{S}_\Delta$ в пространстве $X \times U^{(n)}$ n-струй, а решение — это такая функция $u = f(x)$, что график ее n-го продолжения $\operatorname{pr}^{(n)} f$ содержится в подмногообразии $\mathcal{S}_\Delta$. Пока что мы ничего не сделали, кроме того, что переформулировали основную задачу отыскания решений систем дифференциальных уравнений в более геометрической форме, идеально подходящей к нашим исследованиям по группам симметрий. Вероятно, в этом месте стоит сделать паузу, чтобы рассмотреть простой пример.

Пример 2.25. Рассмотрим случай уравнения Лапласа на плоскости

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{2.16}$$

Здесь $p = 2$, поскольку имеются две независимые переменные x и y, а $q = 1$, поскольку имеется единственная зависимая переменная u. Далее, $n = 2$, поскольку уравнение имеет второй порядок, так что мы находимся в ситуации, разобранной в примере 2.24. В терминах координат $(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ в пространстве $X \times U^{(2)}$ уравнение (2.16) определяет линейное подмногообразие («гиперплоскость») в этом пространстве, которое представляет собой множество $\mathcal{S}_\Delta$ для уравнения Лапласа. Решение $u = f(x, y)$ должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

для всех (x, y). Очевидно, это эквивалентно требованию, чтобы график второго продолжения $\operatorname{pr}^{(2)} f$ лежал в $\mathcal{S}_\Delta$. Например, если

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2,$$

то (используя (2.15))

$$\mathrm{pr}^{(2)} f(x, y) = (x^3 - 3xy^2;\ 3x^2 - 3y^2,\ -6xy;\ 6x,\ -6y,\ -6x),$$

а это множество лежит в $\mathscr{S}_\Delta$, поскольку сумма четвертой и шестой компонент дает 0: $6x + (-6x) = 0$.

Продолжение действия группы

Предположим теперь, что G — локальная группа преобразований, действующая на открытом подмножестве $M \subset X \times U$ пространства независимых и зависимых переменных. Тогда определено индуцированное локальное действие группы G на пространство n-струй $M^{(n)}$, называемое n-м *продолжением* группы G (или, более строго, n-м продолжением действия группы G на M) и обозначаемое $\mathrm{pr}^{(n)} G$. Это продолжение определяется так, что оно преобразует производные функций $u = f(x)$ в соответствующие производные преобразованных функций $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Более строго, пусть $(x_0, u_0^{(n)})$ — заданная точка в $M^{(n)}$. Выберем произвольную гладкую функцию $u = f(x)$, определенную в окрестности точки x_0, график которой лежит в M и которая имеет данные производные в точке x_0:

$$u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0).$$

Например, в качестве функции f можно взять многочлен Тейлора степени n в точке x_0, соответствующий данным значениям $u_0^{(n)}$:

$$f^\alpha(x) = \sum_J \frac{u^\alpha_{J0}}{\tilde{J}!} (x - x_0)^J, \quad \alpha = 1, \ldots, q. \tag{2.17}$$

(Здесь суммирование происходит по всем мультииндексам $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$; кроме того,

$$(x - x_0)^J = \left(x^{j_1} - x_0^{j_1}\right)\left(x^{j_2} - x_0^{j_2}\right) \ldots \left(x^{j_k} - x_0^{j_k}\right).$$

Далее, для данного мультииндекса J положим $\tilde{J} = (\tilde{j}_1, \ldots, \tilde{j}_p)$, где $\tilde{j}_i$ — число j_κ, равных i. Например, если $J = (1, 1, 1, 2, 4, 4)$, $p = 4$, $k = 6$, то $\tilde{J} = (3, 1, 0, 2)$. В этих обозначениях $\tilde{J}! = \tilde{j}_1! \tilde{j}_2! \ldots \ldots \tilde{j}_p!$.)

Если g — элемент группы G, достаточно близкий к единичному, преобразованная функция $g \cdot f$, задаваемая формулой (2.14), определена в окрестности соответствующей точки $(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = g \cdot (x_0, u_0)$, где $u_0 = f(x_0)$ — компонента $u_0^{(n)}$ нулевого порядка. Мы определяем теперь действие продолженного преобразования $\mathrm{pr}^{(n)}g$ на точку $(x_0, u_0^{(n)})$, вычисляя производные преобразованной функции $g \cdot f$ в точке $\tilde{x}_0$; подробнее,

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}),$$

где

$$\tilde{u}_0^{(n)} \equiv \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0). \tag{2.18}$$

Относительно нетрудное упражнение — пользуясь цепным правилом, проверить, что это определение $\mathrm{pr}^{(n)}g \cdot (x_0, u_0^{(n)})$ зависит лишь от производных функции f в точке x_0 до порядка n, т. е. от самой точки $(x_0, u_0^{(n)})$, и, следовательно, не зависит от выбора функции f, представляющей точку $(x_0, u_0^{(n)})$. Таким образом, продолженное действие группы корректно определено. Снова, чтобы определить действие $\mathrm{pr}^{(n)}g$ на точку из $M^{(n)}$, выбираем функцию, производные которой имеют данные значения; преобразуем эту функцию в соответствии с (2.14) и пересчитываем производные.

Пример 2.26. Пусть $p = q = 1$, так что $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$. Рассмотрим действие группы вращений $SO(2)$, которая обсуждалась в примере 2.21. Мы вычисляем здесь первое продолжение $\mathrm{pr}^{(1)}SO(2)$. Заметим прежде всего, что $X \times U^{(1)} \simeq \mathbb{R}^3$ с координатами (x, u, u_x). Для данной функции $u = f(x)$ первое продолжение — это

$$\mathrm{pr}^{(1)} f(x) = (f(x), f'(x)).$$

Теперь для данной точки $(x^0, u^0, u_x^0) \in X \times U^{(1)}$ и вращения из группы $SO(2)$, характеризуемого углом θ, мы хотим найти соответствующую преобразованную точку

$$\mathrm{pr}^{(1)} \theta \cdot (x^0, u^0, u_x^0) = (\tilde{x}^0, \tilde{u}^0, \tilde{u}_x^0)$$

(если она существует). Выбрав линейный многочлен Тейлора

$$f(x) = u^0 + u_x^0 (x - x^0) = u_x^0 \cdot x + (u^0 - u_x^0 x^0)$$

в качестве представляющей функции, замечаем, что

$$f(x^0) = u^0, \quad f'(x^0) = u_x^0,$$

как и требовалось. В соответствии с вычислениями примера 2.21 под действием вращения на угол θ функция f преобразуется в линейную функцию

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \theta \cdot f(\tilde{x}) = \frac{\sin\theta + u_x^0 \cos\theta}{\cos\theta - u_x^0 \sin\theta}\tilde{x} + \frac{u^0 - u_x^0 x^0}{\cos\theta - u_x^0 \sin\theta},$$

определенную при $u_x^0 \neq \operatorname{ctg}\theta$. Тогда

$$\tilde{x}^0 = x^0 \cos\theta - u^0 \sin\theta,$$

следовательно, как нам уже известно,

$$\tilde{u}^0 = \tilde{f}(\tilde{x}^0) = x^0 \sin\theta + u^0 \cos\theta.$$

Что касается производной первого порядка, то

$$\tilde{u}_x^0 = \tilde{f}'(\tilde{x}^0) = \frac{\sin\theta + u_x^0 \cos\theta}{\cos\theta - u_x^0 \sin\theta}.$$

Поэтому (опуская верхний индекс 0) мы получаем, что продолженное действие $\mathrm{pr}^{(1)}\mathrm{SO}(2)$ на $X \times U^{(1)}$ задается формулой

$$\mathrm{pr}^{(1)}\,\theta \cdot (x, u, u_x) = \\ = \left(x\cos\theta - u\sin\theta,\ x\sin\theta + u\cos\theta,\ \frac{\sin\theta + u_x\cos\theta}{\cos\theta - u_x\sin\theta}\right), \quad (2.19)$$

которая определена при $|\theta| < |\operatorname{arcctg} u_x|$. Заметим, что, хотя группа $\mathrm{SO}(2)$ — линейная глобально определенная группа преобразований, ее первое продолжение и нелинейно, и определено лишь локально. По этому относительно простому примеру читатель может судить о том, насколько сложной является операция продолжения группы преобразований!

Читатель заметит, что в рассмотренном примере первое продолжение $\mathrm{pr}^{(1)}G$ действует на исходные переменные (x, u) в точности так же, как сама группа G; лишь действие на производную u_x доставляет новую информацию. Это замечание справедливо и в общем случае. А именно, если имеется n-е продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}G$, действующее на переменные $(x, u^{(n)})$, и если мы обращаем внимание лишь на производные порядка $k \leqslant n$, т. е. рассматриваем лишь переменные $(x, u^{(k)})$, то действие $\mathrm{pr}^{(n)}G$ совпадает с действием продолжения $\mathrm{pr}^{(k)}G$. В частности, при $k = 0$ действие $\mathrm{pr}^{(0)}G$ совпадает с действием самой группы G на многообразии $M^{(0)} = M$. Этот результат можно сформулировать более строго, определяя естественное проектирование π_k^n: $M^{(n)} \to M^{(k)}$, где $\pi_k^n(x, u^{(n)}) = (x, u^{(k)})$, $u^{(k)}$ состоит в точности из компонент u_J^α, $\# J \leqslant k$, самой $u^{(n)}$. Например, если $p = 2$, $q = 1$, то

$$\pi_1^2(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = (x, y; u; u_x, u_y),$$

а

$$\pi_0^2(x,\ y;\ u;\ u_x,\ u_y;\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}) = (x,\ y;\ u).$$

Таким образом, имеем

$$\pi_k^n \circ \mathbf{pr}^{(n)} g = \mathbf{pr}^{(k)} g, \quad n \geqslant k, \tag{2.20}$$

для любого элемента g группы G. Другой взгляд на это замечание состоит в том, что если нам уже известно действие k-го продолжения группы $\mathrm{pr}^{(k)} G$, то, чтобы вычислить n-е продолжение $\mathrm{pr}^{(n)} G$, нам нужно узнать лишь, как преобразуются производные u_J^α порядка $k < \# J \leqslant n$, поскольку действие на производные порядка k и меньше уже определено.

Инвариантность дифференциальных уравнений

Пусть задана система дифференциальных уравнений порядка n, или, что эквивалентно, подмногообразие $\mathscr{S}_\Delta$ в пространстве струй $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. Группу симметрий G этой системы мы определили как локальную группу преобразований, действующую на $M \subset X \times U$ и переводящую решения системы в другие решения. Мы установим связь между условием симметрии и геометрическим условием, что соответствующее подмногообразие инвариантно относительно действия продолженной группы $\mathrm{pr}^{(n)} G$. Это наблюдение эффективно приведет задачу определения групп симметрий дифференциальных уравнений к легче поддающейся решению задаче выяснения, когда некоторое подмногообразие (в этом случае $\mathscr{S}_\Delta$) инвариантно относительно некоторой локальной группы преобразований (в этом случае продолженной группы $\mathrm{pr}^{(n)} G$). Таким образом, в нашем распоряжении оказываются все средства, развитые в § 2.1 для симметрий алгебраических уравнений. Одно это должно продемонстрировать эффективность нашей геометрической переформулировки понятия дифференциального уравнения, сделанной в этом параграфе.

Теорема 2.27. *Пусть M — открытое подмножество пространства $X \times U$. Предположим, что $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ — система дифференциальных уравнений порядка n, определенная на M, с соответствующим подмногообразием $\mathscr{S}_\Delta \subset M^{(n)}$. Предположим, что G — локальная группа преобразований, действующая на M, продолжение которой оставляет подмногообразие $\mathscr{S}_\Delta$ инвариантным, т. е. для любой точки $(x, u^{(n)}) \in \mathscr{S}_\Delta$ имеем $\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathscr{S}_\Delta$ для всех $g \in G$, для которых это действие определено. Тогда G — группа симметрий данной системы дифференциальных уравнений в смысле определения 2.23.*

Доказательство. Доказательство состоит в сопоставлении разных определений. Предположим, что $u = f(x)$ — локальное решение системы $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. Это означает, что график

$$\Gamma_f^{(n)} = \{(x, \operatorname{pr}^{(n)} f(x))\}$$

продолжения $\operatorname{pr}^{(n)} f$ лежит целиком в $\mathcal{S}_\Delta$. Если $g \in G$ таково, что определена преобразованная функция $g \cdot f$, то график ее продолжения, а именно $\Gamma_{g \cdot f}^{(n)}$, — то же самое, что результат преобразования графика продолжения $\operatorname{pr}^{(n)} f$ под действием элемента продолженной группы $\operatorname{pr}^{(n)} g$:

$$\Gamma_{g \cdot f}^{(n)} = \operatorname{pr}^{(n)} g\,(\Gamma_f^{(n)}).$$

(Это в точности переформулировка основной формулы (2.18), определяющей продолжение действия группы.) Далее, поскольку подмногообразие $\mathcal{S}_\Delta$ инвариантно относительно $\operatorname{pr}^{(n)} g$, график $\operatorname{pr}^{(n)}(g \cdot f)$ снова целиком лежит в $\mathcal{S}_\Delta$. Но это в точности то же самое, что сказать, что преобразованная функция $g \cdot f$ является решением системы Δ. □

Позднее (теорема 2.71) мы получим обращение этого результата, налагающее некоторые дополнительные предположения на систему.

Продолжение векторных полей

Наряду с продолжениями групп преобразований мы можем также определить продолжение соответствующих инфинитезимальных образующих. На самом деле это будут в точности инфинитезимальные образующие продолжения действия группы.

Определение 2.28. Пусть $M \subset X \times U$ открыто. Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле на M с соответствующей (локальной) однопараметрической группой $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$. Тогда n-е *продолжение* поля $\mathbf{v}$, которое мы обозначаем $\operatorname{pr}^{(n)} \mathbf{v}$, будет векторным полем на пространстве $M^{(n)}$ n-струй и по определению будет инфинитезимальной образующей соответствующей продолженной однопараметрической группы $\operatorname{pr}^{(n)} [\exp(\varepsilon \mathbf{v})]$. Другими словами,

$$\operatorname{pr}^{(n)} \mathbf{v}\,|_{(x,\, u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \operatorname{pr}^{(n)} [\exp(\varepsilon \mathbf{v})]\,(x,\, u^{(n)}) \qquad (2.21)$$

для любой точки $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Заметим, что, поскольку координаты $(x, u^{(n)})$ на $M^{(n)}$ состоят из независимых переменных $(x^1, \ldots, x^p)$ и всех производных u_J^α зависимых переменных до порядка n, векторное поле на $M^{(n)}$ будет в общем случае иметь вид

$$\mathbf{v}^* = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J \varphi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

где последняя сумма берется по всем мультииндексам J порядка $0 \leqslant \# J \leqslant n$; коэффициенты — это функции ξ^i, φ_α^J, зависящие от всех переменных $(x, u^{(n)})$. Когда $\mathbf{v}^*$ — продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ векторного поля

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

коэффициенты ξ^i, φ_α^J для $\mathbf{v}^* = \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ будут определяться коэффициентами ξ^i, φ_α самого поля $\mathbf{v}$. В соответствии с (2.20) продолженное действие группы $\mathrm{pr}^{(n)}[\exp(\varepsilon \mathbf{v})]$, ограниченное на переменные нулевого порядка x, u многообразия $M^{(0)} = M$, совпадает с действием обычной группы $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$ на M. Поэтому коэффициенты ξ^i и $\varphi_\alpha^0 = \varphi_\alpha$ поля $\mathbf{v}^* = \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ должны совпадать с соответствующими коэффициентами ξ^i, φ_α самого поля $\mathbf{v}$. Таким образом,

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J \varphi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{2.22}$$

где ξ^i, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha^0$ — коэффициенты поля $\mathbf{v}$. Более того, если $\# J = k$, то коэффициент φ_α^J при $\partial/\partial u_J^\alpha$ будет зависеть только от производных функций u порядка k и ниже: $\varphi_\alpha^J = \varphi_\alpha^J(x, u^{(k)})$ (поскольку, снова в силу (2.20), то, как соответствующие преобразования группы преобразуют производные порядка k, зависит только от производных порядка не выше k). Формально это можно записать в следующем виде, используя отображение проектирования (2.20):

$$d\pi_k^n(\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}) = \mathrm{pr}^{(k)}\mathbf{v}, \quad n \geqslant k, \tag{2.23}$$

где $\mathrm{pr}^{(0)}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ при $k = 0$. Это означает возможность рекурсивного построения различных продолжений данного векторного поля. Главная задача, которая нам теперь остается, — получить общие формулы для коэффициентов φ_α^J продолжения векторного поля. Прежде чем браться за эту задачу, мы рассмотрим простой пример, а затем извлечем из него некоторые общие заключения о вычислении групп симметрий дифференциальных уравнений.

Пример 2.29. Рассмотрим группу вращений $SO(2)$, действующую на $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, как описано в примерах 2.21 и 2.26. Соответствующая инфинитезимальная образующая имеет вид

$$\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u},$$

и

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})(x, u) = (x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon,\ x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon)$$

— поворот на угол ε. Первое продолжение имеет вид

$$\mathrm{pr}^{(1)}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})](x, u, u_x) =$$
$$= \left(x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon,\ x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon,\ \frac{\sin\varepsilon + u_x\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - u_x\sin\varepsilon}\right).$$

Согласно (2.21), первое продолжение поля $\mathbf{v}$ получается дифференцированием этих выражений по ε и подстановкой $\varepsilon = 0$. Легкое вычисление показывает, что

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x}. \tag{2.24}$$

Заметим, что в соответствии с (2.23) первые два слагаемых в $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ совпадают со слагаемыми самого поля $\mathbf{v}$.

Инфинитезимальная инвариантность

Комбинируя теоремы 2.27 и 2.8, мы немедленно выводим важное инфинитезимальное условие того, что группа G является группой симметрий данной системы дифференциальных уравнений.

Определение 2.30. Пусть

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

— система дифференциальных уравнений. Говорят, что эта система имеет *максимальный ранг*, если матрица Якоби размера $l \times (p + qp^{(n)})$ системы Δ по всем переменным

$$\mathrm{J}_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial\Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha}\right)$$

имеет ранг l всюду, где $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$.

Так, например, уравнение Лапласа

$$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

имеет максимальный ранг, поскольку матрица Якоби по всем переменным $(x, y;\ u;\ u_x, u_y;\ u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ и $X\times U^{(2)}$ (ср. пример 2.25) равна

$$\mathrm{J}_\Delta=(0,\ 0;\ 0;\ 0,\ 0;\ 1,\ 0,\ 1)$$

и, очевидно, всюду имеет ранг 1. Однако довольно неразумное эквивалентное уравнение

$$\tilde{\Delta}=(u_{xx}+u_{yy})^2=0$$

не является уравнением максимального ранга, поскольку

$$\mathrm{J}_{\tilde{\Delta}}=(0,\ 0;\ 0;\ 0,\ 0;\ 2(u_{xx}+u_{yy}),\ 0,\ 2(u_{xx}+u_{yy}))$$

обращается в нуль при $(u_{xx}+u_{yy})^2=0$.

Условие максимальности ранга не является большим ограничением, поскольку в соответствии с леммой 1.12, если $\mathscr{S}_\Delta=\{\Delta(x, u^{(n)})=0\}$ — регулярное подмногообразие многообразия $M^{(n)}$, то существует (алгебраически) эквивалентная система дифференциальных уравнений $\tilde{\Delta}(x, u^{(n)})=0$, такая, что

$$\mathscr{S}_\Delta=\mathscr{S}_{\tilde{\Delta}}=\{\tilde{\Delta}(x,\ u^{(n)})=0\}$$

и $\tilde{\Delta}$ имеет максимальный ранг.

Теорема 2.31. *Пусть*

$$\Delta_\nu(x,\ u^{(n)})=0,\quad \nu=1,\ \dots,\ l,$$

— система дифференциальных уравнений максимального ранга, определенная на $M\subset X\times U$. Если G — локальная группа преобразований, действующая на M, и

$$\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}\,[\Delta_\nu(x,\ u^{(n)})]=0,\quad \nu=1,\ \dots,\ l,\ \text{при}\ \Delta(x,\ u^{(n)})=0 \tag{2.25}$$

для каждой инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ *группы G, то G — группа симметрий этой системы.*

Доказательство, как отмечено выше, немедленно вытекает из теорем 2.8 и 2.27. Снова, как и для теоремы 2.27, в § 2.6 мы покажем, что, если система Δ удовлетворяет определенным дополнительным условиям «локальной разрешимости», условие (2.25) будет на самом деле и необходимым, и достаточным условием для того, чтобы группа G была группой симметрий. В этом случае, как будет показано в многочисленных примерах § 2.4, *все* (связные) группы симметрий можно систематически определить посредством анализа инфинитезимального критерия (2.25). Как следствие условия максимальности ранга и предложения 2.10 мы получаем, что условие (2.25) можно заменить эквивалентным условием существования функций $Q_{\nu\mu}(x, u^{(n)})$, таких, что равенство

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}\,[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = \sum_{\mu=1}^{l} Q_{\nu\mu}(x, u^{(n)})\,\Delta_\mu(x, u^{(n)}) \qquad (2.26)$$

выполняется при всех $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$. Оба условия (2.25) и (2.26) полезны при анализе инфинитезимального критерия инвариантности.

Пример 2.32. Пусть $G = SO(2)$ действует на $X \times U = \mathbb{R}^2$, как в примерах 2.29, 2.26 и 2.21. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\Delta(x, u, u_x) = (u - x)\,u_x + u + x = 0. \qquad (2.27)$$

Заметим, что матрица Якоби из определения 2.30 имеет вид

$$J_\Delta = \left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}, \frac{\partial\Delta}{\partial u}, \frac{\partial\Delta}{\partial u_x}\right) = (1 - u_x,\ 1 + u_x,\ u - x)$$

и, значит, всюду имеет ранг 1. Применяя инфинитезимальную образующую группы $\mathrm{pr}^{(1)}SO(2)$, вычисленную в (2.24), к (2.27), получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}\,(\Delta) &= -u\frac{\partial\Delta}{\partial x} + x\frac{\partial\Delta}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial\Delta}{\partial u_x} = \\ &= -u(1 - u_x) + x(1 + u_x) + (1 + u_x^2)(u - x) = \\ &= u_x[(u - x)\,u_x + u + x] = u_x\Delta.\end{aligned}$$

Поэтому $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}(\Delta) = 0$ при $\Delta = 0$, и условие инфинитезимального критерия инвариантности (2.25) выполняется. Поэтому мы заключаем, что группа вращений $SO(2)$ переводит решения уравнения (2.27) в другие решения. Геометричнее, если $u = f(x)$ — решение и мы поворачиваем график функции f на произвольный угол θ, то полученная функция снова является решением. В самом деле, в полярных координатах

$$x = r\cos\theta, \qquad u = r\sin\theta$$

уравнение (2.27) принимает вид

$$\frac{dr}{d\theta} = r.$$

Таким образом, решения — логарифмические спирали (точнее, их куски) $r = ce^\theta$, где c — константа. Очевидно, поворот любой из этих спиралей дает другую спираль того же вида, так что $SO(2)$ — на самом деле группа симметрий. (Выбор полярных координат и тот факт, что данное уравнение легко решается в этих координатах, как мы увидим, не случайны.)

Формула продолжения

В свете теоремы 2.31, связывающей группы симметрий систем дифференциальных уравнений с инфинитезимальным критерием инвариантности системы относительно продолженных инфинитезимальных образующих группы, главной задачей для нас остается отыскание явной формулы для продолжения векторного поля. Несмотря на обескураживающую сложность продолженного действия группы, определенного формулой (2.18), продолженные векторные поля имеют относительно простой, легко вычислимый вид.

Прежде чем браться за общий случай, полезно проиллюстрировать основной метод в двух простых ситуациях. Мы исследуем сначала продолжение однопараметрической группы преобразований, действующей исключительно на независимые переменные нашей системы дифференциальных уравнений. Иными словами, рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi^{i}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i}}$$

на пространстве $M\subset X\times U$. Преобразования $g_\varepsilon=\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ имеют тогда вид

$$(\tilde{x},\ \tilde{u})=g_\varepsilon\cdot(x,\ u)=(\Xi_\varepsilon(x),\ u),$$

указанный в примере 2.22, причем компоненты $\tilde{x}^i=\Xi^i_\varepsilon(x)$ удовлетворяют условию

$$\left.\frac{d\Xi^i_\varepsilon(x)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\xi^i(x), \tag{2.28}$$

ср. (1.48). Для простоты рассмотрим случай одной зависимой переменной $u\in\mathbb{R}$, хотя рассуждения легко обобщаются на несколько зависимых переменных.

Первое пространство струй $M^{(1)}$ имеет координаты $(x,u^{(1)})=(x^i,u,u_j)$, где $u_j\equiv\partial u/\partial x^j$. Продолженное действие группы находится следующим образом: если $(x,u^{(1)})$ — произвольная точка из $M^{(1)}$, а $u=f(x)$ — произвольная функция с $u_j=\partial f/\partial x^j$, $j=1,\ \ldots,\ p$, то $\mathrm{pr}^{(1)}g_\varepsilon\cdot(x,u^{(1)})=(\tilde{x},\tilde{u}^{(1)})$, где $\tilde{x}=\Xi_\varepsilon(x)$, $\tilde{u}=u$ и $\tilde{u}_j$ — производные преобразованной функции $\tilde{f}_\varepsilon=g_\varepsilon\cdot f$, которая, в соответствии с (2.14), задается формулой

$$\tilde{u}=\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})=f\left[\Xi_\varepsilon^{-1}(\tilde{x})\right]=f\left[\Xi_\varepsilon(\tilde{x})\right].$$

(Здесь мы использовали тот факт, что $g_\varepsilon^{-1} = g_{-\varepsilon}$ в области определения.) Таким образом,

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\varepsilon}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x^k}(\Xi_{-\varepsilon}(\tilde{x})) \cdot \frac{\partial \Xi^k_{-\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}). \tag{2.29}$$

Но $\Xi_{-\varepsilon}(\tilde{x}) = x$, следовательно,

$$\tilde{u}_j = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \Xi^k_{-\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^j}(\Xi_\varepsilon(x))\, u_k$$

дает явную формулу для продолженного действия группы на производные первого порядка.

Чтобы найти инфинитезимальную образующую группы $\mathrm{pr}^{(1)} g_\varepsilon$, нам нужно продифференцировать формулы для продолженных преобразований по ε и положить $\varepsilon = 0$. Таким образом,

$$\mathrm{pr}^{(1)} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{p} \varphi^j(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_j}, \tag{2.30}$$

где $\xi^i(x)$ такие же, как раньше (поскольку $\mathrm{pr}^{(1)} g_\varepsilon$ преобразует x и u в точности так же, как g_ε), и в силу (2.21)

$$\varphi^j(x, u^{(1)}) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \Xi^k_{-\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^j}(\Xi_\varepsilon(x))\, u_k.$$

Так как все эти функции гладкие, можно изменить порядок дифференцирования. Поэтому получаем множители при u_k двух типов. Множители первого типа имеют вид

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\left[\frac{d\Xi^k_{-\varepsilon}}{d\varepsilon}\right](\Xi_\varepsilon(x))\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\left.\frac{\partial \Xi^k_{-\varepsilon}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right](x) = -\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}(x),$$

где мы использовали формулу (2.28) и тот факт, что при $\varepsilon = 0$ $\Xi_0(x) = x$ — тождество. Множители второго типа содержат производные функции $\Xi_{-\varepsilon}$ по x второго порядка:

$$\left.\sum_l \frac{\partial^2 \Xi^k_{-\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^j\, \partial \tilde{x}^l}(\Xi_{-\varepsilon}(x)) \frac{d\Xi^l_\varepsilon}{d\varepsilon}(x)\right|_{\varepsilon=0} = 0;$$

они обращаются в нуль, поскольку $\Xi_0(x)$ — тождественное отображение. Следовательно, при $\varepsilon = 0$ все производные второго порядка по x функции Ξ_ε обращаются в нуль. Поэтому

$$\varphi^i(x, u, u_x) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \cdot u_k \tag{2.31}$$

доставляет основную формулу продолжения для $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ из (2.30).

Пример 2.33. Пусть $p = 2$, $q = 1$. Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{v} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

на $X \simeq \mathbb{R}^2$ с координатами (x, y). В соответствии с (2.31) первое продолжение поля $\mathbf{v}$ — это векторное поле

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^y \frac{\partial}{\partial u_y}, \tag{2.32}$$

где

$$\varphi^x = -\frac{\partial \xi}{\partial x}u_x - \frac{\partial \eta}{\partial x}u_y, \quad \varphi^y = -\frac{\partial \xi}{\partial y}u_x - \frac{\partial \eta}{\partial y}u_y.$$

Например, в случае группы вращений

$$(x, y, u) \longmapsto (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon,\ x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon,\ u)$$

на X инфинитезимальная образующая — это поле

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Здесь $\xi = -y$, $\eta = x$ и, следовательно, поле $\mathbf{v}$ имеет первое продолжение

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - u_y\frac{\partial}{\partial u_x} + u_x\frac{\partial}{\partial u_y}.$$

(Первое продолжение группы вращений

$$(x, y, u, u_x, u_y) \longmapsto (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon,\ x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon,\ u,$$
$$u_x\cos\varepsilon - u_y\sin\varepsilon,\ u_x\sin\varepsilon + u_y\cos\varepsilon)$$

можно построить либо интегрированием $\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}$, как в (1.7), либо непосредственно по определению.)

Полезно, прежде чем переходить к общей формуле продолжения, рассмотреть еще один частный случай. Мы по-прежнему ограничиваемся одной зависимой переменной u, но теперь рассматриваем группы, преобразующие лишь зависимую переменную:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (x, \Phi_\varepsilon(x, u)).$$

Инфинитезимальная образующая в данном случае — это $\mathbf{v} = \varphi(x, u)\partial_u$, где

$$\varphi(x, u) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Phi_\varepsilon(x, u).$$

Если $u = f(x)$ — функция, то преобразованная функция $\tilde{f}_\varepsilon = g_\varepsilon \cdot f$ в соответствии с (2.14) есть в точности

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(x) = \Phi_\varepsilon(x, f(x)). \tag{2.33}$$

Чтобы найти продолженное действие группы, дифференцируем:

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\varepsilon}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial}{\partial x^j}\{\Phi_\varepsilon(x, f(x))\} =$$
$$= \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x^j}(x, f(x)) + \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial u}(x, f(x)),$$

следовательно, $\mathrm{pr}^{(1)} g_\varepsilon \cdot (x, u^{(1)}) = (x, \tilde{u}^{(1)})$, где

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial u}. \tag{2.34}$$

Инфинитезимальная образующая

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^{p} \varphi^j(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_j}$$

группы $\mathrm{pr}^{(1)} g_\varepsilon$ получена из (2.34) дифференцированием по ε и подстановкой $\varepsilon = 0$, в точности как в предыдущих вычислениях. Таким образом,

$$\varphi^j(x, u^{(1)}) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \tilde{u}_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial \varphi}{\partial u}. \tag{2.35}$$

Это дает нам формулу продолжения в нашем частном случае. Например, при $p = 2$, обозначая независимые переменные через x и y, получаем

$$\mathrm{pr}^{(1)}\left[xu^2 \frac{\partial}{\partial u}\right] = xu^2 \frac{\partial}{\partial u} + (u^2 + 2xuu_x)\frac{\partial}{\partial u_x} + 2xuu_y \frac{\partial}{\partial u_y}.$$

Последующие продолжения либо для (2.31), либо для (2.35) получаются дальнейшим дифференцированием соответствующей формулы продолжения. Чтобы изложить это в общем виде и подготовиться к доказательству общей теоремы о продолжении, нам нужно ввести понятие полной производной.

Полные производные

Формулу (2.35) для продолжения векторного поля вида $\varphi(x, u)\partial_u$ можно «упростить», сделав следующее наблюдение. Если $u = f(x)$ — произвольная функция, то значения $\varphi^j(x, u^{(1)})$, вычисленные на f и ее производных первого порядка, суть в точности производные от $\varphi(x, f(x))$ по x:

$$\varphi^j(x, \mathbf{pr}^{(1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^j}[\varphi(x, f(x))].$$

(На самом деле существенно, как именно были получены φ^j.) Другими словами, $\varphi^j(x, u^{(1)})$ получается из $\varphi(x, u)$ дифференцированием по x^j, если обращаться с u как с функцией от x. Полученная производная называется *полной производной* функции φ по x^j и обозначается

$$\varphi^j(x, u^{(1)}) = D_j\varphi(x, u) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + u_j\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

(Термин «полная» производная используется, чтобы отличить $D_j\varphi$ от «частной» производной $\partial\varphi/\partial x^j$.) Определение полной производной естественно распространяется на функции, зависящие от $x = (x^1, \ldots, x^p)$, $u = (u^1, \ldots, u^q)$ и производных u_J^α.

Определение 2.34. Пусть $P(x, u^{(n)})$ — гладкая функция от x, u и производных от u до порядка n включительно, определенная на открытом подмножестве $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. *Полная производная* функции P по x^i — это единственная гладкая функция $D_iP(x, u^{(n+1)})$, определенная на $M^{(n+1)}$, зависящая от производных u до порядка $n+1$ включительно и обладающая следующим свойством: если $u = f(x)$ — произвольная гладкая функция, то

$$D_iP(x, \mathbf{pr}^{(n+1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i}\{P(x, \mathbf{pr}^{(n)}f(x))\}.$$

Другими словами, D_iP получается из P дифференцированием по x^i, если со всеми u^α и их производными обращаться как с функциями от x.

Предложение 2.35. *Для данной функции* $P(x, u^{(n)})$ *i-я полная производная имеет общий вид*

$$D_iP = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J u_{J,i}^\alpha\frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha}. \qquad (2.36)$$

где $J=(j_1, \ldots, j_k)$ *и*

$$u^\alpha_{J,i}=\frac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^i}=\frac{\partial^{k+1}u^\alpha}{\partial x^i\,\partial x^{j_1}\ldots\partial x^{j_k}}. \tag{2.37}$$

В формуле (2.36) *суммирование производится по всем* J *порядка* $0\leqslant \# J\leqslant n$, *где* n — *наибольший порядок производной, входящей в* P.

Доказательство состоит в непосредственном применении цепного правила. Например, в случае $X=\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) и $U=\mathbb{R}$ имеются две полные производные D_x, D_y и

$$D_xP=\frac{\partial P}{\partial x}+u_x\frac{\partial P}{\partial u}+u_{xx}\frac{\partial P}{\partial u_x}+u_{xy}\frac{\partial P}{\partial u_y}+u_{xxx}\frac{\partial P}{\partial u_{xx}}+\ldots,$$

$$D_yP=\frac{\partial P}{\partial y}+u_y\frac{\partial P}{\partial u}+u_{xy}\frac{\partial P}{\partial u_x}+u_{yy}\frac{\partial P}{\partial u_y}+u_{xxy}\frac{\partial P}{\partial u_{xx}}+\ldots.$$

Таким образом, если $P=xuu_{xy}$, то

$$D_xP=uu_{xy}+xu_xu_{xy}+xuu_{xxy},\qquad D_yP=xu_yu_{xy}+xuu_{xyy}.$$

Полные производные высших порядков определяются по аналогии с частными производными высших порядков. Точнее, если $J=(j_1, \ldots, j_k)$ — мультииндекс порядка k и $1\leqslant j_\varkappa\leqslant p$ для каждого $\varkappa$, то J-я полная производная обозначается

$$D_J=D_{j_1}D_{j_2}\ldots D_{j_k}.$$

(Явные выражения для D_JP в терминах частных производных от P по u^α_J быстро становятся трудно проверяемыми.) Заметим, что, как и для частных производных, порядок дифференцирования для полных производных гладких функций не играет роли. Таким образом, в рассмотренном выше примере

$$D_xD_yP=D_yD_xP=u_yu_{xy}+uu_{xyy}+x\left(u^2_{xy}+u_xu_{xyy}+u_yu_{xxy}+uu_{xxyy}\right).$$

Общая формула продолжения

Теорема 2.36. *Пусть*

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi_\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

— *векторное поле, заданное на открытом подмножестве* $M\subset X\times U$. *Тогда* n-*е продолжение поля* $\mathbf{v}$ — *это векторное поле*

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}=\mathbf{v}+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J\varphi^J_\alpha\left(x, u^{(n)}\right)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}, \tag{2.38}$$

определенное на соответствующем пространстве струй $M^{(n)} \subset \subset X \times U^{(n)}$, *второе суммирование ведется по всем мультииндексам* $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leqslant j_\varkappa \leqslant p$, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Функции* φ_α^J *в* $\mathbf{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ *задаются следующей формулой:*

$$\varphi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J\left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha, \qquad (2.39)$$

где $u_i^\alpha = \partial u^\alpha / \partial x^i$ *и* $u_{J,i}^\alpha = \partial u_J^\alpha / \partial x^i$, *ср.* (2.37).

Доказательство. Докажем сначала эту формулу для производных первого порядка, так что начинаем с $n = 1$. Пусть $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ — соответствующая однопараметрическая группа, преобразования из которой задаются формулой

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (\Xi_\varepsilon(x, u), \Phi_\varepsilon(x, u))$$

там, где они определены. Заметим, что

$$\begin{aligned} \xi^i(x, u) &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Xi_\varepsilon^i(x, u), \quad i = 1, \ldots, p, \\ \varphi_\alpha(x, u) &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Phi_\varepsilon^\alpha(x, u), \quad \alpha = 1, \ldots, q, \end{aligned} \qquad (2.40)$$

где Ξ_ε^i, Φ_ε^α — компоненты отображений Ξ_ε, Φ_ε. Пусть для заданной точки $(x, u^{(1)}) \in M^{(1)}$ $u = f(x)$ — произвольная представляющая функция, так что $u^{(1)} = \mathbf{pr}^{(1)} f(x)$ или, точнее,

$$u^\alpha = f^\alpha(x), \quad u_i^\alpha = \partial f^\alpha(x) / \partial x^i.$$

В соответствии с (2.14) для достаточно малых ε преобразование функции f групповым элементом g_ε определено (по меньшей мере, если область определения функции f — достаточно малая окрестность точки x) и задано формулой

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (g_\varepsilon \cdot f)(\tilde{x}) = [\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)] \circ [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

По цепному правилу матрица Якоби $\mathrm{J}\tilde{f}_\varepsilon(x) = \left(\partial \tilde{f}_\varepsilon^\alpha / \partial \tilde{x}^i\right)$ тогда имеет вид

$$\mathrm{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = \mathrm{J}[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)](x) \cdot \{\mathrm{J}[\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)](x)\}^{-1} \qquad (2.41)$$

(если обратная матрица определена), поскольку

$$x = [\Xi_\varepsilon \circ (\mathbb{1} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

Таким образом, матричная запись $\mathrm{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})$ дает явную формулу для первого продолжения $\mathbf{pr}^{(1)} g_\varepsilon$.

Чтобы найти инфинитезимальную образующую $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}$, нам нужно продифференцировать (2.41) по ε и положить $\varepsilon=0$. Напомним сначала, что если $M(\varepsilon)$ — произвольная обратимая квадратная матрица, элементы которой — функции от ε, то

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[M(\varepsilon)^{-1}\right] = -M(\varepsilon)^{-1}\frac{dM(\varepsilon)}{d\varepsilon}M(\varepsilon)^{-1}.$$

Заметим также, что, поскольку $\varepsilon=0$ соответствует тождественному преобразованию,

$$\Xi_0(x, f(x)) = x, \quad \Phi_0(x, f(x)) = f(x), \tag{2.42}$$

так что, обозначая единичную матрицу размера $p\times p$ через I, получаем

$$\mathrm{J}[\Xi_0(\mathbb{1}\times f)](x) = I, \quad \mathrm{J}[\Phi_0\circ(\mathbb{1}\times f)](x) = \mathrm{J}f(x).$$

Далее, дифференцируя (2.41) и полагая $\varepsilon=0$, приходим, пользуясь правилом Лейбница, к равенствам

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} &\mathrm{J}\tilde f_\varepsilon(\tilde x) = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathrm{J}[\Phi_\varepsilon\circ(\mathbb{1}\times f)](x) - \mathrm{J}f(x)\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathrm{J}[\Xi_\varepsilon\circ(\mathbb{1}\times f)](x) = \\ &= \mathrm{J}[\varphi\circ(\mathbb{1}\times f)[(x)] - \mathrm{J}f(x)\cdot\mathrm{J}[\xi\circ(\mathbb{1}\times f)](x).\end{aligned}$$

Во втором равенстве $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^p)^T$ и $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)^T$ — вектор-столбцы, и мы использовали соотношения (2.40). Матричная запись последней формулы даст нам функции φ_α^k, являющейся коэффициентами при $\partial/\partial u_k^\alpha$ в формуле для $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}$. А именно, (α, k)-й элемент матрицы — это

$$\varphi_\alpha^k(x, \mathrm{pr}^{(1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\varphi_\alpha(x, f(x))\right] - \sum_{i=1}^p \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\xi^i(x, f(x))\right].$$

Таким образом, по определению полной производной

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha^k(x, u^{(1)}) &= D_k\left[\varphi_\alpha(x, u)\right] - \sum_{i=1}^p D_k\left[\xi^i(x, u)\right]u_i^\alpha = \\ &= D_k\left[\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha\right] + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{ki}^\alpha,\end{aligned} \tag{2.43}$$

где $u_{ki}^\alpha = \partial^2 u^\alpha/\partial x^k\,\partial x^i$. Это доказывает формулу (2.39) в случае $n=1$.

Чтобы доказать теорему в общем случае, мы воспользуемся индукцией. Ключевое замечание состоит в том, что пространство $(n+1)$-струй $M^{(n+1)}$ можно рассматривать как подпространство пространства 1-струй пространства $(M^{(n)})^{(1)}$ n-струй, поскольку каждую производную u_J^α порядка $n+1$ можно рассматривать как производную первого порядка от производной порядка n. (Это можно сделать, вообще говоря, несколькими способами.) Поучительно рассмотреть иллюстрирующий это пример. При $p=2$, $q=1$ пространство $M^{(1)}$ 1-струй имеет координаты $(x, y;\ u;\ u_x,\ u_y)$. Если рассмотреть (u_x, u_y) как *новые* зависимые переменные, скажем, $u_x = v$, $u_y = w$, то пространство $M^{(1)}$ оказывается открытым подмножеством пространства $X \times \tilde{U}$, где X по-прежнему двумерно, а $\tilde{U}$ имеет теперь три зависимые переменные u, v и w. Таким образом, пространство 1-струй пространства $M^{(1)}$, т. е. пространство $(M^{(1)})^{(1)}$, будет открытым подмножеством пространства $X \times \tilde{U}^{(1)}$ с координатами $(x, y;\ u;\ v,\ w;\ u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y,\ w_x,\ w_y)$. Далее, вспоминая, что $v = u_x$ и $w = u_y$, мы видим, что $M^{(2)} \subset (M^{(1)})^{(1)}$ — подпространство, определенное соотношениями

$$v = u_x, \quad w = u_y, \quad v_y = w_x$$

в пространстве $X \times \tilde{U}^{(1)}$ и задаваемое лишними переменными u_x, u_y в $(M^{(1)})^{(1)}$ и условием независимости смешанной второй производной функции u от порядка дифференцирования.

С этой точки зрения индуктивная процедура определения $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ через $\mathrm{pr}^{(n-1)}\mathbf{v}$ состоит в следующем. Мы рассматриваем $\mathrm{pr}^{(n-1)}\mathbf{v}$ как векторное поле (некоторого специального вида) на $M^{(n-1)}$ и по нашей формуле для продолжения первого порядка продолжаем его на $(M^{(n-1)})^{(1)}$. Затем мы ограничиваем полученное векторное поле на подпространство $M^{(n)}$. Это и будет определять n-е продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$. (Конечно, нужно еще проверить, что ограничение возможно, но это будет следовать из явной формулы.) Далее, новые координаты «n-го порядка» на $(M^{(n-1)})^{(1)}$ задаются формулами $u_{J,k}^\alpha = \partial u_J^\alpha / \partial x^k$, где $J = (j_1, \ldots$ $\ldots, j_{n-1})$, $1 \leqslant k \leqslant p$, $1 \leqslant \alpha \leqslant q$. В соответствии с (2.43) коэффициент при $\partial/\partial u_{J,k}^\alpha$ в первом продолжении поля $\mathrm{pr}^{(n-1)}\mathbf{v}$ будет равен

$$\varphi_\alpha^{J,k} = D_k \varphi_\alpha^J - \sum_{i=1}^{p} D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha. \tag{2.44}$$

(Как мы увидим, формула (2.44) дает полезное рекуррентное соотношение на коэффициенты поля $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$.) Теперь достаточно проверить, что формула (2.39) представляет собой решение рекуррентного соотношения (2.44) в замкнутой форме. По индукции получаем

$$\varphi_\alpha^{J,k} = D_k\left\{D_J\left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha\right\} - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha =$$

$$= D_k D_J\left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^p (D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha + \xi^i u_{J,ik}^\alpha) - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha =$$

$$= D_k D_J\left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,ik}^\alpha,$$

где $u_{J,ik}^\alpha = \partial^2 u_J^\alpha / \partial x^i \partial x^k$. Таким образом, $\varphi_\alpha^{J,k}$ имеет вид (2.39), и шаг индукции завершен. □

Пример 2.37. Вернемся к случаю группы вращений SO(2), действующей на $X \times U \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с инфинитезимальной образующей

$$\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u};$$

см. примеры 2.26 и 2.29. В этом случае $\varphi = x$, $\xi = u$, так что первое продолжение

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x}$$

задается формулой

$$\varphi^x = D_x(\varphi - \xi u_x) + \xi u_{xx} = D_x(x + uu_x) - uu_{xx} = 1 + u_x^2.$$

Таким образом, мы снова получили результат (2.24). Коэффициент φ^{xx} при $\partial/\partial u_{xx}$ в $\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v}$ получается с помощью либо (2.39):

$$\varphi^{xx} = D_x^2(\varphi - \xi u_x) + \xi u_{xxx} = D_x^2(x + uu_x) - uu_{xxx} = 3u_x u_{xx},$$

либо рекуррентной формулы (2.44):

$$\varphi^{xx} = D_x\varphi^x - u_{xx}D_x\xi = D_x(1 + u_x^2) + u_x u_{xx} = 3u_x u_{xx}.$$

Таким образом, инфинитезимальная образующая второго продолжения $\mathrm{pr}^{(2)}\mathrm{SO}(2)$, действующего на $X \times U^{(2)}$, равна

$$\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x} + 3u_x u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

(Не приходится и говорить, что вывод этой формулы непосредственно из действия группы $\mathrm{pr}^{(2)}\mathrm{SO}(2)$ гораздо более сложен.)

Пользуясь инфинитезимальным критерием инвариантности теоремы 2.31, мы немедленно получаем, что для обыкновенного дифференциального уравнения $u_{xx}=0$ группа SO(2) будет группой симметрий, поскольку

$$\mathbf{pr}^{(2)}\mathbf{v}(u_{xx})=3u_xu_{xx}=0$$

при $u_{xx}=0$. Это в точности переформулировка того геометрического факта, что вращения переводят прямые в прямые. Чтобы получить другую геометрическую иллюстрацию, рассмотрим функцию

$$\varkappa(x, u^{(2)})=u_{xx}\left(1+u_x^2\right)^{-3/2}.$$

Легкое вычисление показывает, что

$$\mathbf{pr}^{(2)}\mathbf{v}(\varkappa)=0$$

для всех u_x, u_{xx}. Следовательно, в силу предложения 2.6 $\varkappa$ является инвариантом группы $\mathrm{pr}^{(2)}SO(2)$:

$$\varkappa(\mathbf{pr}^{(2)}\theta\cdot(x, u^{(2)}))=\varkappa(x, u^{(2)})$$

для произвольного поворота θ. Но $\varkappa$ — это кривизна кривой, определяемой графиком функции $u=f(x)$, так что мы в точности передоказали тот факт, что кривизна кривой инвариантна относительно вращений. (Это частный случай теории дифференциальных инвариантов — см. § 2.5, где имеются дальнейшие результаты такого сорта.)

Пример 2.38. Рассмотрим частный случай, когда в формуле продолжения $p=2$, $q=1$, так что мы рассматриваем дифференциальное уравнение с частными производными, содержащее функцию $u=f(x, t)$. Произвольное векторное поле на $X\times U\simeq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathbf{v}=\xi(x, t, u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x, t, u)\frac{\partial}{\partial t}+\varphi(x, t, u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Первое продолжение поля $\mathbf{v}$ — это векторное поле

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}=\mathbf{v}+\varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x}+\varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t},$$

где в силу (2.39)

$$\begin{aligned}\varphi^x&=D_x(\varphi-\xi u_x-\tau u_t)+\xi u_{xx}+\tau u_{xt}=D_x\varphi-u_xD_x\xi-u_tD_x\tau=\\&=\varphi_x+(\varphi_u-\xi_x)u_x-\tau_xu_t-\xi_uu_x^2-\tau_uu_xu_t,\\\varphi^t&=D_t(\varphi-\xi u_x-\tau u_t)+\xi u_{xt}+\tau u_{tt}=D_t\varphi-u_xD_t\xi-u_tD_t\tau=\\&=\varphi_t-\xi_tu_x+(\varphi_u-\tau_t)u_t-\xi_uu_xu_t-\tau_uu_t^2,\end{aligned}\tag{2.45}$$

а индексы при φ, ξ, τ обозначают частные производные. Аналогично,

$$\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

где, например,

$$\begin{aligned}\varphi^{xx} &= D_x^2(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = \\ &= D_x^2\varphi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau = \\ &= \varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - \\ &\quad - 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} - \\ &\quad - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Эти формулы будут использованы в следующем параграфе для вычисления групп симметрий некоторых известных эволюционных уравнений.

Свойства продолженных векторных полей

Теорема 2.39. *Предположим, что* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{w}$ *— гладкие векторные поля на* $M \subset X \times U$. *Тогда их продолжения обладают свойствами*

$$\mathrm{pr}^{(n)}(c\mathbf{v} + c'\mathbf{w}) = c \cdot \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} + c' \cdot \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{w},$$

где c, c' *— константы, и*

$$\mathrm{pr}^{(n)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}, \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{w}]. \tag{2.47}$$

Доказательство. Линейность мы оставляем читателю. Свойство скобки Ли можно доказать непосредственным вычислением, используя (2.38) и (2.39). Однако легче поступить следующим образом. Заметим сначала, что если g, h — элементы некоторой группы преобразований, то

$$\mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot h) = \mathrm{pr}^{(n)}g \cdot \mathrm{pr}^{(n)}h$$

и, поскольку M — подмножество некоторого евклидова пространства,

$$\mathrm{pr}^{(n)}(g + h) = \mathrm{pr}^{(n)}g + \mathrm{pr}^{(n)}h,$$

где $(g+h)\cdot x = g\cdot x + h\cdot x$ по определению. Пусть $\mathbb{1}$ обозначает тождественное преобразование M, так что $\mathbb{1}^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)}\mathbb{1}$ — тождественное преобразование $M^{(n)}$. Пользуясь свойством скобки Ли из теоремы 1.33, получаем

$$[\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}, \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{w}] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\mathrm{pr}^{(n)}[\exp(-\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{w})\exp(-\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{v})\exp(\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{w})\exp(\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{v})] - \mathbb{1}^{(n)}}{\varepsilon} =$$
$$= \mathrm{pr}^{(n)}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{[\exp(-\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{w})\exp(-\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{v})\exp(\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{w})\exp(\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{v})] - \mathbb{1}}{\varepsilon}\right\} =$$
$$= \mathrm{pr}^{(n)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}]. \quad \square$$

Следствие 2.40. *Пусть Δ — система дифференциальных уравнений максимального ранга, определенная на $M \subset X \times U$. Множество всех инфинитезимальных симметрий этой системы образует алгебру Ли векторных полей на M. Кроме того, если эта алгебра Ли конечномерна, то полная группа симметрий этой системы является локальной группой Ли преобразований, действующей на M.*

Характеристики симметрий

Наконец, мы отметим эквивалентный, вычислительно полезный способ записи общей формулы продолжения (2.39). Для заданного, как и раньше, векторного поля $\mathbf{v}$ положим

$$Q_\alpha(x, u^{(1)}) = \varphi_\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u)\, u_i^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, q; \tag{2.48}$$

набор q функций $Q(x, u^{(1)}) = (Q_1, \ldots, Q_q)$ называется *характеристикой* векторного поля $\mathbf{v}$. По этому определению формула (2.39) принимает вид

$$\varphi_\alpha^J = D_J Q_\alpha + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha. \tag{2.49}$$

Подставляя в (2.38) и переставляя члены, получаем

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \sum_{i=1}^{p} \xi^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right\}.$$

Мы видим, что стоящие в скобках члены — это в точности полные производные в соответствии с формулой (2.36); следовательно,

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i, \tag{2.50}$$

где по определению

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \tag{2.51}$$

Во всех этих формулах суммирование распространяется на все мультииндексы J порядка $0 \leqslant \# J \leqslant n$. Конечно, оба слагаемых в правой части (2.50) — это формальные алгебраические выражения, поскольку каждое из них включает производные функций u порядка $n+1$. И только когда в их линейной комбинации члены, содержащие производные порядка $n+1$, взаимно уничтожаются, мы получаем настоящее векторное поле на пространстве струй $M^{(n)}$. Важность формулы (2.50) станет очевидной, когда мы будем обсуждать обобщенные симметрии в гл. 5.

2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРУПП СИММЕТРИЙ

Теорема 2.31 в совокупности с формулами продолжения (2.38), (2.39) доставляет эффективную вычислительную процедуру, позволяющую отыскать наиболее общую (связную) группу симметрий почти всякой системы уравнений с частными производными, которая нас интересует. В этой процедуре коэффициенты $\xi^i(x, u)$, $\varphi_\alpha(x, u)$ инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ гипотетической однопараметрической группы симметрий системы считаются неизвестными функциями от x и u. Коэффициентами φ_α^J продолженной инфинитезимальной образующей $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ будут некоторые явные выражения, содержащие частные производные коэффициентов ξ^i и φ_α по x и u. Инфинитезимальный критерий инвариантности (2.25) будет, таким образом, содержать x, u и производные от u по x, а также $\xi^i(x, u)$, $\varphi_\alpha(x, u)$ и их частные производные по x и u. После исключения всех зависимостей между производными от u, вытекающих из самой системы (поскольку (2.25) должно выполняться лишь на решениях системы), мы можем приравнять нулю коэффициенты при оставшихся частных производных от u. Это приведет к большому числу элементарных уравнений с частными производными для определения функций ξ^i, φ_α, являющихся коэффициентами инфинитезимальной образующей. Эти уравнения называются *определяющими уравнениями* группы симметрий данной системы.