$\varepsilon\alpha_{tt}$. Последняя группа $G_p$ отражает тот факт, что давление $p$ определено лишь с точностью до прибавления произвольной функции от $t$. Это завершает список симметрий уравнений Эйлера.

## 2.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Одно из наиболее привлекательных приложений теории групп Ли — это приложение к задаче об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное наблюдение Ли состоит в том, что знание достаточно большой группы симметрий системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет проинтегрировать эту систему в квадратурах и таким образом получить общее решение. Этот подход унифицирует и значительно расширяет различные специальные методы интегрирования определенных типов уравнений первого порядка, таких, как однородные уравнения, уравнения с разделяющимися переменными, уравнения в полных дифференциалах и т. д. Аналогичные результаты справедливы и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом параграфе представлен обзор этих методов.

### Уравнения первого порядка

Мы начинаем с рассмотрения одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dx} = F(x, u). \tag{2.74}$$

Мы покажем, что если это уравнение инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований, то его можно проинтегрировать квадратурой. Пусть $G$ — однопараметрическая группа преобразований открытого подмножества $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, и пусть

$$\mathbf{v} = \xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

— ее инфинитезимальная образующая. Первое продолжение поля $\mathbf{v}$ — это векторное поле

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \varphi\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x}, \tag{2.75}$$

где

$$\varphi^x = D_x\varphi - u_x D_x\xi = \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2.$$

Таким образом, инфинитезимальное условие, что группа $G$ является группой симметрий для (2.74), состоит в том, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)F-\frac{\partial\xi}{\partial u}F^2=\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\varphi\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad (2.76)$$

и всякое решение $\xi(x, u)$, $\varphi(x, u)$ уравнения с частными производными (2.76) порождает однопараметрическую группу симметрий нашего обыкновенного дифференциального уравнения. Конечно, практически отыскание решений уравнения (2.76) оказывается обычно гораздо более трудной задачей, чем решение исходного обыкновенного дифференциального уравнения. Однако, влекомые вдохновляющими догадками или геометрическими соображениями, мы, возможно, сумеем найти решение уравнения (2.76), которое приведет нас к интегрированию уравнения (2.74). В этом искусство метода Ли.

Найдя группу симметрий $G$, мы можем применить несколько различных методов, чтобы проинтегрировать (2.74). Предположим, что $\mathbf{v}$ — инфинитезимальная образующая группы симметрий, и допустим, что $\mathbf{v}|_{(x_0, u_0)}\neq 0$. (Если векторное поле $\mathbf{v}$ обращается в нуль в точке $(x_0, u_0)$, то вблизи этой точки у решений могут быть особенности. Поведение решений $u=f(x)$ вблизи таких особенностей может быть найдено экстраполяцией, поскольку уравнение будет проинтегрировано при близких значениях $x$.) В соответствии с предложением 1.29 мы можем ввести новые координаты

$$y=\eta(x, u), \quad w=\zeta(x, u) \qquad (2.77)$$

вблизи точки $(x_0, u_0)$, так что в координатах $(y, w)$ векторное поле будет сдвигом $\mathbf{v}=\partial/\partial w$ и его первое продолжение

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}=\mathbf{v}=\partial/\partial w$$

— тоже сдвиг. Таким образом, в новой системе координат, чтобы быть инвариантным, дифференциальное уравнение должно не зависеть от $w$, так что (2.74) эквивалентно элементарному уравнению

$$\frac{dw}{dy}=H(y)$$

для некоторой функции $H$. Это уравнение тривиально интегрируется в квадратурах:

$$w=\int H(y)\,dy+c,$$

где $c$ — некоторая постоянная. Подставляя сюда выражения (2.77) для $y$ и $w$, мы получаем решение $u=f(x)$ нашего исходного уравнения в явном виде.

Замена переменных (2.77) строится с помощью методов нахождения групповых инвариантов, представленных в § 2.1. Действительно, из (1.16) следует, что векторное поле $\mathbf{v}$ преобразовано к виду $\partial/\partial w$, если $\eta$ и $\zeta$ удовлетворяют линейным уравнениям с частными производными

$$\mathbf{v}(\eta) = \xi \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0, \qquad (2.78a)$$

$$\mathbf{v}(\zeta) = \xi \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \zeta}{\partial u} = 1. \qquad (2.78b)$$

Первое из этих уравнений в точности означает, что $\eta(x, y)$ является инвариантом группы, порожденной полем $\mathbf{v}$. Мы можем, таким образом, отыскать $\eta$, решая соответствующее характеристическое обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\xi(x, u)} = \frac{du}{\varphi(x, u)}. \qquad (2.79)$$

Часто соответствующее решение $\zeta$ уравнения (2.78b) можно найти подстановкой. Более систематически, можно ввести вспомогательную переменную $v$ и заметить, что $\zeta(x, u)$ удовлетворяет (2.78b), если и только если функция $\chi(x, u, v) = v - \zeta(x, u)$ является инвариантом векторного поля $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \partial_v = \xi\partial_x + \varphi\partial_u + \partial_v$. Таким образом, мы требуем, чтобы

$$\mathbf{w}(\chi) = \xi \frac{\partial \chi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0.$$

Это уравнение мы снова можем решить методом характеристик:

$$\frac{dx}{\xi(x, u)} = \frac{du}{\varphi(x, u)} = \frac{dv}{1}. \qquad (2.80)$$

Решение ищем в виде $v - \zeta(x, u) = k$, где $k$ — постоянная интегрирования.

Вообще говоря, решить уравнения (2.79) и (2.80) (это снова обыкновенные дифференциальные уравнения) может быть так же трудно, как проинтегрировать исходное дифференциальное уравнение. В частности, если

$$\varphi(x, u)/\xi(x, u) = F(x, u), \qquad (2.81)$$

то мы автоматически имеем решение уравнения симметрии (2.76), так что такое векторное поле $\mathbf{v} = \xi\partial_x + \varphi\partial_u$ всегда является симметрией этого уравнения. В таком случае отыскание инварианта группы, т. е. решение уравнения (2.79), — в точности та же задача, что и интегрирование исходного уравнения, так что этот метод оказывается бесполезным. Мы можем рассчитывать на успех в решении нашей задачи лишь тогда, когда группа симметрий имеет достаточно простой вид, так что можно явно решить уравнения (2.79) и (2.80).

**Пример 2.46.** Однородное уравнение — это уравнение вида

$$\frac{du}{dx}=F\left(\frac{u}{x}\right),$$

где $F$ зависит только от отношения $u$ к $x$. Группой симметрий такого уравнения является группа растяжений

$$G\colon\ (x,\ u)\longmapsto(\lambda x,\ \lambda u),\qquad \lambda>0.$$

Это непосредственно следует из вида первого продолжения группы $G$:

$$\mathrm{pr}^{(1)}G\colon\ (x,\ u,\ u_x)\longmapsto(\lambda x,\ \lambda u,\ u_x),$$

которое, очевидно, оставляет уравнение инвариантным. Действуя по-другому, можно рассмотреть инфинитезимальную образующую

$$\mathbf{v}=x\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial u},$$

первым продолжением которой в соответствии с (2.75) является $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}=\mathbf{v}$, и воспользоваться инфинитезимальным критерием инвариантности.

Новые координаты $y$, $w$, удовлетворяющие (2.78), задаются формулами

$$y=\frac{u}{x},\qquad w=\log x.$$

Пользуясь цепным правилом, получаем

$$\frac{du}{dx}=\frac{du/dy}{dy/dx}=\frac{x(1+yw_y)}{xw_y}=\frac{1+yw_y}{w_y},$$

так что наше уравнение принимает вид

$$\frac{dw}{dy}=\frac{1}{F(y)-y}.$$

Оно имеет решение

$$w=\int\frac{dy}{F(y)-y}+c,$$

которое в свою очередь определяет неявно $u$ как функцию от $x$, если подставить $w=\log x$, $y=u/x$. Например, если уравнение имеет вид

$$\frac{du}{dx}=\frac{u^2+2xu}{x^2}=\left(\frac{u}{x}\right)^2+2\frac{u}{x},$$

так что $F(y) = y^2 + 2y$, то в координатах $y = u/x$, $w = \log x$ имеем

$$\frac{dw}{dy} = \frac{1}{y^2 + y}.$$

Решение имеет вид

$$w = -\log(1 + y^{-1}) + c,$$

или, в исходных координатах,

$$\log x = -\log\left(1 + \frac{x}{u}\right) + c.$$

Теперь можно явно выразить $u$ как функцию от $x$:

$$u = \frac{x^2}{\tilde{c} - x},$$

где $\tilde{c} = e^c$.

Хотя ответ хорошо известен, эта процедура не совсем типична для курса обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь $w$ и $y$ меняются ролями, и $w$ становится новой независимой переменной. Такая стратегия часто оказывается целесообразной для многих уравнений первого порядка. В настоящем случае мы можем опустить логарифм и рассматривать $x$ и $y = u/x$ как новые переменные. Тогда

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(xy) = x\frac{dy}{dx} + y,$$

и мы получаем решение в виде

$$\int \frac{dy}{F(y) - y} = \int \frac{dx}{x} = \log x + c.$$

Эквивалентность этих методов ясна. Наконец, заметим, что, вообще говоря, начало координат $u = x = 0$ является особой точкой, отвечающей точке, где векторное поле $\mathbf{v}$ обращается в нуль.

**Пример 2.47.** Пусть $G$ — группа вращений $SO(2)$, инфинитезимальная образующая

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x}$$

которой была вычислена в примере 2.29. Непосредственными вычислениями проверяется, что всякое уравнение вида

$$\frac{du}{dx} = \frac{u + xH(r)}{x - uH(r)}, \qquad (2.82)$$

где $H(r) = H(\sqrt{x^2 + y^2})$ — произвольная функция от радиуса, допускает $SO(2)$ в качестве группы симметрий. Полярные координаты $r$, $\theta$, где $x = r\cos\theta$, $u = r\sin\theta$, — это новые координаты, удовлетворяющие (2.78), поскольку в этих координатах $\mathbf{v} = \partial/\partial\theta$. Кроме того,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du/dr}{dx/dr} = \frac{\sin\theta + r\theta_r\cos\theta}{\cos\theta - r\theta_r\sin\theta}.$$

Подставляя в (2.82) и разрешая относительно $d\theta/dr$, мы получаем

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r}H(r),$$

следовательно,

$$\theta = \int \frac{H(r)}{r}\,dr + c$$

является общим решением. Например, если $H(r) = 1$, мы получаем уравнение примера 2.32.

Другой метод решения уравнения первого порядка, инвариантного относительно однопараметрической группы, основан на построении интегрирующего множителя. Перепишем (2.74) как уравнение в полных дифференциалах

$$P(x, u)\,dx + Q(x, u)\,du = 0, \tag{2.83}$$

так что $F = -P/Q$. Это уравнение представляет собой *полный дифференциал*, если $\partial P/\partial u = \partial Q/\partial x$, и в этом случае мы можем найти решение в неявной форме $T(x, u) = c$, потребовав, чтобы

$$\frac{\partial T}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial T}{\partial u} = Q.$$

(Это предполагает, что область $M$ односвязна.) Если (2.83) не является полным дифференциалом, нам нужно искать интегрирующий множитель $R(x, u)$, такой, что после умножения на него мы получим полный дифференциал.

**Теорема 2.48.** *Предположим, что уравнение $P\,dx + Q\,du = 0$ имеет однопараметрическую группу симметрий с инфинитезимальной образующей $\mathbf{v} = \xi\partial_x + \varphi\partial_u$. Тогда функция*

$$R(x, u) = \frac{1}{\xi(x, u)P(x, u) + \varphi(x, u)Q(x, u)} \tag{2.84}$$

*является интегрирующим множителем.*

*Доказательство.* Пользуясь инфинитезимальным критерием инвариантности (2.76), мы получаем, что векторное поле $\mathbf{v}$

является симметрией уравнения (2.83), если и только если

$$\left(\xi \frac{\partial P}{\partial x} + \varphi \frac{\partial P}{\partial u}\right) Q - \left(\xi \frac{\partial Q}{\partial x} + \varphi \frac{\partial Q}{\partial u}\right) P + \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial x} Q^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) PQ - \frac{\partial \xi}{\partial u} P^2 = 0. \quad (2.85)$$

Условие, что $R$ — интегрирующий множитель, состоит в том, что

$$\frac{\partial}{\partial u}(RP) = \frac{\partial}{\partial x}(RQ).$$

Подстановка формулы для $R$ приводит к условию

$$R^2\left\{\varphi\left(Q \frac{\partial P}{\partial u} - P \frac{\partial Q}{\partial u}\right) - \frac{\partial \xi}{\partial u} P^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial u} PQ\right\} = \\ = R^2\left\{\xi\left(P \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial P}{\partial x}\right) - \frac{\partial \xi}{\partial x} PQ - \frac{\partial \varphi}{\partial x} Q^2\right\}.$$

Сравнение с условием симметрии (2.85) доказывает теорему.

Например, в случае группы вращений уравнение принимает общий вид

$$(u + xH(r))\,dx + (uH(r) - x)\,du = 0.$$

Интегрирующий множитель тогда равен

$$\frac{1}{-u(u + xH) + x(uH - x)} = \frac{-1}{x^2 + u^2}.$$

Например, пусть $H(r) = 1$, так что

$$(u + x)\,dx + (u - x)\,du = 0.$$

Умножая на $(x^2 + u^2)^{-1}$, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$0 = \frac{u + x}{x^2 + u^2}\,dx + \frac{u - x}{x^2 + u^2}\,du = d\left[\frac{1}{2}\log(x^2 + u^2) - \operatorname{arctg}\frac{u}{x}\right],$$

следовательно, мы снова вывели формулу для логарифмической спирали $r = ke^{\theta}$, найденную в примере 2.32.

Заметим, что если

$$\xi P + \varphi Q \equiv 0$$

для всех $(x, u)$, то интегрирующего множителя не существует. Это происходит как раз в случае (2.81), когда вычисление инвариантов группы симметрий — та же задача, что и решение самогó обыкновенного дифференциального уравнения. В этом случае ни метод инвариантов, ни метод интегрирующего множителя не позволяют получить решения.

На практике, возможно, легче осуществить метод интегрирующего множителя, поскольку при этом не нужно искать решения вспомогательной пары уравнений с частными производными (2.78). Однако, если нужно рассмотреть большое число уравнений, имеющих одну и ту же группу симметрий, это небольшое преимущество теряется в силу относительной трудности отыскания потенциалов $T$ для каждого требуемого полного дифференциала.

### Уравнения высших порядков

Хотя метод интегрирующего множителя здесь уже неприменим, метод, использующий инварианты, непосредственно распространяется на интегрирование уравнений высших порядков. Пусть

$$\Delta(x, u^{(n)}) = \Delta(x, u, u_x, \ldots, u_n) = 0, \tag{2.86}$$

где $u_n \equiv d^n u/dx^n$ — одно дифференциальное уравнение $n$-го порядка, включающее одну зависимую переменную $u$. Основной результат в этом случае состоит в том, что если нам известна однопараметрическая группа симметрий этого уравнения, то мы можем понизить порядок этого уравнения на единицу.

Чтобы увидеть это, выберем сначала координаты $y = \eta(x, u)$, $w = \zeta(x, u)$, как в (2.78), так что группа преобразуется в группу сдвигов с инфинитезимальной образующей $\mathbf{v} = \partial/\partial w$. Пользуясь цепным правилом, мы можем выразить производные от $u$ по $x$ через $y$, $w$ и производные от $w$ по $y$:

$$\frac{d^k u}{dx^k} = \delta_k\left(y, w, \frac{dw}{dy}, \ldots, \frac{d^k w}{dy^k}\right)$$

для некоторых функций $\delta_k$. Подстановка этих выражений в наше уравнение приводит к эквивалентному уравнению $n$-го порядка

$$\tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = \tilde{\Delta}(y, w, w_y, \ldots, w_n) = 0, \tag{2.87}$$

выраженному в новых координатах $y$ и $w$. Кроме того, поскольку исходное уравнение допускает группу симметрий $G$, это же верно и для преобразованного уравнения. В координатах $(y, w)$ ее инфинитезимальная образующая имеет тривиальное продолжение

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} = \partial/\partial w.$$

Из инфинитезимального критерия инвариантности следует, что

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}(\tilde{\Delta}) = \frac{\partial\tilde{\Delta}}{\partial w} = 0, \quad \text{если} \quad \tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = 0.$$

Это означает, как в предложении 2.18, что имеется эквивалентное уравнение

$$\hat{\Delta}\left(y, \frac{dw}{dy}, \ldots, \frac{d^n w}{dy^n}\right) = 0,$$

не зависящее от $w$, т. е. $\tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{\Delta}(y, w^{(n)}) = 0$. Теперь мы достигли цели; полагая $z = w_y$, мы получаем уравнение $(n-1)$-го порядка по $z$

$$\hat{\Delta}(y, z, \ldots, d^{n-1}z/dy^{n-1}) = \hat{\Delta}(y, z^{(n-1)}) = 0, \tag{2.88}$$

решения которого доставляют общее решение нашего исходного уравнения. А именно, если $z = h(y)$ — решение (2.88), то $w = \int h(y)\,dy + c$ — решение (2.87) и, следовательно, замена $w$ и $y$ их выражениями через $x$ и $u$ неявно определяет решение исходного уравнения.

**Пример 2.49.** В качестве элементарного примера рассмотрим случай уравнения второго порядка, в котором $x$ явно не содержится,

$$\Delta(u, u_x, u_{xx}) = 0.$$

Это уравнение, очевидно, инвариантно относительно группы сдвигов по оси $x$ с инфинитезимальной образующей $\partial/\partial x$. Для того чтобы перевести это векторное поле в поле $\partial/\partial w$, соответствующее сдвигам вдоль зависимой переменной, достаточно поменять ролями зависимую и независимую переменные, так что мы полагаем $y = u$, $w = x$. Тогда

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{w_y}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{-w_{yy}}{w_y^3},$$

так что наше уравнение принимает вид

$$\Delta\left(y, \frac{1}{w_y}, -\frac{w_{yy}}{w_y^3}\right) = 0,$$

а это — уравнение первого порядка относительно $z = w_y$:

$$\hat{\Delta}(y, z, z_y) \equiv \Delta(y, z^{-1}, -z^{-3}z_y) = 0.$$

Например, чтобы решить уравнение

$$u_{xx} - 2uu_x = 0,$$

мы рассматриваем соответствующее уравнение первого порядка

$$-z^{-3}z_y - 2yz^{-1} = 0,$$

где $z = dw/dy = (du/dx)^{-1}$. Оно легко решается разделением переменных. Его решение —

$$z = (y^2 + c)^{-1}.$$

Таким образом, если $c = c'^2 > 0$, мы получаем

$$w = \int z\, dy = \frac{1}{c'} \operatorname{arctg} \frac{y}{c'} + \tilde{c},$$

или, через $x$ и $u$,

$$u = c' \operatorname{tg}(c'x + d), \quad d = -\tilde{c}c'.$$

(При $c < 0$ получаем гиперболический тангенс, при $c = 0$ получаем предельное решение $u = -(x + d)^{-1}$.)

**Пример 2.50.** Рассмотрим однородное линейное уравнение второго порядка

$$u_{xx} + p(x) u_x + q(x) u = 0. \tag{2.89}$$

Оно, очевидно, инвариантно относительно группы растяжений

$$(x, u) \longmapsto (x, \lambda u)$$

с инфинитезимальной образующей $\mathbf{v} = u\partial_u$. Координаты $(y, w)$, выпрямляющие поле $\mathbf{v}$, задаются формулами $y = x$, $w = \log u$ (при $u \neq 0$), и в этих координатах $\mathbf{v} = \partial_w$. Имеем

$$u = e^w, \quad u_x = w_x e^w, \quad u_{xx} = (w_{xx} + w_x^2) e^w,$$

так что наше уравнение принимает вид

$$w_{xx} + w_x^2 + p(x) w_x + q(x) = 0$$

и не зависит от $w$. Таким образом, мы построили известное преобразование линейного уравнения второго порядка в уравнение Риккати первого порядка; а именно, замена $z = w_x = u_x/u$ превращает (2.89) в уравнение Риккати.

$$z_x = -z^2 - p(x) z - q(x).$$

## Дифференциальные инварианты

Помимо попыток отыскать наиболее общую группу симметрий данного дифференциального уравнения мы можем задаться встречным вопросом: каков наиболее общий тип дифференциального уравнения, допускающего данную группу в качестве своей группы симметрий? Ответ на этот вопрос не только доставит нам список больших классов обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно проинтегрировать общими методами, но знакомство с различными типами уравнений, возникающими из известных групп, поможет в распознавании групп симметрий других уравнений.

В соответствии с § 2.2 обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ допускает группу $G$ в качестве своей группы симметрий, тогда и только тогда, когда соответствующее подмногообразие $\mathcal{S}_\Delta \subset M^{(n)}$ инвариантно относительно $n$-го продолжения $\mathrm{pr}^{(n)} G$. Кроме того, в соответствии с предложением 2.18 существует эквивалентное уравнение $\tilde{\Delta} = 0$, описывающее подмногообразие $\mathcal{S}_\Delta$, где $\tilde{\Delta}$ зависит лишь от инвариантов действия группы, которые в нашем случае составляют $\mathrm{pr}^{(n)} G$. Инварианты продолженного действия группы играют важную роль в этой процедуре и известны как «дифференциальные инварианты».

**Определение 2.51.** Пусть $G$ — локальная группа преобразований, действующая на $M \subset X \times U$. *Дифференциальным инвариантом* $n$-го порядка группы $G$ называется гладкая функция $\eta$: $M^{(n)} \to \mathbb{R}$, зависящая от $x$, $u$ и производных от $u$, такая, что $\eta$ — инвариант продолженного действия $\mathrm{pr}^{(n)} G$:

$$\eta(\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x, u^{(n)})) = \eta(x, u^{(n)}), \quad (x, u^{(n)}) \in M^{(n)},$$

для всех $g \in G$, для которых определено $\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x, u^{(n)})$.

Хотя это определение имеет смысл для нескольких независимых и нескольких зависимых переменных, мы преимущественно интересуемся случаем, когда $p = q = 1$.

**Пример 2.52.** Предположим, что $G = \mathrm{SO}(2)$ — группа вращений, действующая на $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, с образующей $\mathbf{v} = -u\partial_x + x\partial_u$. Дифференциальные инварианты первого порядка — это обычные инварианты первого продолжения $\mathrm{pr}^{(1)} \mathrm{SO}(2)$, имеющего инфинитезимальную образующую

$$\mathrm{pr}^{(1)} \mathbf{v} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

Если переобозначить переменные $(x, u, u_x)$ через $(x, y, z)$, то мы окажемся в точности в ситуации примера 2.19(b). Переводя полученный там результат в настоящий контекст, мы получаем, что функции

$$y = \sqrt{x^2 + u^2} \quad \text{и} \quad w = \frac{x u_x - u}{x + u u_x} \tag{2.90}$$

составляют полное множество дифференциальных инвариантов первого порядка для группы SO(2). В инварианты второго порядка мы включили бы также инвариант кривизны $\varkappa$, полученный в примере 2.37. Всякий другой дифференциальный инвариант второго порядка должен быть функцией от этих трех независимых инвариантов.

Что касается дифференциальных инвариантов высших порядков, то имеется легкий короткий путь, который приводит нас к построению всех дифференциальных инвариантов, если известны дифференциальные инварианты низших порядков.

**Предложение 2.53.** *Пусть $G$ — группа преобразований, действующая на $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^2$. Предположим, что $y = \eta(x, u^{(n)})$ и $w = \zeta(x, u^{(n)})$ — дифференциальные инварианты $n$-го порядка группы $G$. Тогда производная*

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dw/dx}{dy/dx} = \frac{D_x\zeta}{D_x\eta} \tag{2.91}$$

*является дифференциальным инвариантом группы $G$ порядка $n+1$.*

*Доказательство.* Для доказательства нужна следующая формула. Пусть $\zeta(x, u^{(n)})$ — произвольная гладкая функция, а $\mathbf{v} = \xi\partial_x + \varphi\partial_u$ — произвольное векторное поле. Тогда

$$\mathrm{pr}^{(n+1)}\mathbf{v}\,(D_x\zeta) = D_x\,[\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}\,(\zeta)] - D_x\xi \cdot D_x\zeta. \tag{2.92}$$

Пользуясь другой формулировкой (2.50) формулы продолжения, мы видим, что

$$\mathrm{pr}^{(n+1)}\mathbf{v}\,(D_x\zeta) = \mathrm{pr}^{(n+1)}\mathbf{v}_Q\,(D_x\zeta) + \xi D_x^2\zeta,$$

если

$$D_x\,[\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}\,(\zeta)] = D_x\,[\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q\,(\zeta)] + D_x\,(\xi D_x\zeta).$$

Поэтому (2.92) сводится к более простой формуле

$$\mathrm{pr}^{(n+1)}\mathbf{v}_Q\,(D_x\zeta) = D_x\,[\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q\,(\zeta)].$$

Эта последняя формула — частный случай общего правила коммутирования векторных полей и полных производных, которое будет доказано в лемме 5.12. (Однако читателю не составит труда доказать эту формулу сейчас.)

Перейдем к доказательству (2.91). Пусть $\mathbf{v}$ — произвольная инфинитезимальная образующая группы $G$. Пользуясь (2.92), получаем

$$\mathrm{pr}^{(n+1)}\mathbf{v}\left[\frac{dw}{dy}\right]=\frac{1}{(D_x\eta)^2}\{\mathrm{pr}^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\zeta)\cdot D_x\eta-D_x\zeta\cdot\mathrm{pr}^{(n+1)}\mathbf{v}(D_x\eta)\}=$$
$$=\frac{1}{(D_x\eta)^2}\{D_x[\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}(\zeta)]\cdot D_x\eta-D_x\xi\cdot D_x\zeta\cdot D_x\eta-$$
$$-D_x\zeta\cdot D_x[\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}(\eta)]+D_x\zeta\cdot D_x\xi\cdot D_x\eta\}=0,$$

поскольку по предположению $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}(\zeta)=0=\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}(\eta)$. Таким образом, $dw/dy$ — инфинитезимальный инвариант относительно действия $\mathrm{pr}^{(n+1)}G$ и, следовательно, в силу предложения 2.6 является инвариантом. □

**Следствие 2.54.** *Предположим, что* $G$ *— однопараметрическая группа преобразований, действующая на* $M\subset X\times U\simeq\mathbb{R}^2$. *Пусть* $y=\eta(x,u)$ *и* $w=\zeta(x,u,u_x)$ *— полное множество функционально независимых инвариантов первого продолжения* $\mathrm{pr}^{(1)}G$. *Тогда производные*

$$y,\ w,\ dw/dy,\ \ldots,\ d^{n-1}w/dy^{n-1}$$

*составляют полное множество функционально независимых инвариантов для n-го продолжения* $\mathrm{pr}^{(n)}G$, $n\geqslant 1$.

Чтобы проверить независимость, достаточно заметить, что $k$-я производная $d^kw/dy^k$ зависит в точности от $u_{k+1}=d^{k+1}u/dx^{k+1}$ и, следовательно, не зависит от предыдущих инвариантов $y, w, \ldots, d^{k-1}w/dy^{k-1}$, являющихся функциями лишь от $x, u, \ldots, u_k$.

**Пример 2.55.** Вернемся к инвариантам второго порядка группы вращений SO(2), рассматривавшимся в предыдущем примере 2.52. Из следствия вытекает, что $y$, $w$ и производная

$$\frac{dw}{dy}=\frac{dw/dx}{dy/dx}=\frac{\sqrt{x^2+u^2}}{(x+uu_x)^3}\left[(x^2+u^2)\,u_{xx}-\left(1+u_x^2\right)\left(xu_x-u\right)\right]$$

образуют полное множество функционально независимых инвариантов для второго продолжения $\mathrm{pr}^{(2)}\mathrm{SO}(2)$. Заметим, что это означает, что *любой* другой дифференциальный инвариант второго порядка группы вращений может быть выражен через $y$, $w$ и $dw/dy$; например, инвариант кривизны, найденный ранее, можно записать в виде

$$\varkappa=\frac{u_{xx}}{\left(1+u_x^2\right)^{3/2}}=\frac{w_y}{(1+w^2)^{3/2}}+\frac{w}{(1+w^2)^{1/2}\cdot y},$$

как может проверить читатель.

Зная дифференциальные инварианты для группы преобразований, действующей на $M \subset X \times U$, мы можем определить структуру всех дифференциальных уравнений, допускающих данную группу в качестве своей группы симметрий. В случае когда $G$ — однопараметрическая группа, мы тем самым знаем все уравнения, которые можно проинтегрировать при помощи $G$.

**Предложение 2.56.** *Пусть $G$ — локальная группа преобразований, действующая на $M \subset X \times U$. Пусть $\eta^1(x, u^{(n)}), \ldots$ $\ldots, \eta^k(x, u^{(n)})$ — полное множество функционально независимых дифференциальных инвариантов $n$-го порядка для $\mathrm{pr}^{(n)} G$. Дифференциальное уравнение $n$-го порядка $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ допускает группу $G$ в качестве своей группы симметрий, если и только если существует эквивалентное уравнение*

$$\tilde{\Delta}(\eta^1(x, u^{(n)}, \ldots, \eta^k(x, u^{(n)})) = 0,$$

*содержащее только дифференциальные инварианты группы $G$. В частности, если $G$ — однопараметрическая группа преобразований, то любое дифференциальное уравнение $n$-го порядка, для которого $G$ является группой симметрий, эквивалентно уравнению $(n-1)$-го порядка*

$$\tilde{\Delta}(y, w, dw/dy, \ldots, d^{n-1}w/dy^{n-1}) = 0, \tag{2.93}$$

*содержащему инварианты $y = \eta(x, u)$, $w = \zeta(x, u, u_x)$ для $\mathrm{pr}^{(1)} G$ и их производные.*

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 2.18 и следствия 2.54. □

**Пример 2.57.** Например, мы можем полностью расклассифицировать все дифференциальные уравнения первого и второго порядков, допускающие группу вращений $SO(2)$ в качестве группы симметрий. Всякое уравнение первого порядка, инвариантное относительно группы $SO(2)$, эквивалентно уравнению, содержащему лишь инварианты (2.90). Разрешая относительно $w$, мы получаем, что каждое такое уравнение имеет вид

$$\frac{xu_x - u}{x + uu_x} = H\left(\sqrt{x^2 + u^2}\right)$$

для некоторой функции $H$. Но это в точности уравнение вида (2.82), обсуждавшееся в примере 2.47 (разрешенное там относительно $u_x$). Таким образом, (2.82) — наиболее общее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, инвариантное относительно группы вращений $SO(2)$.

Аналогично, всякое уравнение второго порядка, инвариантное относительно группы SO(2), эквивалентно уравнению, содержащему $y$, $w$ и кривизну $\varkappa = u_{xx}(1+u_x^2)^{-3/2}$, т. е.

$$u_{xx} = (1+u_x^2)^{3/2} H\left(\sqrt{x^2+u^2},\ \frac{xu_x - u}{x + uu_x}\right),$$

где $H(y,\ w)$ — произвольная функция от инвариантов первого порядка. Как в примере 2.47, оно может быть проинтегрировано подстановкой $r = \sqrt{x^2+u^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(u/x)$. Получаем

$$w = r\theta_r, \quad \varkappa = \frac{r\theta_{rr} + r^2\theta_r^3 + 2\theta_r}{(1+r^2\theta_r^2)^{3/2}};$$

последнее выражение — это выражение для кривизны кривой $\theta = \theta(r)$ в полярных координатах. Таким образом, наше уравнение превращается в уравнение первого порядка

$$r\frac{dz}{dr} = (1+r^2z^2)^{3/2} H(r,\ rz) - (r^2z^3 + 2z),$$

содержащее только $z = d\theta/dr$, откуда мы можем определить $\theta(r) = \int z(r)\,dr + c$.

Предыдущее предложение указывает также другой метод понижения порядка дифференциального уравнения, инвариантного относительно однопараметрической группы. Этот метод использует дифференциальные инварианты группы. А именно, дифференциальное уравнение $\Delta(x,\ u^{(n)}) = 0$ должно быть эквивалентно уравнению (2.93), содержащему лишь инварианты $y$, $w$, $\ldots$, $d^{n-1}w/dy^{n-1}$ для $n$-го продолжения группы $G$. Но (2.93) автоматически является уравнением $(n-1)$-го порядка относительно $w$ как функции от $y$, так что всего лишь переписыванием исходного уравнения в терминах данного списка дифференциальных инвариантов мы автоматически понижаем его порядок на единицу. *Более того*, зная решение $w = h(y)$ полученного уравнения (2.93), мы можем найти решение исходного уравнения, интегрируя вспомогательное уравнение первого порядка

$$\zeta(x,\ u,\ u_x) = h[\eta(x,\ u)], \tag{2.94}$$

полученное подстановкой вместо $y$ и $w$ их выражений через исходные переменные $x$ и $u$. Поскольку уравнение (2.94) зависит лишь от инвариантов $y$ и $w$ группы $\mathrm{pr}^{(1)}G$, ясно, что группа $G$ является его однопараметрической группой симметрий и это уравнение, следовательно, может быть проинтегрировано обсуждавшимися методами интегрирования уравнений первого порядка. Таким образом, совершенно другим способом мы снова установили основной факт о том, что порядок обыкновенного дифференциального уравнения, инвариантного относительно однопараметрической группы, можно понизить на единицу.

**Пример 2.58.** Рассмотрим уравнение второго порядка

$$x^2u_{xx}+xu_x^2=uu_x. \tag{2.95}$$

Оно инвариантно относительно группы растяжений $(x, u)\mapsto(\lambda x, \lambda u)$.

Попытаемся сначала проинтегрировать (2.95), пользуясь методом дифференциальных инвариантов. Мы получаем, что инвариантами действия второго продолжения группы являются

$$y=\frac{u}{x}, \quad w=u_x, \quad \frac{dw}{dy}=\frac{x^2u_{xx}}{xu_x-u}.$$

Поэтому новое уравнение, содержащее $w$ и $y$, имеет вид

$$(w-y)\frac{dw}{dy}+w^2=yw.$$

Оно имеет два семейства решений: либо $w=y$, либо $dw/dy=-w$; последнее уравнение интегрируется: $w=ce^{-y}$, где $c$ — некоторая константа. Возвращаясь к исходным переменным, получаем два однородных уравнения первого порядка, что гарантируется видом уравнения (2.94):

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x} \text{ либо } \frac{du}{dx}=ce^{-u/x}.$$

Первое уравнение имеет решения $u=kx$; второе интегрируется в квадратурах

$$\int\frac{dy}{ce^{-y}-y}=\log x+k, \tag{2.96}$$

где $y=u/x$. Здесь (2.96) — «общее» решение уравнения (2.95), а линейные функции составляют однопараметрическое семейство его особых решений.

Интегрирование уравнения (2.95) ранее развитым методом — дело чуть более хитрое. Как и в примере 2.46, мы полагаем $y=u/x$, $\tilde{w}=\log x$, так что через $y$ и $\tilde{w}$ инфинитезимальная образующая записывается в виде $\partial/\partial\tilde{w}$. Далее,

$$u_x=\frac{1+y\tilde{w}_y}{\tilde{w}_y}, \quad xu_{xx}=\frac{\tilde{w}_y^2-\tilde{w}_{yy}}{\tilde{w}_y^3},$$

так что наше уравнение принимает вид уравнения Риккати первого порядка

$$\frac{dz}{dy} = (y+1)z^2 + z, \tag{2.97}$$

где $z = d\tilde{w}/dy$. Решение получается либо с помощью общих методов интегрирования уравнений Риккати, либо, что более целесообразно, из того, что оно допускает однопараметрическую группу симметрий с образующей $\mathbf{w} = (z + yz^2)\partial_z$. Поэтому в силу теоремы 2.48 $R = (z + yz^2)^{-1}$ — интегрирующий множитель для (2.97). Находим, что

$$T(y, z) = y + \log(y + z^{-1}) = \tilde{c}$$

— интеграл, следовательно, решения уравнения (2.97) задаются формулой $z = (ce^{-y} - y)^{-1}$. Вспоминая определение $z = \tilde{w}_y$, мы видим, что последнее выражение можно проинтегрировать, чтобы вернуться к общему решению (2.96) уравнения (2.95). Особые решения $u = kx$ в этом случае не появляются, поскольку они не соответствуют функциям вида $\tilde{w} = h(y)$. Их можно найти, выбрав другие координаты, например $\hat{w} = \log u$ вместо $\tilde{w}$.

Интересный момент состоит в том, что группа симметрий уравнения Риккати (2.97), порожденная полем $\mathbf{w}$, *не укладывается* в группу симметрий исходного уравнения. Таким образом, понижение порядка обыкновенного дифференциального уравнения может привести к уравнению с новыми симметриями, благодаря которым можно еще понизить порядок!

## Многопараметрические группы симметрий

Если обыкновенное дифференциальное уравнение $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ инвариантно относительно $r$-параметрической группы, то интуиция говорит нам, что мы должны быть в состоянии понизить порядок уравнения на $r$. В некотором смысле это несколько наивное предположение справедливо, однако проблема может заключаться в том, что мы не сможем восстановить решения исходного уравнения $n$-го порядка по решениям приведенного уравнения $(n-r)$-го порядка посредством одних только квадратур. Точнее, предположим, что $G$ есть $r$-параметрическая группа преобразований, действующая на $M \subset X \times U$. *Предположим* для простоты, что $r$-е продолжение $\mathrm{pr}^{(r)}G$, действующее на $M^{(r)}$, имеет $r$-мерные орбиты. (Более вырожденные случаи можно рассмотреть аналогично, хотя при этом могут возникнуть технические трудности.) Поскольку многообразие $M^{(r)}$ $(r+2)$-мерно, это означает, что локально существуют в точности два независимых дифференциальных инварианта $r$-го порядка группы $G$, скажем,

$$y=\eta(x, u^{(r)}), \quad w=\zeta(x, u^{(r)}). \tag{2.98}$$

Заметим, что каждое дальнейшее продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}G$ тоже имеет $r$-мерные орбиты. (Это так, поскольку они проектируются на орбиты группы $\mathrm{pr}^{(r)}G$ в $M^{(r)}$, так что они по меньшей мере $r$-мерны, но сама группа $G$ $r$-мерна, так что орбиты не могут иметь размерность, большую чем $r$; см. упр. 3.17.) Поэтому $n$-е продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}G$ имеет $n-r+2$ независимых дифференциальных инвариантов, в качестве которых мы в силу предложения 2.53 можем взять

$$y, \ w, \ dw/dy, \ \ldots, \ d^{n-r}w/dy^{n-r}.$$

Если уравнение $\Delta(x, u^{(n)})=0$ инвариантно относительно полной группы симметрий $G$, то в силу предложения 2.18 существует эквивалентное уравнение

$$\tilde{\Delta}(y, w, dw/dy, \ldots, d^{n-r}w/dy^{n-r})=0, \tag{2.99}$$

содержащее только инварианты группы $\mathrm{pr}^{(n)}G$. В этом смысле мы свели уравнение $n$-го порядка относительно $u$ как функции от $x$ к уравнению порядка $n-r$ относительно $w$ как функции от $y$.

Главная проблема в этот момент состоит в том, что неясно, как мы найдем решение $u=f(x)$ исходного уравнения по общему решению $w=h(y)$ редуцированного уравнения (2.99). Пользуясь выражением (2.98) для инвариантов $y$, $w$, получаем, что мы должны решить вспомогательное уравнение $r$-го порядка

$$\zeta(x, u^{(r)})=h[\eta(x, u^{(r)})], \tag{2.100}$$

чтобы найти $u$. Это вспомогательное уравнение, будучи выраженным через дифференциальные инварианты, сохраняет группу $G$ в качестве своей $r$-параметрической группы симметрий. Однако в отличие от однопараметрической ситуации у нас нет никаких гарантий, что мы сможем проинтегрировать (2.100) в квадратурах и таким образом явно получить решение исходного уравнения. Эта трудность видна в следующем примере.

**Пример 2.59.** Вспоминая пример 1.58(с), рассмотрим действие группы $\mathrm{SL}(2)$ как проективной группы

$$(x, u) \longmapsto ((\alpha x+\beta)/(\gamma x+\delta), u)$$

на прямой. Инфинитезимальные образующие — это

$$\mathbf{v}_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad \mathbf{v}_2=x\frac{\partial}{\partial x},\quad \mathbf{v}_3=x^2\frac{\partial}{\partial x},$$

откуда мы видим, что

$$y=u,\quad w=2u_x^{-3}u_{xxx}-3u_x^{-4}u_{xx}^2$$

составляют полное множество функционально независимых инвариантов для продолжения $\mathrm{pr}^{(3)}\mathrm{SL}(2)$.

Мы заключаем, что всякое дифференциальное уравнение $\Delta(x, u^{(n)})=0$, инвариантное относительно полной проективной группы, эквивалентно уравнению $(n-3)$-го порядка

$$\Delta\left(y,\ w,\ \frac{dw}{dy},\ \ldots,\ \frac{d^{n-3}w}{dy^{n-3}}\right)=0, \tag{2.101}$$

содержащему только инварианты продолжения $\mathrm{pr}^{(n)}\mathrm{SL}(2)$. Например, поскольку

$$\frac{dw}{dy}=\frac{dw/dx}{u_x}=\frac{2u_x^2u_{xxxx}-12u_xu_{xx}u_{xxx}+12u_{xx}^3}{u_x^6},$$

всякое уравнение четвертого порядка, допускающее группу $\mathrm{SL}(2)$ в качестве своей группы симметрий, эквивалентно уравнению вида

$$2u_x^2u_{xxxx}-12u_xu_{xx}u_{xxx}+12u_{xx}^3=u_x^6H\left(u,\ u_x^{-4}\left(2u_xu_{xxx}-3u_{xx}^2\right)\right).$$

Редуцированное уравнение (2.101) в этом случае — уравнение первого порядка $dw/dy=H(y, w)$.

В результате решения указанного уравнения мы найдем зависимость $w=h(y)$, но тут возникает задача найти соответствующие решения $u=f(x)$, решая вспомогательное уравнение

$$2u_xu_{xxx}-3u_{xx}^2=u_x^4h(u), \tag{2.102}$$

полученное подстановкой выражений для $y$ и $w$. Это уравнение остается инвариантным относительно группы $\mathrm{SL}(2)$, так что мы можем воспользоваться знанием этого, чтобы попытаться его проинтегрировать. В частности, оно инвариантно относительно подгруппы сдвигов, порожденной $\partial_x$ и имеющей инварианты $y=u$, $z=u_x$, в терминах которых (2.102) приводится к виду

$$2z\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{dz}{dy}\right)^2=z^2h(y).$$

Это последнее уравнение инвариантно относительно группы растяжений $(y, z)\longmapsto(y, \lambda z)$ (отражающей симметрию уравнения

(2.102) относительно группы растяжений $(x, u) \mapsto (\lambda^{-1}x, u))$ и, следовательно, может быть приведено к уравнению Риккати первого порядка

$$2\frac{dv}{dy} + v^2 = h(y) \tag{2.103}$$

относительно $v = (\log z)_y = z_y/z$. Однако на этом месте мы застряли. Мы использовали уже сдвиги и растяжения, чтобы привести (2.102) к уравнению первого порядка, но инверсий, порожденных полем $\mathbf{v}_3$, которые можно использовать, чтобы проинтегрировать стандартное уравнение Риккати (2.103), не осталось. Таким образом, лучшее, что можно сказать, — это то, что решение дифференциального уравнения $n$-го порядка, инвариантного относительно проективной группы, можно получить из общего решения редуцированного уравнения $(n-3)$-го порядка, используя две квадратуры и решение вспомогательного уравнения Риккати первого порядка.

Весь этот пример иллюстрирует важную деталь. Если мы понизили порядок обыкновенного дифференциального уравнения, используя только подгруппу всей группы симметрий, мы вполне можем потерять любые дополнительные свойства симметрии, имеющиеся во всей группе. Только подгруппы специального вида, а именно нормальные подгруппы, описанные в упр. 1.24, дадут нам возможность сохранить полностью свойства симметрии при редукции. Прежде чем обсуждать этот случай, полезно еще раз вернуться к симметриям алгебраических уравнений.

Пусть $G$ есть $r$-параметрическая группа, действующая на $M \subset \mathbb{R}^m$, и пусть $H \subset G$ — подгруппа. Предположим, что $\eta(x) = (\eta^1(x), \ldots, \eta^{m-s}(x))$ составляют полное множество функционально независимых инвариантов группы $H$. Если $H$ оказалась *нормальной* подгруппой, т. е. $ghg^{-1} \in H$, когда $g \in G$, $h \in H$, то имеется индуцированное действие группы $G$ на подмножество $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^{m-s}$, определяемое этими инвариантами $y = (y^1, \ldots, y^{m-s}) = \eta(x)$:

$$\tilde{g} \cdot y = \tilde{g} \cdot \eta(x) = \eta(g \cdot x), \quad g \in G, \quad x \in M. \tag{2.104}$$

Заметим, что для любого $h \in H$

$$\tilde{g} \cdot \eta(hx) = \eta(g \cdot hx) = \eta(\hat{h} \cdot gx) = \eta(gx) = \tilde{g} \cdot \eta(x),$$

где $\hat{h} = ghg^{-1} \in H$; отсюда легко видеть, что это действие на $\tilde{M}$ определено корректно. (На самом деле $H$ действует на $\tilde{M}$ тривиально, так что (2.104) в действительности определяет действие факторгруппы $G/H$; см. упр. 3.11.)

В соответствии с предложением 2.18 всякое $H$-инвариантное подмножество множества $M$ можно записать как множество нулей $\mathscr{S}_F=\{F(x)=0\}$ некоторой $H$-инвариантной функции $F(x)=\tilde{F}(\eta(x))$. Как нетрудно убедиться, в предположении, что $H$ — нормальная подгруппа, множество $\mathscr{S}_F\subset M$ инвариантно относительно всей группы $G$ тогда и только тогда, когда приведенное подмногообразие $\mathscr{S}_{\tilde{F}}=\{y\colon \tilde{F}(y)=0\}\subset\tilde{M}$ инвариантно относительно индуцированного действия $G$ на $\tilde{M}$.

Что касается инфинитезимального варианта, введем $s$ дополнительных переменных $\hat{x}=(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^s)$, дополняющих $y=\eta(x)$ до локальных координат $(y, \hat{x})$ на $M$. Пользуясь инфинитезимальным критерием нормальности из упр. 1.24(b), мы видим, что каждая инфинитезимальная образующая группы $G$ должна иметь в этих координатах вид

$$\mathbf{v}_k=\sum_{i=1}^{m-s}\eta_k^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}+\sum_{j=1}^{s}\xi_k^j(y, \hat{x})\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}, \quad k=1, \ldots, r, \tag{2.105}$$

где каждая $\eta^i$ не зависит от параметрических переменных $\hat{x}$. Таким образом, поле $\mathbf{v}_k$ приводится к векторному полю

$$\tilde{\mathbf{v}}_k=\sum_{i=1}^{m-s}\eta_k^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad k=1, \ldots, r,$$

порождающему редуцированное действие $G$ на $\tilde{M}$. Эти поля мы можем использовать для проверки инвариантности редуцированного подмногообразия $\mathscr{S}_{\tilde{F}}$ и, следовательно, $\mathscr{S}_F$.

Аналогичные результаты справедливы и для дифференциальных уравнений. Предположим, как и выше, что $r$-параметрическая группа $G$ действует на $M\subset X\times U\simeq\mathbb{R}^2$, и допустим, что $H\subset G$ есть $s$-параметрическая подгруппа, продолжение $\mathrm{pr}^{(s)}H$ которой имеет $s$-мерные орбиты в $M^{(s)}$. (Как и раньше, вырожденные случаи тоже можно разобрать, если потребуется.) Пусть $y=\eta(x, u^{(s)})$, $w=\zeta(x, u^{(s)})$ — полное множество функционально независимых дифференциальных инвариантов для $H$ на $M^{(s)}$ с соответствующими инвариантами $w^{(m)}=\zeta^{(m)}(x, u^{(s+m)})$ на $M^{(s+m)}$, $m\geqslant 0$. Всякое обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка, допускающее $H$ в качестве группы симметрий, можно записать в виде

$$\Delta(x, u^{(n)})=\tilde{\Delta}(\eta(x, u^{(s)}), \zeta^{(n-s)}(x, u^{(n)}))=\tilde{\Delta}(y, w^{(n-s)})=0,$$

использующем только инварианты $y, w, \ldots, d^{n-s}w/dy^{n-s}$ продолжения $\mathrm{pr}^{(n)}H$. Кроме того, поскольку $H$ — нормальная подгруппа группы $G$, имеется индуцированное действие $G$ на $\tilde{M} \subset Y \times W \simeq \mathbb{R}^2$

$$\tilde{g} \cdot (y, w) = \tilde{g} \cdot (\eta(x, u^{(s)}), \zeta(x, u^{(s)})) = \\ = (\eta(\mathrm{pr}^{(s)} g \cdot (x, u^{(s)})), \zeta(\mathrm{pr}^{(s)} g \cdot (x, u^{(s)}))), \quad g \in G, \qquad (2.106)$$

ср. с (2.104). Аналогично, действие $G$ на $M^{(n)}$ сводится к действию группы $G$ на пространство $\tilde{M}^{(n-s)}$, определяемое производными от $w$ по $y$. Не очень трудно видеть, что *это* редуцированное действие совпадает с продолжением действия $G$ на $\tilde{M}$, определенным формулой (2.106); другими словами,

$$\mathrm{pr}^{(n-s)} \tilde{g} \cdot (\eta(x, u^{(s)}), \zeta^{(n-s)}(x, u^{(n)})) = \\ = (\eta(\mathrm{pr}^{(s)} g \cdot (x, u^{(s)})), \quad \zeta^{(n-s)}(\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x, u^{(n)}))).$$

(Чтобы проверить это, посмотрите, что происходит с представляющей гладкой $H$-инвариантной функцией $u = f(x)$.)

Переводя на язык дифференциальных уравнений наши предыдущие результаты об алгебраических уравнениях, мы получаем, что справедлив следующий результат о нормальных подгруппах групп симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теорема 2.60.** *Пусть $H \subset G$ есть $s$-параметрическая нормальная подгруппа группы Ли преобразований, действующей на $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, такая, что $\mathrm{pr}^{(s)} H$ имеет $s$-мерные орбиты в $M^{(s)}$. Пусть $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ — обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка, допускающее $H$ в качестве своей группы симметрий, с соответствующим редуцированным уравнением $\tilde{\Delta}(y, w^{(n-s)}) = 0$ относительно инвариантов $y = \eta(x, u^{(s)})$, $w = \zeta(x, u^{(s)})$ группы $H$. Тогда имеется индуцированное действие факторгруппы $G/H$ на $\tilde{M} \subset Y \times W$, и $\Delta$ допускает всю группу $G$ в качестве своей группы симметрий, если и только если $H$-редуцированное уравнение $\tilde{\Delta}$ допускает факторгруппу $G/H$ в качестве своей группы симметрий.*

Исключительно важный пример — случай двупараметрической группы симметрий. Здесь благодаря специальной структуре двумерных групп Ли мы можем использовать предыдущую теорему, чтобы понизить порядок на две единицы, пользуясь только квадратурами.

**Теорема 2.61.** *Пусть $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ — обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка, инвариантное относительно двупараметрической группы симметрий $G$. Тогда имеется* *уравнение* $\widehat{\Delta}(z, v^{(n-2)}) = 0$ *порядка* $n-2$, *обладающее тем свойством, что общее решение уравнения* $\Delta$ *может быть получено двумя квадратурами из общего решения уравнения* $\widehat{\Delta}$.

*Доказательство.* В соответствии с упр. 1.21 мы можем найти базис $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ любой двумерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, обладающий свойством

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = k\mathbf{v} \tag{2.107}$$

для некоторой константы $k$. (На самом деле $k$ можно взять равной нулю, если $\mathfrak{g}$ абелева, и единице во всех других случаях.) Однопараметрическая подгруппа $H$, порожденная полем $\mathbf{v}$, является тогда нормальной подгруппой группы $G$ с однопараметрической факторгруппой $G/H$. Чтобы понизить порядок уравнения $\Delta$, мы начинаем с определения дифференциальных инвариантов первого порядка $y = \eta(x, u)$, $w = \zeta(x, u, u_x)$ группы $H$, пользуясь развитыми ранее методами. В силу предложения 2.56 наше уравнение $n$-го порядка эквивалентно уравнению $(n-1)$-го порядка $\Delta(y, w^{(n-1)}) = 0$. Кроме того, раз мы знаем решение $w = h(y)$ этого последнего уравнения, мы можем восстановить решение уравнения $\Delta$, решая соответствующее уравнение первого порядка (2.94) с помощью единственной квадратуры. Поскольку $H$ — нормальная подгруппа, приведенное уравнение $\widetilde{\Delta}$ инвариантно относительно действия факторгруппы $G/H$ на переменные $(y, w)$ и, следовательно, мы можем применить развитые ранее для однопараметрических групп симметрий методы, чтобы понизить порядок еще на единицу. На инфинитезимальном уровне предположим, что $(x, y, w) = (x, \eta(x, u), \zeta(x, u, u_x))$ образуют локальные координаты на некотором подмножестве многообразия $M^{(1)}$. (Если $x$ оказывается одним из инвариантов, мы можем заменить его на $u$ или на некоторую комбинацию $\gamma(x, u)$.) Как в (2.105), из условия нормальности, выраженного формулой (2.107), вытекает, что векторное поле $\mathbf{w}$ имеет первое продолжение

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{w} = \alpha(x, y, w)\partial_x + \beta(y, w)\partial_y + \psi(y, w)\partial_w,$$

выраженное через эти координаты, и, следовательно, приводится к векторному полю

$$\widetilde{\mathbf{w}} = \beta(y, w)\partial_y + \psi(y, w)\partial_w$$

на пространстве $\widetilde{M}$, порождающему действие факторгруппы $G/H$. Теорема 2.60 утверждает, что поле $\widetilde{\mathbf{w}}$ остается симметрией предварительно приведенной системы $\widetilde{\Delta}$, и, следовательно, мы можем понизить порядок $\widetilde{\Delta}$ на единицу, пользуясь либо методом дифференциальных инвариантов, либо методом замены координат, выпрямляющей поле $\tilde{\mathbf{w}}$ и приводящей к дифференциальному уравнению $\hat{\Delta}(x, v^{(n-2)})=0$ порядка $n-2$. Это завершает процедуру редукции, а вместе с ней — и доказательство теоремы. □

**Пример 2.62.** Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$x^2u_{xx}=H(xu_x-u), \tag{2.108}$$

где $H$ — данная функция. Это уравнение обладает двупараметрической группой симметрий

$$(x, u)\longmapsto(\lambda x, u+\varepsilon x), \quad \varepsilon\in\mathbb{R}, \quad \lambda\in\mathbb{R}^+,$$

с инфинитезимальными образующими $\mathbf{v}=x\partial_u$ и $\mathbf{w}=x\partial_x$. Заметим, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]=-\mathbf{v}$, так что образующие взяты в таком виде, чтобы воспользоваться преимуществами теоремы 2.61. В соответствии с основной процедурой нам нужно сначала определить инварианты поля $\mathbf{v}$. Это $x$ и $w=xu_x-u$, через которые (2.108) выражается в виде уравнения первого порядка

$$x\frac{dw}{dx}=H(w).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Его неявное решение

$$\int\frac{dw}{H(w)}=\log x+c$$

отражает тот факт, что это уравнение остается инвариантным относительно редуцированной группы $(x, w)\longmapsto(\lambda x, w)$, задаваемой полем $\tilde{\mathbf{w}}=x\partial_x$, как гарантирует наш метод. Из этого решения, переписывая в явном виде $w=h(x)$, мы строим общее решение уравнения (2.108), решая линейное уравнение

$$xu_x-u=h(x).$$

Интегрирующий множитель равен $1/x^2$ — это можно получить непосредственно из вида группы симметрий, порожденной полем $\mathbf{v}$. Следовательно, получаем, что

$$u=x\left(\int x^{-2}h(x)\,dx+k\right)$$

— общее решение уравнения (2.108).

Поучительно посмотреть, что произошло бы, если бы, не принимая во внимание общую процедуру, мы попытались проинтегрировать уравнение (2.108), рассматривая эти две однопараметрические группы в обратном порядке. В таком случае инвариантами поля $\mathbf{w}$ будут $y = u$, $z = u_x \cdot x$, откуда $z_y = xu_x^{-1}u_{xx} + 1$, и уравнение приводится к виду

$$z\left(\frac{dz}{dy} - 1\right) = H(z - y). \qquad (2.109)$$

Однако на этом этапе у уравнения (2.109) отсутствует свойство симметрии, отражающее симметрию уравнения (2.108) относительно группы, порожденной полем $\mathbf{v}$. Это показывает, что нашу процедуру редукции важно выполнять в правильном порядке, иначе мы можем не окончить ее решением уравнения. Обращая эту процедуру, мы получаем интригующую возможность суметь проинтегрировать уравнение $(n-1)$-го порядка, заменив его сначала уравнением $n$-го порядка с несколькими симметриями, порядок которого может быть существенно понижен. Например, мы можем решить уравнение (2.109), подставив сначала $y = u$, $z = xu_x$, что приведет это уравнение к виду (2.108), а затем проинтегрировав последнее уравнение. Этот момент будет исследован во всех подробностях в упражнениях в конце главы.

### Разрешимые группы

Обращаясь к группам симметрий еще более высоких размерностей, мы обнаруживаем, как показывает пример проективной группы, что при $r \geqslant 3$ инвариантность уравнения $n$-го порядка относительно $r$-параметрической группы не влечет за собой, вообще говоря, возможность найти общее решение по решению соответствующего редуцированного уравнения $(n-r)$-го порядка с помощью квадратур. Проблема состоит в том, что, вообще говоря, не существует запаса нормальных подгрупп, достаточного для того, чтобы обеспечить постоянную применимость теоремы 2.60 и процедуру приведения для однопараметрических групп на каждом этапе. Это мотивирует следующее определение таких групп, которые можно использовать для полного приведения или «разрешения» уравнения до степени, обещанной их размерностью.

**Определение 2.63.** Пусть $G$ — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $G$ *разрешима*, если существует цепочка подгрупп Ли

$$\{e\} = G^{(0)} \subset G^{(1)} \subset G^{(2)} \subset \ldots \subset G^{(r-1)} \subset G^{(r)} = G,$$

такая, что $G^{(k)}$ для каждого $k = 1, \ldots, r$ является $k$-мерной подгруппой группы $G$, а $G^{(k-1)}$ является нормальной подгруппой группы $G^{(k)}$. Равносильное определение: существует цепочка подалгебр

$$\{0\} = \mathfrak{g}^{(0)} \subset \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{g}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathfrak{g}^{(r-1)} \subset \mathfrak{g}^{(r)} = \mathfrak{g}, \tag{2.110}$$

такая, что для каждого $k$ $\dim \mathfrak{g}^{(k)} = k$ и $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ является нормальной подалгеброй в $\mathfrak{g}^{(k)}$:

$$[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subset \mathfrak{g}^{(k-1)}.$$

Требование разрешимости эквивалентно существованию базиса $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ алгебры $\mathfrak{g}$, такого, что

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \sum_{k=1}^{j-1} c_{ij}^k \mathbf{v}_k \quad \text{при } i < j.$$

Заметим, что всякая абелева алгебра Ли, т. е. алгебра Ли, скобка Ли которой всегда равна нулю, очевидно, является разрешимой. Всякая двумерная алгебра Ли разрешима, поскольку, используя базис (2.107), мы можем положить $\mathfrak{g}^{(1)}$ равной одномерной подалгебре, порожденной полем $\mathbf{v}$, и получить цепочку $\{0\} = \mathfrak{g}^{(0)} \subset \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{g}$. Простейший пример неразрешимой алгебры Ли — трехмерная алгебра $\mathfrak{sl}(2)$.

**Теорема 2.64.** *Пусть $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ — обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка. Если $\Delta$ обладает разрешимой $r$-параметрической группой симметрий $G$, такой, что для $1 \leqslant k \leqslant r$ орбиты продолжений $\mathrm{pr}^{(k)} G^{(k)}$ имеют размерность $k$, то общее решение уравнения $\Delta$ можно получить посредством квадратур из общего решения дифференциального уравнения $(n - r)$-го порядка $\tilde{\Delta}(y, w^{(n-r)}) = 0$. В частности, если $\Delta$ обладает $n$-параметрической разрешимой группой симметрий, то (учитывая упоминавшиеся технические ограничения) общее решение уравнения $\Delta$ может быть получено одними квадратурами.*

*Доказательство.* Доказательство проводится индукцией по цепочке подалгебр (2.110), существующей в силу разрешимости $G$. На $k$-м шаге мы пользуемся инвариантностью уравнения $\Delta$ относительно $k$-мерной подалгебры $\mathfrak{g}^{(k)}$, чтобы привести его к уравнению $(n-k)$-го порядка

$$\tilde{\Delta}^{(k)}(y, w^{(n-k)}) = 0,$$

где $y, w, dw/dy, \ldots, d^{n-k}w/dy^{n-k}$ составляют полное множество функционально независимых дифференциальных инвариантов для $n$-го продолжения $\mathrm{pr}^{(n)} G^{(k)}$; в частности, $y = \eta(x, u^{(k)})$, $w = \zeta(x, u^{(k)})$ составляют полное множество инвариантов $k$-го продолжения группы $G^{(k)}$. Мы можем также восстановить общее решение $u=f(x)$ по общему решению $w=h(y)$ уравнения $\tilde{\Delta}^{(k)}$ последовательностью квадратур.

Чтобы перейти к $(k+1)$-му шагу, рассмотрим образующую $\mathbf{v}_{k+1}$ алгебры $\mathfrak{g}^{(k+1)}$, не лежащую в $\mathfrak{g}^{(k)}$. Поскольку $\mathfrak{g}^{(k)}$ — нормальная подалгебра в $\mathfrak{g}^{(k+1)}$, согласно (2.105), $\mathrm{pr}^{(k)}\mathbf{v}_{k+1}$ имеет вид

$$\mathrm{pr}^{(k)}\mathbf{v}_{k+1}=\mathrm{pr}^{(k-2)}\mathbf{v}_{k+1}+\alpha(y, w)\frac{\partial}{\partial y}+\psi(y, w)\frac{\partial}{\partial w}=$$
$$=\mathrm{pr}^{(k-2)}\mathbf{v}_{k+1}+\tilde{\mathbf{v}}_{k+1},$$

где $\mathrm{pr}^{(k-2)}\mathbf{v}_{k+1}$ зависит от неинвариантных координат $x, u, \ldots, u_{k-2}$, которые нужно дополнить координатами $y$, $w$ до системы координат в $M^{(k)}$.

Теорема 2.60 утверждает, что исходное уравнение $\Delta$ инвариантно относительно всей алгебры $\mathfrak{g}^{(k+1)}$, если и только если редуцированное уравнение $\tilde{\Delta}^{(k)}$ инвариантно относительно редуцированного векторного поля $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$, что позволяет нам осуществить процедуру редукции для уравнения $\tilde{\Delta}^{(k)}$, используя векторное поле $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$. А именно, полагаем, что

$$\hat{y}=\hat{\eta}(y, w), \qquad \hat{w}=\hat{\zeta}(y, w, w_y)$$

— независимые инварианты первого продолжения $\mathrm{pr}^{(1)}\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$. Тогда $\hat{y}$, $\hat{w}$, $d\hat{w}/d\hat{y}, \ldots, d^{n-k-1}\hat{w}/d\hat{y}^{n-k-1}$ составляют полное множество инвариантов для $(n-k)$-го продолжения $\mathrm{pr}^{(n-k)}\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$. Поскольку уравнение $\tilde{\Delta}^{(k)}$ определяет инвариантное подмногообразие этой группы, имеется эквивалентное уравнение

$$\hat{\Delta}^{(k+1)}\left(\hat{y}, \hat{w}^{(n-k-1)}\right)=0,$$

зависящее лишь от инвариантов продолжения $\mathrm{pr}^{(n-k)}\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$. Более того, чтобы восстановить решения уравнения $\tilde{\Delta}^{(k)}$ из решений $\hat{w}=\hat{h}(\hat{y})$ уравнения $\hat{\Delta}^{(k+1)}$, нам нужно только решить уравнение первого порядка

$$\hat{\zeta}(y, w, w_y)=\hat{h}\,[\hat{\eta}(y, w)].$$

Оно инвариантно относительно однопараметрической группы, порожденной полем $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ и, следовательно, может быть проинтегрировано квадратурой. Это завершает шаг индукции и, таким образом, доказательство теоремы. □

**Пример 2.65.** Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$u_x^5 u_{xxx}=3u_x^4 u_{xx}^2+u_{xx}^3. \qquad (2.111)$$

Трехпараметрическая группа симметрий, порожденная векторными полями

$$\mathbf{v}_1 = \partial_u, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_3 = u\partial_x,$$

является разрешимой, поскольку

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0, \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3] = \mathbf{v}_2, \quad [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = 0.$$

Таким образом, уравнение (2.111) можно разрешить в квадратурах. Мы переходим к осуществлению процедуры редукции, описанной в доказательстве теоремы 2.64. Сначала для алгебры $\mathfrak{g}^{(1)}$, порожденной полем $\mathbf{v}_1$, мы получаем инварианты $x$, $v = u_x$, через которые уравнение (2.111) записывается в виде

$$v^5 v_{xx} = 3v^4 v_x^2 + v_x^3. \tag{2.112}$$

Второе векторное поле $\mathbf{v}_2$ сохраняет свой вид $\tilde{\mathbf{v}}_2 = \partial_x$, будучи записанным через инварианты алгебры $\mathfrak{g}^{(1)}$; поэтому, чтобы редуцировать (2.112) для $\mathfrak{g}^{(2)} = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, нам нужны инварианты

$$y = v, \quad w = v_x, \quad w_y = v_{xx}/v_x$$

продолжения $\operatorname{pr}^{(2)}\tilde{\mathbf{v}}_2$. Выражая через них уравнение (2.112), мы приводим его к уравнению первого порядка

$$y^5 w_y = 3y^4 w + w^2. \tag{2.113}$$

Это уравнение Риккати должно обладать еще одной симметрией, отвечающей векторному полю $\mathbf{v}_3$. В самом деле, в терминах $x$, $y = u_x$, $w = u_{xx}$,

$$\operatorname{pr}^{(2)}\mathbf{v}_3 = u\partial_x - y^2\partial_y - 3yw\partial_w,$$

и редуцированное векторное поле

$$\tilde{\mathbf{v}}_3 = -y^2\partial_y - 3yw\partial_w$$

является симметрией уравнения (2.113). Таким образом, мы можем проинтегрировать (2.113), подставляя $t = -1/y$, $z = w/y^3$ (поле $\tilde{\mathbf{v}}_3$ принимает вид $\tilde{\mathbf{v}}_3 = -\partial_t$), так что (2.113) принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = z^2.$$

Таким образом, $z = 1/(c - t)$ или, через инварианты поля $\tilde{\mathbf{v}}_2$,

$$w = \frac{y^4}{cy + 1}.$$

Чтобы найти $v$, нам нужно решить автономное уравнение

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v^4}{cv+1}$$

(автономность гарантируется инвариантностью относительно поля $\mathbf{v}_2$). Мы находим неявное решение

$$6(x-\tilde{c})v^3+3cv+2=6(x-\tilde{c})u_x^3+3cu_x+2=0.$$

После разрешения относительно $u_x$ нам останется одна последняя квадратура, чтобы получить общее решение исходного уравнения (2.111).

Следует отметить одну интересную вещь. Хотя уравнение (2.113) инвариантно относительно редуцированного векторного поля, соответствующего симметрии $\mathbf{v}_3$ уравнения (2.111), соответствующая симметрия у промежуточного уравнения (2.112) *отсутствует*. В самом деле, в терминах инвариантов $x$, $v=u_x$ поля $\mathbf{v}_1$

$$\mathrm{pr}^{(3)}\mathbf{v}_3=u\frac{\partial}{\partial x}-v^2\frac{\partial}{\partial v}-3vv_x\frac{\partial}{\partial v_x}-\left(4vv_{xx}+3v_x^2\right)\frac{\partial}{\partial v_{xx}},$$

однако это векторное поле *нельзя* редуцировать к полю, не зависящему от $u$. В качестве следствия этого наблюдения мы получаем, что в общей процедуре редукции важно дождаться, пока мы получим инварианты для $\mathfrak{g}^{(k)}$, прежде чем пытаться редуцировать следующее векторное поле $\mathbf{v}_{k+1}$; нельзя рассчитывать, что векторное поле $\mathbf{v}_{k+1}$ естественным образом редуцируется относительно подалгебры $\mathfrak{g}^{(j)}$, если $j<k$!

## Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Знание группы симметрий системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка влечет за собой примерно те же следствия, что и знание аналогичной группы симметрий одного уравнения высшего порядка. Если нам известна однопараметрическая группа симметрий, то мы можем квадратурой найти решение рассматриваемой системы по решению системы первого порядка, имеющей на одно уравнение меньше. Аналогично, знание $r$-параметрической разрешимой группы симметрий позволяет нам уменьшить число уравнений на $r$. Эти результаты, очевидно, распространяются также на системы высших порядков, так что инвариантность системы $n$-го порядка относительно, скажем, однопараметрической группы позволяет понизить порядок одного из уравнений системы на единицу. Однако систему уравнений высшего порядка всегда можно заменить эквивалентной системой первого порядка, поэтому мы сосредоточиваем свое внимание на этом последнем случае.

**Теорема 2.66.** *Пусть*

$$\frac{du^\nu}{dx} = F_\nu(x, u), \quad \nu = 1, \ldots, q, \tag{2.114}$$

*— система из $q$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Предположим, что $G$ — однопараметрическая группа симметрий системы. Тогда существует замена переменных $(y, w) = \psi(x, u)$, приводящая эту систему к виду*

$$\frac{dw^\nu}{dy} = H_\nu(y, w^1, \ldots, w^{q-1}), \quad \nu = 1, \ldots, q. \tag{2.115}$$

*Таким образом, эта система приводится к системе из $q-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений от $w^1, \ldots, w^{q-1}$ и квадратуре*

$$w^q(y) = \int H_q(y, w^1(y), \ldots, w^{q-1}(y))\, dy + c.$$

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{v}$ — инфинитезимальная образующая группы $G$. Предполагая, что $\mathbf{v}|_{(x, u)} \neq 0$, мы можем локально найти новые координаты $y = \eta(x, u)$, $w^\nu = \zeta^\nu(x, u)$, $\nu = 1, \ldots, q$, такие, что в этих координатах векторное поле $\mathbf{v}$ примет вид $\mathbf{v} = \partial/\partial w^q$. В самом деле,

$$\eta(x, u), \; \zeta^1(x, u), \; \ldots, \; \zeta^{q-1}(x, u)$$

будет полным множеством функционально независимых инвариантов группы $G$, так что

$$\mathbf{v}(\eta) = \mathbf{v}(\zeta^\nu) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, q-1,$$

а $\zeta^q(x, u)$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{v}(\zeta^q) = 1.$$

Теперь просто проверяется, что эквивалентная система первого порядка от $w^1, \ldots, w^q$ инвариантна относительно группы сдвигов, порожденной полем $\mathbf{v} = \partial/\partial w^q$, тогда и только тогда, когда все правые части не зависят от $w^q$, т. е. эта система имеет вид (2.115). □

**Пример 2.67.** Рассмотрим автономную систему двух уравнений

$$\frac{du}{dx} = F(u, v), \quad \frac{dv}{dx} = H(u, v).$$

Ясно, что векторное поле $\mathbf{v} = \partial/\partial x$ порождает однопараметрическую группу симметрий, так что мы можем свести эту систему к одному уравнению первого порядка и квадратуре. В новых координатах $y=u$, $w=v$ и $z=x$ мы рассматриваем $w$ и $z$ как функции от $y$. Тогда

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{dz/dy}, \quad \frac{dv}{dx}=\frac{dw/dy}{dz/dy},$$

так что имеем эквивалентную систему

$$\frac{dw}{dy}=\frac{H(y, w)}{F(y, w)}, \quad \frac{dz}{dy}=\frac{1}{F(y, w)}.$$

Таким образом, у нас осталось одно уравнение первого порядка от $w=w(y)$; соответствующее значение $z=z(y)$ определяется интегралом:

$$z=\int \frac{1}{F(y, w)}\,dy+c.$$

Если мы обратимся к исходным переменным $x$, $u$, $v$, то увидим, что у нас как раз получилось уравнение

$$\frac{dv}{du}=\frac{H(u, v)}{F(u, v)}$$

для траекторий в фазовой плоскости системы, а точное движение вдоль этих траекторий определяется интегралом:

$$x=\int \frac{du}{F(u, v(u))}+c.$$

**Теорема 2.68.** *Предположим, что $du/dx=F(x, u)$ — система из $q$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и $G$ есть $r$-параметрическая разрешимая группа симметрий, действующая регулярно и имеющая $r$-мерные орбиты. Тогда решения $u=f(x)$ можно получить с помощью квадратур из решений редуцированной системы $dw/dy=H(y, w)$ из $q-r$ уравнений первого порядка. В частности, если исходная система инвариантна относительно $q$-параметрической разрешимой группы, ее общее решение может быть найдено в квадратурах.*

Доказательство мы оставляем читателю.

**Пример 2.69.** Всякая линейная двумерная система

$$u_t=\alpha(t)\,u+\beta(t)\,v,$$
$$v_t=\gamma(t)\,u+\delta(t)\,v$$

инвариантна относительно однопараметрической группы растяжений $(t, u, v)\longmapsto(t, \lambda u, \lambda v)$ с инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}=u\partial_u+v\partial_v$ и, следовательно, методом теоремы 2.66 может быть сведена к одному уравнению первого порядка. Мы полагаем $w = \log u$, $z = v/u$ и тем самым выпрямляем поле $\mathbf{v} = \partial_w$. Эти новые переменные удовлетворяют преобразованной системе

$$
\begin{aligned}
w_t &= \alpha(t) + \beta(t) z, \\
z_t &= \gamma(t) + (\delta(t) - \alpha(t)) z - \beta(t) z^2,
\end{aligned}
$$

так что если мы можем решить уравнение Риккати относительно $z$, то мы можем найти $w$ (и, следовательно, $u$ и $v$) посредством квадратуры.

Однако, если исходная система обладает некоторым дополнительным свойством симметрии, может быть, неразумно выполнять эту преждевременную редукцию, поскольку полученное уравнение Риккати может не быть больше инвариантным относительно некоторой «редуцированной» группы симметрий. Например, система

$$
\begin{aligned}
u_t &= -u + (t+1) v, \\
v_t &= u - tv
\end{aligned}
$$

имеет дополнительную однопараметрическую группу симметрий с образующей $\mathbf{w} = t\partial_u + \partial_v$, как может проверить читатель, но соответствующее уравнение Риккати

$$
z_t = 1 + (1-t) z - (1+t) z^2
$$

не имеет, очевидно, свойства симметрии. Проблема в том, что векторные поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ порождают разрешимую двумерную группу Ли, но $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -\mathbf{w}$, так что нам следовало бы начинать с редукции относительно векторного поля $\mathbf{w}$. Чтобы осуществить процедуру редукции из теоремы 2.68, нам нужно сначала выпрямить поле $\mathbf{w} = \partial_{\tilde{w}}$ заменой координат

$$
\tilde{w} = v, \quad \tilde{z} = u - tv.
$$

В этих переменных образующей группы растяжений остается векторное поле $\mathbf{v} = \tilde{w}\partial_{\tilde{w}} + z\partial_{\tilde{z}}$. Чтобы выпрямить его компоненту $\tilde{z}$, мы полагаем далее $\hat{z} = \log \tilde{z} = \log (u - tv)$, и в этих переменных получаем

$$
\mathbf{w} = \partial_{\tilde{w}}, \quad \mathbf{v} = \tilde{w}\partial_{\tilde{w}} + \partial_{\hat{z}}.
$$

Система теперь принимает вид

$$
\frac{d\tilde{w}}{dt} = e^{\hat{z}}, \quad \frac{d\hat{z}}{dt} = -t - 1,
$$

и, как гарантирует нам теорема 2.68, ее можно проинтегрировать в квадратурах. Получаем

$$\hat{z}(t) = -\frac{1}{2}(t+1)^2 + \tilde{c},$$

$$\tilde{w}(t) = c\,\mathrm{erf}\left[(t+1)/\sqrt{2}\right] + k,$$

где $\tilde{c} = \ln\left(c\sqrt{2/\pi}\right)$ и

$$\mathrm{erf}\,(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2}\,dx$$

— стандартная функция ошибок. Таким образом, общее решение исходной системы

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, ce^{-(t+1)^2/2} + ct\,\mathrm{erf}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + kt,$$

$$v(t) = c\,\mathrm{erf}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + k,$$

где $c$ и $k$ — произвольные постоянные.

## 2.6. УСЛОВИЯ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Часто бывает интересна классификация всех симметрий системы дифференциальных уравнений: поэтому важно знать, когда можно инфинитезимальными методами, развитыми в § 2.3, построить наиболее общую связную группу симметрий данной системы. Чтобы это было так, необходимо наложить дополнительное условие невырожденности, известное как «локальная разрешимость», помимо условия максимальности ранга из определения 2.30. Это относительно непривычное и более техническое условие требует, чтобы система имела решения для «произвольных начальных данных». В этом параграфе мы подробно обсуждаем это понятие и некоторые его следствия.

### Локальная разрешимость

Для того чтобы мотивировать определение локальной разрешимости, давайте посмотрим, почему, в отличие от случая систем алгебраических уравнений, инфинитезимальный критерий (2.25) *не является*, вообще говоря, необходимым условием для того, чтобы группа Ли $G$ была группой симметрий системы дифференциальных уравнений максимального ранга. Для системы алгебраических уравнений $F(x) = 0$ каждой точке $x_0$ подмногообразия $\mathcal{S}_F = \{x\colon\ F(x) = 0\}$ соответствует (тавтологически)