Мы видим, что стоящие в скобках члены — это в точности полные производные в соответствии с формулой (2.36); следовательно,

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i, \tag{2.50}$$

где по определению

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \tag{2.51}$$

Во всех этих формулах суммирование распространяется на все мультииндексы J порядка $0 \leqslant \#J \leqslant n$. Конечно, оба слагаемых в правой части (2.50) — это формальные алгебраические выражения, поскольку каждое из них включает производные функций u порядка $n+1$. И только когда в их линейной комбинации члены, содержащие производные порядка $n+1$, взаимно уничтожаются, мы получаем настоящее векторное поле на пространстве струй $M^{(n)}$. Важность формулы (2.50) станет очевидной, когда мы будем обсуждать обобщенные симметрии в гл. 5.

2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРУПП СИММЕТРИЙ

Теорема 2.31 в совокупности с формулами продолжения (2.38), (2.39) доставляет эффективную вычислительную процедуру, позволяющую отыскать наиболее общую (связную) группу симметрий почти всякой системы уравнений с частными производными, которая нас интересует. В этой процедуре коэффициенты $\xi^i(x, u)$, $\varphi_\alpha(x, u)$ инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ гипотетической однопараметрической группы симметрий системы считаются неизвестными функциями от x и u. Коэффициентами φ_α^J продолженной инфинитезимальной образующей $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ будут некоторые явные выражения, содержащие частные производные коэффициентов ξ^i и φ_α по x и u. Инфинитезимальный критерий инвариантности (2.25) будет, таким образом, содержать x, u и производные от u по x, а также $\xi^i(x, u)$, $\varphi_\alpha(x, u)$ и их частные производные по x и u. После исключения всех зависимостей между производными от u, вытекающих из самой системы (поскольку (2.25) должно выполняться лишь на решениях системы), мы можем приравнять нулю коэффициенты при оставшихся частных производных от u. Это приведет к большому числу элементарных уравнений с частными производными для определения функций ξ^i, φ_α, являющихся коэффициентами инфинитезимальной образующей. Эти уравнения называются *определяющими уравнениями* группы симметрий данной системы.

В большинстве примеров такие определяющие уравнения можно решить элементарными методами, а общее решение будет определять наиболее общую инфинитезимальную симметрию системы. В следствии 2.40 утверждается, что полученная система инфинитезимальных образующих составляет алгебру Ли симметрий; сама общая группа симметрий может быть получена из данных векторных полей с помощью экспоненты. Эта процедура станет яснее из следующих примеров.

Пример 2.41. *Уравнение теплопроводности.* Рассмотрим уравнение теплопроводности для одномерного стержня

$$u_t = u_{xx}, \tag{2.52}$$

коэффициент диффузии мы полагаем равным единице. Здесь имеются две независимые переменные x и t и одна зависимая переменная u, так что в наших обозначениях $p=2$ и $q=1$. Уравнение теплопроводности имеет второй порядок, $n=2$, и его можно отождествить с линейным подмногообразием в $X\times U^{(2)}$, задаваемым условием обращения в нуль выражения $\Delta(x,t,u^{(2)}) = u_t - u_{xx}$.

Пусть

$$\mathbf{v} = \xi(x, t, u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x, t, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.53}$$

— векторное поле на $X\times U$. Мы хотим найти все возможные коэффициенты ξ, τ и φ, такие, что соответствующая однопараметрическая группа $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ будет группой симметрий уравнения теплопроводности. В соответствии с теоремой 2.31 нам нужно знать второе продолжение

$$\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

поля $\mathbf{v}$, коэффициенты которого были вычислены в примере 2.38. Применяя $\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v}$ к (2.52), мы получаем, что инфинитезимальный критерий (2.25) принимает вид

$$\varphi^t = \varphi^{xx}, \tag{2.54}$$

и это равенство должно выполняться при $u_t = u_{xx}$. Подставляя общие формулы (2.45), (2.46) в (2.54), заменяя u_t на u_{xx} и приравнивая коэффициенты при различных одночленах в частных производных первого и второго порядков от u, мы получаем следующие определяющие уравнения для группы симметрий уравнения теплопроводности:

Одночлен	Коэффициент	
$u_x u_{xt}$	$0 = -2\tau_u$	(a)
u_{xt}	$0 = -2\tau_x$	(b)
u_{xx}^2	$-\tau_u = -\tau_u$	(c)
$u_x^2 u_{xx}$	$0 = -\tau_{uu}$	(d)
$u_x u_{xx}$	$-\xi_u = -2\tau_{xu} - 3\xi_u$	(e)
u_{xx}	$\varphi_u - \tau_t = -\tau_{xx} + \varphi_u - 2\xi_x$	(f)
u_x^3	$0 = -\xi_{uu}$	(g)
u_x^2	$0 = \varphi_{uu} - 2\xi_{xu}$	(h)
u_x	$-\xi_t = 2\varphi_{xu} - \xi_{xx}$	(j)
1	$\varphi_t = \varphi_{xx}$	(k)

(Как обычно, индекс означает производную.) Решение определяющих уравнений элементарно. Во-первых, из (a) и (b) вытекает, что τ — функция только от t. Далее, (e) показывает, что ξ не зависит от u, а из (f) следует, что $\tau_t = 2\xi_x$, так что $\xi(x, t) = \tau_t x/2 + \sigma(t)$, где σ — некоторая функция, зависящая только от t. Затем в силу (h) функция φ линейна по u, так что

$$\varphi(x, t, u) = \beta(x, t) u + \alpha(x, t)$$

для некоторых функций α и β. В соответствии с (j) $\xi_t = -2\beta_x$, так что β — функция не более чем второго порядка по x:

$$\beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t).$$

Наконец, последнее уравнение (k) требует, чтобы и α, и β были решениями уравнения теплопроводности:

$$\alpha_t = \alpha_{xx}, \quad \beta_t = \beta_{xx}.$$

Пользуясь найденным видом функции β, получаем

$$\tau_{ttt} = 0, \quad \sigma_{tt} = 0, \quad \rho_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt}.$$

Таким образом, τ — квадратичная функция от t, σ линейна по t, и мы можем получить формулы для ξ и φ непосредственно из формул для ρ, σ и τ. Поскольку все определяющие уравнения теперь удовлетворяются, мы заключаем, что коэффициенты наиболее общей инфинитезимальной симметрии уравнения теплопроводности имеют вид

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt,$$
$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2,$$
$$\varphi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)\, u + \alpha(x, t),$$

где $c_1, \ldots, c_6$ — произвольные постоянные, а $\alpha(x, t)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности. Таким образом, алгебра Ли инфинитезимальных симметрий уравнения теплопроводности порождена шестью векторными полями

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \partial_x,\\
\mathbf{v}_2 &= \partial_t,\\
\mathbf{v}_3 &= u\partial_u,\\
\mathbf{v}_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t,\\
\mathbf{v}_5 &= 2t\partial_x - xu\partial_u,\\
\mathbf{v}_6 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)\, u\partial_u
\end{aligned} \qquad (2.55)$$

и бесконечномерной подалгеброй

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x, t)\, \partial_u,$$

где α — произвольное решение уравнения теплопроводности. Коммутаторы этих векторных полей даются следующей таблицей, на пересечении i-й строки и j-го столбца которой стоит $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_\alpha$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	$\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_3$	$2\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_{\alpha_x}$
$\mathbf{v}_2$	0	0	0	$2\mathbf{v}_2$	$2\mathbf{v}_1$	$4\mathbf{v}_4 - 2\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_{\alpha_t}$
$\mathbf{v}_3$	0	0	0	0	0	0	$-\mathbf{v}_\alpha$
$\mathbf{v}_4$	$-\mathbf{v}_1$	$-2\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_5$	$2\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_{\alpha'}$
$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_3$	$-2\mathbf{v}_1$	0	$-\mathbf{v}_5$	0	0	$\mathbf{v}_{\alpha''}$
$\mathbf{v}_6$	$-2\mathbf{v}_5$	$2\mathbf{v}_3 - 4\mathbf{v}_4$	0	$-2\mathbf{v}_6$	0	0	$\mathbf{v}_{\alpha'''}$
$\mathbf{v}_\alpha$	$-\mathbf{v}_{\alpha_x}$	$-\mathbf{v}_{\alpha_t}$	$\mathbf{v}_\alpha$	$-\mathbf{v}_{\alpha'}$	$-\mathbf{v}_{\alpha''}$	$-\mathbf{v}_{\alpha'''}$	0

$$\alpha' = x\alpha_x + 2t\alpha_t, \qquad \alpha'' = 2t\alpha_x + x\alpha,$$
$$\alpha''' = 4tx\alpha_x + 4t^2\alpha_t + (x^2 + 2t)\,\alpha.$$

Заметим, что, поскольку следствие 2.40 говорит нам, что все инфинитезимальные симметрии должны составлять алгебру Ли, мы можем заключить, что если $\alpha(x,t)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности, то α_x, α_t, а также выписанные выше α', α'' и α''' тоже являются решениями.

Однопараметрические группы G_i, порожденные полями $\mathbf{v}_i$, даются следующей таблицей. В таблице указаны образы точки (x,t,u) при преобразовании $\exp(\varepsilon\mathbf{v}_i)$:

$$\begin{aligned}
&G_1: && (x+\varepsilon,\ t,\ u),\\
&G_2: && (x,\ t+\varepsilon,\ u),\\
&G_3: && (x,\ t,\ e^{\varepsilon}u),\\
&G_4: && (e^{\varepsilon}x,\ e^{2\varepsilon}t,\ u),\\
&G_5: && (x+2\varepsilon t,\ t,\ u\cdot\exp(-\varepsilon x-\varepsilon^2 t)),\\
&G_6: && \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t},\ \frac{t}{1-4\varepsilon t},\ u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right\}\right),\\
&G_\alpha: && (x,\ t,\ u+\varepsilon\alpha(x,\ t)).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Поскольку каждая группа G_i является группой симметрий, из (2.14) следует, что если $u=f(x,t)$ — решение уравнения теплопроводности, то функции

$$\begin{aligned}
&u^{(1)}=f(x-\varepsilon,\ t),\\
&u^{(2)}=f(x,\ t-\varepsilon),\\
&u^{(3)}=e^{\varepsilon}f(x,\ t),\\
&u^{(4)}=f(e^{-\varepsilon}x,\ e^{-2\varepsilon}t),\\
&u^{(5)}=e^{-\varepsilon x-\varepsilon^2 t}f(x-2\varepsilon t,\ t),\\
&u^{(6)}=\frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t},\ \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right),\\
&u^{(\alpha)}=f(x,\ t)+\varepsilon\alpha(x,\ t),
\end{aligned}$$

где ε — произвольное вещественное число, а $\alpha(x,t)$ — другое произвольное решение уравнения теплопроводности, тоже являются решениями уравнения теплопроводности. (См. пример 2.22, где подробно обсуждается, как эти выражения получаются из групповых преобразований.)

Группы симметрий G_3 и G_α отражают, таким образом, линейность уравнения теплопроводности; мы можем складывать решения и умножать их на константы. Группы G_1 и G_2 демонстрируют временнýю и пространственную инвариантность уравнения, отражая тот факт, что уравнение теплопроводности имеет постоянные коэффициенты. Известная симметрия относительно растяжений проявляется в группе G_4, а группа G_5 представляет преобразования Галилея в движущейся системе координат. Последняя группа G_6 является существенно локальной группой преобразований. Ее появление вовсе не очевидно из основных физических принципов, однако оно приводит к следующему замечательному выводу. Если выбрать $u = c$ в качестве исходного решения, то мы немедленно заключаем, что функция

$$u = \frac{c}{\sqrt{1+4\varepsilon t}} \exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}$$

тоже является решением. В частности, полагая $c = \sqrt{\varepsilon/\pi}$, мы получаем фундаментальное решение уравнения теплопроводности в точке $(x_0, t_0) = (0, -1/4\varepsilon)$. Чтобы получить фундаментальное решение

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{\frac{-x^2}{4t}\right\},$$

нам нужно осуществить сдвиг по t, пользуясь группой G_2 (с заменой ε на $-1/4\varepsilon$).

Наиболее общая однопараметрическая группа симметрий получается, если рассмотреть общую линейную комбинацию $c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_6\mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_\alpha$ данных векторных полей; явные формулы для преобразований из этой группы очень сложны. Другой способ: можно использовать (1.40) и представить произвольное преобразование g как композицию преобразований из различных однопараметрических подгрупп $G_1, \ldots, G_6, G_\alpha$. В частности, если g близко к тождественному преобразованию, оно единственным образом может быть представлено в виде

$$g = \exp(\mathbf{v}_\alpha) \cdot \exp(\varepsilon_6 \mathbf{v}_6) \cdot \ldots \cdot \exp(\varepsilon_1 \mathbf{v}_1).$$

Таким образом, наиболее общее решение, получающееся из данного решения $u = f(x, t)$ преобразованиями из рассматриваемой группы, имеет вид

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon_6 t}} \exp\left\{\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_5 x + \varepsilon_6 x^2 - \varepsilon_5^2 t}{1+4\varepsilon_6 t}\right\} \times$$
$$\times f\left(\frac{e^{-\varepsilon_4}(x - 2\varepsilon_5 t)}{1+4\varepsilon_6 t} - \varepsilon_1, \frac{e^{-2\varepsilon_4} t}{1+4\varepsilon_6 t} - \varepsilon_2\right) + \alpha(x, t),$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_6$ — вещественные постоянные, а α — произвольное решение уравнения теплопроводности.

Пример 2.42. *Уравнение Бюргерса.* Уравнение Бюргерса — это нелинейное уравнение, тесно связанное с уравнением теплопроводности. Имея в виду группу симметрий, его удобно записать в виде уравнения для потенциала u:

$$u_t = u_{xx} + u_x^2. \tag{2.57}$$

Заметим, что если продифференцировать его по x и подставить $v = u_x$, мы получим более обычный вид

$$v_t = v_{xx} + 2vv_x \tag{2.58}$$

уравнения Бюргерса; оно представляет собой простейшее волновое уравнение, сочетающее диссипативные и нелинейные эффекты, и появляется поэтому во многих физических приложениях.

Группа симметрий уравнения (2.57) снова будет порождена векторными полями вида (2.53). Применяя второе продолжение $\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v}$ к (2.57), получаем, что ξ, τ, φ должны удовлетворять условиям симметрии

$$\varphi^t = \varphi^{xx} + 2u_x\varphi^x, \tag{2.59}$$

где коэффициенты φ^t, φ^x, φ^{xx} в $\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v}$ были определены в примере 2.38, причем мы подставляем $u_{xx} + u_x^2$ вместо u_t всюду, где u_t встречается в (2.59). На этом этапе мы могли бы записать (2.59) во всех подробностях и приравнять коэффициенты при разных производных первого и второго порядков от функции u, чтобы получить полностью определяющие уравнения, как мы поступали в предыдущем примере. Практически, однако, гораздо более целесообразно браться за решение уравнений симметрий поэтапно, получая сначала информацию из появляющихся в них производных высших порядков и затем используя эту информацию для упрощения формул продолжения на последующих этапах. Такой путь «сверху вниз» наиболее эффективен. Более того, это почти единственный путь, пригодный для систем уравнений высших порядков, для которых потребовалось бы много страниц, чтобы во всех подробностях записать полную систему определяющих уравнений.

В нашем случае, используя (2.45), (2.46) и имея в виду, что u_t заменено на $u_{xx} + u_x^2$, мы получаем, что коэффициенты при $u_x u_{xt}$ и u_{xt} накладывают условие $\tau_u = \tau_x = 0$, так что τ — функция только от t. (Заметим, что это уже упрощает формулы для φ^x и φ^{xx}, хотя и совсем немного.) Коэффициент при $u_x u_{xx}$ показывает, что ξ не зависит от u, коэффициент при u_{xx} — что $\tau_t = 2\xi_x$, так что $\xi(x, t) = \tau_t x/2 + \sigma(t)$. Коэффициент при u_x^2 есть

$$\varphi_u - \tau_t = \varphi_{uu} + 2\varphi_u - 2\xi_x,$$

следовательно,

$$\varphi = \alpha(x, t)e^{-u} + \beta(x, t).$$

Коэффициент при u_x приводит к условию

$$\xi_t = -2\varphi_{xu} - 2\varphi_x = -2\beta_x.$$

Значит,

$$\beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t).$$

Оставшиеся члены, не содержащие никаких производных от u, — это в точности

$$\varphi_t = \varphi_{xx}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
\xi &= c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt,\\
\tau &= c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2,\\
\varphi &= \alpha(x, t)e^{-u} + c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2,
\end{aligned}$$

где $c_1, \ldots, c_6$ — произвольные постоянные, а $\alpha(x, t)$ — произвольное решение *уравнения теплопроводности*: $\alpha_t = \alpha_{xx}$. Алгебра симметрий, таким образом, порождается полями

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \partial_x,\\
\mathbf{v}_2 &= \partial_t,\\
\mathbf{v}_3 &= \partial_u,\\
\mathbf{v}_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t,\\
\mathbf{v}_5 &= 2t\partial_x - x\partial_u,\\
\mathbf{v}_6 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)\partial_u,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

и

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x, t)e^{-u}\partial_u,$$

где α — произвольное решение уравнения теплопроводности.

Отметим замечательное сходство между алгеброй симметрий уравнения Бюргерса и тем, что мы получили раньше для уравнения теплопроводности! В самом деле, если мы заменим u на $w = e^u$, то поля $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6$, $\mathbf{v}_\alpha$ заменятся на соответствующие векторные поля (2.55), где вместо u стоит w. Действительно, полагая $w = e^u$ в уравнении Бюргерса, мы находим

$$w_t = u_t e^u, \quad w_{xx} = (u_{xx} + u_x^2)e^u,$$

следовательно, w удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t = w_{xx}!$$

Мы переоткрыли известное преобразование Хопфа — Коула, сводящее решения уравнения Бюргерса к положительным решениям уравнения теплопроводности. (Для уравнения Бюргерса в обычном виде (2.58) оно имеет вид

$$v = (\log w)_x = w_x/w.$$

Это преобразование гораздо труднее вывести из свойств симметрии уравнения (2.58), которое, как может проверить читатель, имеет лишь пятипараметрическую группу симметрий.) Поскольку мы свели уравнение (2.57) к уравнению теплопроводности, нет нужды продолжать здесь обсуждение свойств его симметрий.

Пример 2.43. *Волновое уравнение.* Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{2.61}$$

x, y — две пространственные координаты, t — время. Типичное векторное поле на пространстве независимых и зависимых переменных имеет вид

$$\mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial u},$$

где ξ, η, τ, φ зависят от x, y, t, u. В этом примере легче работать с инфинитезимальным критерием инвариантности в виде (2.26), который в нашем случае принимает вид

$$\varphi^{tt} - \varphi^{xx} - \varphi^{yy} = Q \cdot (u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}). \tag{2.62}$$

Здесь $Q(x, y, t, u^{(2)})$ может зависеть от производных функции u до второго порядка включительно. Коэффициенты φ^{tt}, φ^{xx}, φ^{yy} в $\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v}$ задаются выражениями, аналогичными (2.46), но с дополнительными членами, включающими производные по y; например,

$$\begin{aligned}\varphi^{tt} &= D_t^2(\varphi - \xi u_x - \eta u_y - \tau u_t) + \xi u_{xtt} + \eta u_{ytt} + \tau u_{ttt} = \\ &= D_t^2\varphi - u_x D_t^2\xi - u_y D_t^2\eta - u_t D_t^2\tau - 2u_{xt}D_t\xi - 2u_{yt}D_t\eta - 2u_{tt}D_t\tau\end{aligned}$$

и т. д.

Чтобы решить (2.62), рассмотрим сначала члены, содержащие смешанные частные производные функции u второго порядка, а именно u_{xy}, u_{xt} и u_{yt}, каждая из которых входит линейно в левую часть. Отсюда получается, что ξ, η и τ не зависят от u и, более того,

$$\xi_y + \eta_x = 0, \quad \xi_t - \tau_x = 0, \quad \eta_t - \tau_y = 0. \tag{2.63}$$

Коэффициенты при оставшихся производных функции u второго порядка дают соотношения

$$\varphi_u - 2\tau_t = \varphi_u - 2\xi_x = \varphi_u - 2\eta_y = Q,$$

следовательно,

$$\tau_t = \xi_x = \eta_y. \tag{2.64}$$

Уравнения (2.63), (2.64) — это уравнения инфинитезимального конформного преобразования пространства $\mathbb{R}^3$ с метрикой Лоренца $dt^2 - dx^2 - dy^2$, ср. упр. 1.30. Нетрудно показать, что ξ, η, τ — квадратные многочлены от x, y, t вида

$$\xi = c_1 + c_4 x - c_5 y + c_6 t + c_8 (x^2 - y^2 + t^2) + 2c_9 xy + 2c_{10} xt,$$
$$\eta = c_2 + c_5 x + c_4 y + c_7 t + 2c_8 xy + c_9 (-x^2 + y^2 + t^2) + 2c_{10} yt,$$
$$\tau = c_3 + c_6 x + c_7 y + c_4 t + 2c_8 xt + 2c_9 yt + c_{10} (x^2 + y^2 + t^2),$$

где $c_1, \ldots, c_{10}$ — константы. Например, получаем

$$\xi_{xxx} = \eta_{xxy} = -\xi_{xyy} = -\tau_{yyt} = -\eta_{ytt} = -\xi_{xtt} = -\tau_{xxt} = -\xi_{xxx},$$

следовательно, все эти производные третьего порядка обращаются в нуль; аналогичные рассуждения показывают, что *все* производные третьего порядка от ξ, η и τ нулевые, а строение получающихся квадратных многочленов легко получается из (2.63), (2.64).

Далее, коэффициент при u_x^2 (или u_y^2, или u_t^2) в (2.62) показывает, что $\varphi_{uu} = 0$, так что

$$\varphi(x, y, t, u) = \beta(x, y, t) u + \alpha(x, y, t).$$

Наконец, коэффициенты при линейных членах в производных функции u первого порядка и члены, не содержащие u вообще, дают соотношения

$$2\beta_x = \xi_{xx} + \xi_{yy} - \xi_{tt},$$
$$2\beta_y = \eta_{xx} + \eta_{yy} - \eta_{tt},$$
$$2\beta_t = \tau_{tt} - \tau_{xx} - \tau_{yy},$$
$$\alpha_{tt} - \alpha_{xx} - \alpha_{yy} = 0.$$

Таким образом, α — произвольное решение волнового уравнения и

$$\beta = c_{11} - c_8 x - c_9 y - c_{10} t.$$

Это задает наиболее общее решение определяющих уравнений группы симметрий волнового уравнения. Итак, мы передоказали известный результат о том, что группа инфинитезимальных симметрий волнового уравнения порождается десятью векторными полями

$$\begin{array}{ll}
\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_t & \text{(сдвиги)},\\
\mathbf{r}_{xy} = -y\partial_x + x\partial_y,\quad \mathbf{r}_{xt} = t\partial_x + x\partial_t, & \text{(гиперболические}\\
\mathbf{r}_{yt} = t\partial_y + y\partial_t & \text{вращения)},\\
\mathbf{d} = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t & \text{(дилатация)}\\
\left.\begin{array}{l}
\mathbf{i}_x = (x^2 - y^2 + t^2)\partial_x + 2xy\partial_y + 2xt\partial_t - xu\partial_u,\\
\mathbf{i}_y = 2xy\partial_x + (y^2 - x^2 + t^2)\partial_y + 2yt\partial_t - yu\partial_u,\\
\mathbf{i}_t = 2xt\partial_x + 2yt\partial_y + (x^2 + y^2 + t^2)\partial_t - tu\partial_u
\end{array}\right\} & \text{(инверсии)},
\end{array} \qquad (2.65)$$

порождающими конформную алгебру для $\mathbb{R}^3$ с данной метрикой Лоренца, и дополнительными векторными полями

$$u\partial_u, \quad \mathbf{v}_\alpha = \alpha(x, y, t)\partial_u,$$

где α — произвольное решение волнового уравнения, отражающими линейность этого уравнения.

Легко найти групповые преобразования, соответствующие сдвигам и дилатациям. Что касается вращений, то, поскольку метрика $dt^2 - dx^2 - dy^2$ не является ни положительно, ни отрицательно определенной, лишь вращения в плоскости (x, y) оказываются настоящими вращениями, два других — это «гиперболические вращения». Например, $\mathbf{r}_{xt}$ порождает группу

$$(x, y, t) \longmapsto (x \operatorname{ch} \varepsilon + t \operatorname{sh} \varepsilon, y, x \operatorname{sh} \varepsilon + t \operatorname{ch} \varepsilon).$$

Для инверсий соответствующие группы можно построить, как в упр. 1.30, исходя из инверсии

$$I(x, y, t) = \left(\frac{x}{t^2 - x^2 - y^2}, \frac{y}{t^2 - x^2 - y^2}, \frac{t}{t^2 - x^2 - y^2}\right),$$

которая определена в точках (x, y, t), не лежащих на световом конусе $t^2 = x^2 + y^2$. Мы получили, что группа, порожденная, скажем, $\mathbf{i}_x$, сводится к композиции инверсии, сдвига по оси x и затем снова инверсии:

$$\exp(\varepsilon \mathbf{i}_x) = I \circ \exp(\varepsilon\partial_x) \circ I.$$

Общая формула имеет вид

$$(x, y, t) \longmapsto \left(\frac{x + \varepsilon(t^2 - x^2 - y^2)}{1 - 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}, \frac{y}{1 - 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}, \frac{t}{1 - 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}\right).$$

Эта формула имеет смысл даже для точек (x, y, t), лежащих в световом конусе (который является инвариантным подмногообразием). Под действием $\exp(\varepsilon \mathbf{i}_x)$ переменная u преобразуется следующим образом:

$$u \longmapsto \sqrt{1 - 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}\, u.$$

Мы заключаем, что если $u = f(x, y, t)$ — решение волнового уравнения, то и

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}} f\left(\frac{x - \varepsilon(t^2 - x^2 - y^2)}{1 + 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}, \frac{y}{1 + 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}, \frac{t}{1 + 2\varepsilon x - \varepsilon^2(t^2 - x^2 - y^2)}\right)$$

будет его решением.

Пример 2.44. *Уравнение Кортевега — де Фриза.* В качестве примера уравнения более высокого порядка рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \tag{2.66}$$

возникающее в теории длинных волн в мелкой воде и в других физических системах, в которых имеют место и нелинейные эффекты, и дисперсия. Векторное поле $\mathbf{v} = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \varphi\partial_u$ порождает однопараметрическую группу симметрий, если и только если

$$\varphi^t + \varphi^{xxx} + u\varphi^x + u_x\varphi = 0 \tag{2.67}$$

для всех u, удовлетворяющих (2.66). Здесь коэффициенты φ^t и φ^x первого продолжения поля $\mathbf{v}$ определяются общей формулой продолжения (2.45); коэффициент при $\partial/\partial u_{xxx}$ в $\mathbf{pr}^{(3)}\mathbf{v}$ равен

$$\varphi^{xxx} = D_x^3\varphi - u_x D_x^3\xi - u_t D_x^3\tau - 3u_{xx}D_x^2\xi - 3u_{xt}D_x^2\tau - \\ - 3u_{xxx}D_x\xi - 3u_{xxt}D_x\tau.$$

Подставляя это выражение в (2.67) и заменяя u_t на $-u_{xxx} - uu_x$ там, где u_t встречается, мы получаем определяющие уравнения для группы симметрий. Чтобы их проанализировать, мы стараемся понизить порядок появляющихся производных. Коэффициент при u_{xxt} равен $D_x\tau = 0$, следовательно, τ зависит только от t. Коэффициент при u_{xx}^2 показывает, что $\xi_u = 0$. Коэффициент при u_{xxx} дает $\tau_t = 3\xi_x$ (члены, содержащие φ_u, сокращаются), следовательно, $\xi = \tau_t x/3 + \sigma(t)$. Далее, коэффициент при u_{xx} показывает, что $\varphi_{uu} = 0 = \varphi_{xu}$, так что φ линейна по u, а коэффициент при u является функцией только от t. Остальные члены в (2.67) — те, что содержат u_x; это дает

$$-\xi_t - u(\varphi_u - \tau_t) + u(\varphi_u - \xi_x) + \varphi = 0,$$

и те, что не содержат никаких производных от u:

$$\varphi_t + \varphi_{xxx} + u\varphi_x = 0.$$

Все эти уравнения имеют общее решение

$$\xi = c_1 + c_3 t + c_4 x,$$
$$\tau = c_2 + 3c_4 t,$$
$$\varphi = c_3 - 2c_4 u,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные. Поэтому алгебра симметрий уравнения Кортевега — де Фриза порождается четырьмя векторными полями

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = \partial_x && \text{(сдвиг в пространстве)},\\
&\mathbf{v}_2 = \partial_t && \text{(сдвиг во времени)},\\
&\mathbf{v}_3 = t\partial_x + \partial_u && \text{(преобразование Галилея)},\\
&\mathbf{v}_4 = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u && \text{(растяжение)}.
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

Коммутаторы этих полей сведены в таблицу:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_1$	$3\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	0	$-\mathbf{v}_1$	0	$-2\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$-\mathbf{v}_1$	$-3\mathbf{v}_2$	$2\mathbf{v}_3$	0

Экспоненцирование показывает, что если $u = f(x, t)$ — решение уравнения Кортевега — де Фриза, то и

$$
\begin{aligned}
&u^{(1)} = f(x-\varepsilon, t),\\
&u^{(2)} = f(x, t-\varepsilon),\\
&u^{(3)} = f(x-\varepsilon t, t) + \varepsilon, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R},\\
&u^{(4)} = e^{-2\varepsilon} f(e^{-\varepsilon}x, e^{-3\varepsilon}t),
\end{aligned}
$$

являются его решениями. Это легко можно проверить. (Читателю, знакомому со многими замечательными «солитонными» свойствами уравнения Кортевега — де Фриза, этот список симметрий может показаться разочаровывающе малым. Дальнейшие свойства симметрии, отражающие существование бесконечного числа законов сохранения, и, по-видимому, линеаризация методa обратной задачи рассеяния потребуют от нас развития теории обобщенных симметрий в гл. 5 и 7.)

Пример 2.45. *Уравнения Эйлера.* В качестве последней иллюстрации основного метода вычисления групп симметрий мы рассмотрим систему уравнений Эйлера движения невязкой несжимаемой жидкости в трехмерной области. Здесь имеются четыре независимые переменные: $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — пространственные координаты — и t — время, — а также четыре зависимые переменные: поле скоростей $\mathbf{u} = (u, v, w)$ и давление p. (Плотность

ρ полагаем равной 1.) В векторных обозначениях система имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2.69}$$

где компоненты нелинейных членов $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ суть

$$(uu_x + vu_y + wu_z,\ uv_x + vv_y + wv_z,\ uw_x + vw_y + ww_z).$$

Инфинитезимальной симметрией уравнений Эйлера будет векторное поле вида

$$\mathbf{v} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z + \tau\partial_t + \varphi\partial_u + \psi\partial_v + \chi\partial_w + \pi\partial_p,$$

где $\xi, \eta, \ldots, \pi$ — функции от $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, t и p. Применяя первое продолжение $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ к уравнениям Эйлера (2.69), получаем следующую систему уравнений симметрии:

$$\varphi^t + u\varphi^x + v\varphi^y + w\varphi^z + u_x\varphi + u_y\psi + u_z\chi = -\pi^x, \tag{2.70a}$$

$$\psi^t + u\psi^x + v\psi^y + w\psi^z + v_x\varphi + v_y\psi + v_z\chi = -\pi^y, \tag{2.70b}$$

$$\chi^t + u\chi^x + v\chi^y + w\chi^z + w_x\varphi + w_y\psi + w_z\chi = -\pi^z, \tag{2.70c}$$

$$\varphi^x + \psi^y + \chi^z = 0, \tag{2.70d}$$

которые должны выполняться при $\mathbf{u}$ и p, удовлетворяющих (2.69). Здесь φ^t, ψ^x и т. д. — коэффициенты при производных первого порядка $\partial/\partial u_t$, $\partial/\partial v_x$ и т. д., появляющихся в $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}$; типичный вид этих функций следует из формулы продолжения (2.43), так что

$$\varphi^t = D_t\varphi - u_xD_t\xi - u_yD_t\eta - u_zD_t\zeta - u_tD_t\tau,$$
$$\psi^x = D_x\psi - v_xD_x\xi - v_yD_x\eta - v_zD_x\zeta - v_tD_x\tau$$

и т. д.

Поскольку (2.70) должны выполняться лишь на решениях (2.69), мы можем подставить в (2.70) вместо p_x, p_y, p_z и w_z выражения для них, которые получаются из четырех уравнений (2.69). Мы можем затем приравнять все коэффициенты при оставшихся производных первого порядка от $\mathbf{u}$, p в (2.70) и решить полученную систему определяющих уравнений относительно $\xi, \eta, \ldots, \pi$.

В качестве первого шага покажем, что эта симметрия должна быть проектируема, т. е. что ξ, η, ζ и τ зависят только от $\mathbf{x}$ и t. Коэффициент при p_t в (2.70a) равен

$$\varphi_p - \xi_pu_x - \eta_pu_y - \zeta_pu_z - \tau_pu_t = D_x\tau = \tau_x + \tau_uu_x + \tau_vv_x + \tau_ww_x + \tau_pp_x.$$

Поэтому $\tau_v = \tau_w = 0$. Рассматривая тот же коэффициент в (2.70b), получаем также $\tau_u = 0$. Кроме того, делая в соответствии с (2.69) подстановку для p_x, мы получаем

$$\varphi_p = \tau_x, \quad \psi_p = \tau_y, \quad \chi_p = \tau_z, \tag{2.71}$$

$$\xi_p = u\tau_p, \quad \eta_p = v\tau_p, \quad \zeta_p = w\tau_p, \tag{2.72}$$

где уравнения для ψ_p и χ_p получаются из аналогичных рассмотрений (2.70b, c). Далее, рассмотрим в (2.70a) квадратный одночлен $v_t v_x$. Он может получиться также из одночленов $p_y v_x$, $p_y v_t$ и p_y^2. Все они входят только в π^x. Полученный коэффициент равен $0 = -\eta_v$. Аналогично, коэффициент при $v_t w_x$ в (2.70a) показывает, что $\eta_w = 0$. Дальнейший анализ квадратичных членов в (2.70a, b, c) показывает, что ξ, η, ζ не зависят от u, v, w. Дифференцируя затем (2.72) по u, v и w, получаем, что $\tau_p = 0$, следовательно, $\xi_p = \eta_p = \zeta_p = 0$ и симметрия проектируема.

Следующий шаг состоит в том, чтобы рассмотреть коэффициенты при u_t, v_t и w_t в (2.70d), учитывая, что они могут появиться также из ∇p при подстановке. Отсюда следует, что

$$\varphi_p + \tau_x = \psi_p + \tau_y = \chi_p + \tau_z = 0.$$

Сравнение с (2.71) показывает, что τ зависит лишь от t, а φ, ψ, χ не зависят от давления. Рассмотрим далее коэффициенты при v_t и v_x в (2.70a), которые суть

$$\varphi_v = -\eta_x, \quad \varphi_v = -\eta_x - \pi_v.$$

Таким образом, $\pi_v = 0$, и в силу аналогичных рассмотрений π не зависит ни от u, ни от w. Из коэффициентов при u_t и w_t мы получаем также

$$\varphi_u = \tau_t - \xi_x + \pi_p, \quad \varphi_w = -\zeta_x$$

и т. д. Из всего этого следует, что φ, ψ, χ имеют общий вид

$$\begin{aligned}
\varphi &= (\tau_t - \xi_x + \pi_p) u - \eta_x v - \zeta_x w + \hat{\varphi},\\
\psi &= -\xi_y u + (\tau_t - \eta_y + \pi_p) v - \zeta_y w + \hat{\psi},\\
\chi &= -\xi_z u - \eta_z v + (\tau_t - \zeta_z + \pi_p) w + \hat{\chi},
\end{aligned}$$

где $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ и $\hat{\chi}$ зависят только от $\mathbf{x}$ и t. Коэффициенты при пространственных производных от $\mathbf{u}$ в (2.70a, b, c) тогда дают

$$\hat{\varphi} = \xi_t, \quad \hat{\psi} = \eta_t, \quad \hat{\chi} = \zeta_t, \quad \xi_x = \eta_y = \zeta_z = \tau_t + \frac{1}{2}\pi_p,$$

$$\xi_y + \eta_x = \xi_z + \zeta_x = \eta_z + \zeta_y = 0.$$

В частности, пространственная компонента $\xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z$ поля $\mathbf{v}$ порождает (зависящую от времени) конформную группу симметрий пространства $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой. Остальные члены в (2.70) не содержат производных ни от $\mathbf{u}$, ни от p. Отсюда следует, что ξ, η, ζ должны быть линейны по x, y, z и, кроме того, что

$$\begin{gathered}\xi_{yt}=\xi_{zt}=\eta_{xt}=\eta_{zt}=\zeta_{xt}=\zeta_{yt}=0,\\ \xi_{xt}=\eta_{yt}=\zeta_{zt}=\tau_{tt},\\ \xi_{tt}=-\pi_x,\quad \eta_{tt}=-\pi_y,\quad \zeta_{tt}=-\pi_z.\end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\xi&=\delta_t x+c_1y-c_2z+\alpha,\\
\eta&=-c_1x+\delta_t y+c_3z+\beta,\\
\zeta&=c_2x-c_3y+\delta_t z+\gamma,\\
\tau&=2\delta+c_4t+c_5,\\
\varphi&=-(\delta_t+c_4)u+c_1v-c_2w+\alpha_t,\\
\psi&=-c_1u-(\delta_t+c_4)v+c_3w+\beta_t,\\
\chi&=c_2u-c_3v-(\delta_t+c_4)w+\gamma_t,\\
\pi&=-2(\delta_t+c_4)p-\frac{1}{2}\delta_{tt}(x^2+y^2+z^2)-\alpha_{tt}x-\beta_{tt}y-\gamma_{tt}z+\theta,
\end{aligned}$$

где α, β, γ, δ и θ — функции от t, а c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 — постоянные. Наконец, условие нулевой дивергенции (2.70d) накладывает дальнейшие ограничения; $\delta_{tt}=0$, так что $\delta=c_6t+c_7$.

Таким образом, мы показали, что группа симметрий уравнений Эйлера в трехмерном случае порождается векторными полями

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{v}_\alpha&=\alpha\partial_x+\alpha_t\partial_u-\alpha_{tt}x\partial_p,\\
\mathbf{v}_\beta&=\beta\partial_y+\beta_t\partial_v-\beta_{tt}y\partial_p,\\
\mathbf{v}_\gamma&=\gamma\partial_z+\gamma_t\partial_w-\gamma_{tt}z\partial_p
\end{aligned}\right\}\quad\text{(сдвиги по осям),}$$

$$\mathbf{v}_0=\partial_t\quad\text{(сдвиг по времени),}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{d}_1&=x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z+t\partial_t,\\
\mathbf{d}_2&=t\partial_t-u\partial_u-v\partial_v-w\partial_w-2p\partial_p
\end{aligned}\right\}\quad\text{(растяжения),}\qquad(2.73)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{r}_{xy}&=y\partial_x-x\partial_y+v\partial_u-u\partial_v,\\
\mathbf{r}_{zx}&=x\partial_z-z\partial_x+u\partial_w-w\partial_u,\\
\mathbf{r}_{yz}&=z\partial_y-y\partial_z+w\partial_v-v\partial_w
\end{aligned}\right\}\quad\text{(вращения),}$$

$$\mathbf{v}_\theta=\theta\partial_p\quad\text{(изменения давления),}$$

где α, β, γ и θ — произвольные функции от t. Соответствующие однопараметрические группы симметрий уравнений Эйлера тогда следующие.

(a) Переход к произвольной движущейся системе координат:

$$G_\alpha: (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x} + \varepsilon\boldsymbol{\alpha}(t), t, \mathbf{u} + \varepsilon\boldsymbol{\alpha}_t, p - \varepsilon\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma)$, а G_α порождено линейной комбинацией $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{v}_\beta + \mathbf{v}_\gamma$ первых трех векторных полей.

(b) Сдвиги по времени:

$$G_0: (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x}, t + \varepsilon, \mathbf{u}, p).$$

(c) Растяжения:

$$G_1: (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\lambda\mathbf{x}, \lambda t, \mathbf{u}, p),$$

$$G_2: (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x}, \lambda t, \lambda^{-1}\mathbf{u}, \lambda^{-2}p),$$

где $\lambda = e^\varepsilon$ — мультипликативный параметр группы.

(d) Группа

$$SO(3): (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (R\mathbf{x}, t, R\mathbf{u}, p)$$

одновременных вращений и пространства, и векторного поля скорости $\mathbf{u}$. Здесь R — произвольная ортогональная матрица размера 3×3.

(e) Изменения давления:

$$G_p: (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p) \mapsto (\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p + \varepsilon\theta(t)).$$

Соответствующее действие на решения уравнений Эйлера показывает, что если $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $p = g(x, t)$ — решения, то решениями являются

$$G_\alpha: \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x} - \varepsilon\boldsymbol{\alpha}(t), t) + \varepsilon\boldsymbol{\alpha}_t, \quad p = g(\mathbf{x} - \varepsilon\boldsymbol{\alpha}(t), t) - \varepsilon\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt},$$

$$\begin{aligned}
G_0&: \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t - \varepsilon), && p = g(\mathbf{x}, t - \varepsilon),\\
G_1&: \mathbf{u} = \mathbf{f}(\lambda\mathbf{x}, \lambda t), && p = g(\lambda\mathbf{x}, \lambda t),\\
G_2&: \mathbf{u} = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda t), && p = \lambda^2 g(\mathbf{x}, \lambda t),\\
SO(3)&: \mathbf{u} = R\mathbf{f}(R^{-1}\mathbf{x}, t), && p = g(R^{-1}\mathbf{x}, t)\\
G_p&: \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), && p = g(\mathbf{x}, t) + \varepsilon\theta(t).
\end{aligned}$$

(В G_0 и G_1 мы заменили λ на λ^{-1}.) Заметим, что при переходе к движущейся системе координат G_α мы должны изменять давление в соответствии с тем, что ускорение движения равно

$\varepsilon\alpha_{tt}$. Последняя группа G_p отражает тот факт, что давление p определено лишь с точностью до прибавления произвольной функции от t. Это завершает список симметрий уравнений Эйлера.

2.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Одно из наиболее привлекательных приложений теории групп Ли — это приложение к задаче об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное наблюдение Ли состоит в том, что знание достаточно большой группы симметрий системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет проинтегрировать эту систему в квадратурах и таким образом получить общее решение. Этот подход унифицирует и значительно расширяет различные специальные методы интегрирования определенных типов уравнений первого порядка, таких, как однородные уравнения, уравнения с разделяющимися переменными, уравнения в полных дифференциалах и т. д. Аналогичные результаты справедливы и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом параграфе представлен обзор этих методов.

Уравнения первого порядка

Мы начинаем с рассмотрения одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dx} = F(x, u). \tag{2.74}$$

Мы покажем, что если это уравнение инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований, то его можно проинтегрировать квадратурой. Пусть G — однопараметрическая группа преобразований открытого подмножества $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, и пусть

$$\mathbf{v} = \xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

— ее инфинитезимальная образующая. Первое продолжение поля $\mathbf{v}$ — это векторное поле

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \varphi\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x}, \tag{2.75}$$

где

$$\varphi^x = D_x\varphi - u_x D_x\xi = \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2.$$