и, как гарантирует нам теорема 2.68, ее можно проинтегрировать в квадратурах. Получаем

$$\hat{z}(t) = -\frac{1}{2}(t+1)^2 + \tilde{c},$$

$$\tilde{w}(t) = c\,\mathrm{erf}\left[(t+1)/\sqrt{2}\right] + k,$$

где $\tilde{c} = \ln\left(c\sqrt{2/\pi}\right)$ и

$$\mathrm{erf}\,(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2}\,dx$$

— стандартная функция ошибок. Таким образом, общее решение исходной системы

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, ce^{-(t+1)^2/2} + ct\,\mathrm{erf}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + kt,$$

$$v(t) = c\,\mathrm{erf}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + k,$$

где c и k — произвольные постоянные.

2.6. УСЛОВИЯ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Часто бывает интересна классификация всех симметрий системы дифференциальных уравнений: поэтому важно знать, когда можно инфинитезимальными методами, развитыми в § 2.3, построить наиболее общую связную группу симметрий данной системы. Чтобы это было так, необходимо наложить дополнительное условие невырожденности, известное как «локальная разрешимость», помимо условия максимальности ранга из определения 2.30. Это относительно непривычное и более техническое условие требует, чтобы система имела решения для «произвольных начальных данных». В этом параграфе мы подробно обсуждаем это понятие и некоторые его следствия.

Локальная разрешимость

Для того чтобы мотивировать определение локальной разрешимости, давайте посмотрим, почему, в отличие от случая систем алгебраических уравнений, инфинитезимальный критерий (2.25) *не является*, вообще говоря, необходимым условием для того, чтобы группа Ли G была группой симметрий системы дифференциальных уравнений максимального ранга. Для системы алгебраических уравнений $F(x)=0$ каждой точке x_0 подмногообразия $\mathcal{S}_F = \{x\colon\ F(x)=0\}$ соответствует (тавтологически) решение системы, а именно сама точка x_0! В отличие от этого, если $\Delta(x, u^{(n)})=0$ — система дифференциальных уравнений и $(x_0, u_0^{(n)})$ — точка соответствующего подмногообразия $\mathscr{S}_\Delta=\{(x, u^{(n)}) : \Delta(x, u^{(n)})=0\}$, то, вообще говоря, нет гарантии, что существует решение $u=f(x)$ системы, имеющее соответствующие значения производных в точке x_0, т. е. $u_0^{(n)}=\mathrm{pr}^{(n)}f(x_0)$. Поэтому, если G, локальная группа преобразований, является группой симметрий системы дифференциальных уравнений в том смысле, что она решения преобразует в решения, нет никакой уверенности, что группа G оставит инвариантным целое подмногообразие $\mathscr{S}_\Delta$. Мы можем лишь заключить, что те точки $(x_0, u_0^{(n)})$ из $\mathscr{S}_\Delta$, для которых существует такое решение, преобразуются под действием этой группы преобразований в другие такие точки из $\mathscr{S}_\Delta$. Поэтому, чтобы доказать необходимость инфинитезимального критерия инвариантности, нам нужно предположить, что каждая точка из $\mathscr{S}_\Delta$ имеет соответствующее решение.

Определение 2.70. Система дифференциальных уравнений n-го порядка $\Delta(x, u^{(n)})=0$ *локально разрешима* в точке

$$(x_0, u_0^{(n)}) \in \mathscr{S}_\Delta=\{(x, u^{(n)}): \Delta(x, u^{(n)})=0\},$$

если существует ее гладкое решение $u=f(x)$, определенное для x из некоторой окрестности точки x_0, имеющее предписанные «начальные условия» $u_0^{(n)}=\mathrm{pr}^{(n)}f(x_0)$. Система называется *локально разрешимой*, если она локально разрешима в каждой точке многообразия $\mathscr{S}_\Delta$. Система дифференциальных уравнений *невырожденна*, если в каждой точке $(x_0, u_0^{(n)}) \in \mathscr{S}_\Delta$ она является и локально разрешимой, и системой максимального ранга.

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений условие локальной разрешимости совпадает с условием существования решения с заданными начальными значениями. В этом случае $(x_0, u_0^{(n)})$ соответствуют обычным начальным значениям. Например, для одного уравнения второго порядка

$$u_{xx}=F(x, u, u_x) \tag{2.116}$$

начальные значения для локальной разрешимости составляют четверку чисел $(x^0, u^0, u_x^0, u_{xx}^0)$, подчиняющихся лишь условию, что они удовлетворяют этому уравнению, т. е.

$$u_{xx}^0=F(x^0, u^0, u_x^0).$$

Требуется найти решение $u=f(x)$, определенное вблизи точки x^0, такое, что

$$u^0=f(x^0), \quad u_x^0=f'(x^0), \quad u_{xx}^0=f''(x^0).$$

Ясно, что первые два из этих условий представляют собой обычную задачу с начальными условиями для уравнения (2.116) и, таким образом, мы уверены в существовании решения $u = f(x)$, удовлетворяющего этим двум условиям. (На самом деле нам нужно предположить лишь, что функция F непрерывна.) Третье условие $u^0_{xx} = f''(x^0)$ — «бесплатное приложение», поскольку f является решением как раз в точке x^0, так что

$$f''(x^0) = F(x^0, f(x^0), f'(x^0)) = F(x^0, u^0, u^0_x) = u^0_{xx}.$$

Аналогичное рассуждение показывает, что неособые системы обыкновенных дифференциальных уравнений всегда локально разрешимы.

Что касается уравнений с частными производными, то здесь проблема локальной разрешимости имеет совершенно другой характер, чем более обычная проблема существования, т. е. задача Коши или задача с граничными условиями. В случае локальной разрешимости начальные данные заданы только в одной точке x_0, тогда как обычно требуются условия на значения вдоль целого подмногообразия пространства независимых переменных. Например, в случае волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

вопрос о локальной разрешимости превращается в вопрос о том, для любого ли набора начальных данных

$$(x^0, t^0;\ u^0;\ u^0_x, u^0_t;\ u^0_{xx}, u^0_{xt}, u^0_{tt}),$$

подчиненного лишь одному условию $u^0_{tt} = u^0_{xx}$, существует решение $u = f(x, t)$ волнового уравнения в окрестности точки (x^0, t^0), такое, что

$$u^0 = f(x^0, t^0), \quad u^0_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, t^0), \quad u^0_t = \frac{\partial f}{\partial t}(x^0, t^0),$$

$$u^0_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0, t^0), \quad u^0_{xt} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial t}(x^0, t^0),$$

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x^0, t^0).$$

Ясно, что в этом случае ответ положительный, поскольку, раз $u^0_{xx} = u^0_{tt}$, мы можем взять в качестве f полиномиальное решение

$$f(x, t) = u^0 + u^0_x(x - x^0) + u^0_t(t - t^0) +$$
$$+ \frac{1}{2} u^0_{xx}[(x - x^0)^2 + (t - t^0)^2] + u^0_{xt}(x - x^0)(t - t^0),$$

следовательно, волновое уравнение локально разрешимо. (Заметим, что вопрос о единственности решения локальной задачи не стоит — даже в этом простом примере такой результат неверен.) Читатель может сравнить эту задачу с обычной задачей Коши, в которой начальные данные задаются вдоль всей оси x:

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x).$$

Имеются две главные причины, по которым система уравнений с частными производными может не быть локально разрешимой. Первая состоит в том, что система может иметь условия интегрируемости, полученные дифференцированием разных уравнений по разным переменным. Например, переопределенная система

$$u_x = yu, \quad u_y = 0 \tag{2.117}$$

не является локально разрешимой, поскольку ни в какой точке (x_0, y_0) не существует решения $u(x, y)$ с «начальными условиями»

$$u^0 = u(x_0, y_0) = 1, \quad u_x^0 = u_x(x_0, y_0) = y_0, \quad u_y^0 = u_y(x_0, y_0) = 0,$$

значения которых алгебраически удовлетворяют обоим уравнениям. В самом деле, дифференцирование первого уравнения по y, а второго по x дает

$$0 = u_{xy} = (yu)_y = yu_y + u,$$

следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ — единственное решение.

Другой интересный пример, который на самом деле возникает в вариационной задаче (ср. § 4.1), — система второго порядка

$$\begin{aligned} u_{xx} + v_{xy} + v_x &= 0, \\ u_{xy} + v_{yy} - u_x &= 0. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Оказывается, система (2.118) не является локально разрешимой, поскольку имеется дополнительное соотношение на производные второго порядка, а именно

$$v_{xx} + v_{xy} = 0,$$

полученное дифференцированием первого уравнения по y, а второго по x и вычитанием. Это в свою очередь дает $v_x = 0$ и $u_{xx} = 0$, так что любой набор начальных значений

$$(x^0, y^0; u^0, v^0; u_x^0, u_y^0, v_x^0, v_y^0; u_{xx}^0, u_{xy}^0, u_{yy}^0, v_{xx}^0, v_{xy}^0, v_{yy}^0),$$

удовлетворяющий (2.118), но не удовлетворяющий условиям $v_x^0 = v_{xx}^0 = v_{xy}^0 = u_{xx}^0 = 0$, не дает подходящего локального решения.

Второй источник систем, не обладающих свойством локальной разрешимости, — некоторые гладкие, но не аналитические системы дифференциальных уравнений, не имеющие решений. Первоначальный пример такой системы был открыт Леви (Lewy [1]), который показал, что существует гладкая функция $h(x, y, z)$, такая, что система первого порядка

$$u_x - v_y + 2yu_z + 2xv_z = h(x, y, z),$$
$$u_y + v_x - 2xu_z + 2yv_z = 0$$

не имеет гладких (и даже класса C^1) решений ни на каком открытом подмножестве из $\mathbb{R}^3$. Родственный пример был дан Ниренбергом (Nirenberg [1, p. 8]), построившим функцию $h(x, y)$, такую, что однородная линейная система

$$\begin{aligned} u_x - h(x, y)\, v_y &= 0, \\ v_x + h(x, y)\, u_y &= 0 \end{aligned} \tag{2.119}$$

в окрестности начала координат имеет лишь постоянные решения.

Как мы увидим, для аналитических систем ключ к доказательству локальной разрешимости дает теорема Коши — Ковалевской. Для систем класса C^∞ это вопрос гораздо более тонкий благодаря открытому Леви явлению, и здесь известно очень немного общих результатов. Прежде чем более подробно изучить аналитический случай, мы применим условие локальной разрешимости к инфинитезимальному критерию инвариантности системы дифференциальных уравнений относительно некоторой группы.

Критерий инвариантности

Теорема 2.71. *Пусть $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ — невырожденная система дифференциальных уравнений. Связная локальная группа преобразований G, действующая на открытом подмножестве $M \subset X \times U$, является группой симметрий этой системы, если и только если*

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}\,[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l, \ \textit{при}\ \Delta(x, u^{(n)}) = 0 \tag{2.120}$$

для каждой инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ группы G.

Доказательство. Мы знаем уже, что условие (2.120) достаточно для того, чтобы группа G была группой симметрий, поэтому нам нужно доказать только необходимость этого условия. В свете алгебраического аналога этого результата, теоремы 2.8, достаточно доказать, что подмногообразие $\mathcal{S}_\Delta = \{\Delta(x, u^{(n)}) = 0\}$ является инвариантным подмножеством действия продолженной группы $\mathrm{pr}^{(n)}G$, если G преобразует решения системы в другие ее решения. Пусть $(x_0, u_0^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$. Воспользуемся локальной разрешимостью. Пусть $u = f(x)$ — решение системы, определенное в окрестности точки x_0, такое, что $u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0)$. Если g — такой элемент группы, что определено $\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x_0, u_0^{(n)})$, то, сужая, если нужно, область определения функции f, мы можем быть уверены, что преобразованная функция $\tilde{f} = g \cdot f$ определена в окрестности точки $\tilde{x}_0$, где $(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = g \cdot (x_0, u_0)$. Поскольку G — группа симметрий, $u = \tilde{f}(x)$ также является решением системы. Более того, по определению действия продолженной группы (2.18)

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0)) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}),$$

следовательно, преобразованная точка $(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)})$, должна снова лежать в $\mathcal{S}_\Delta$. Это доказывает, что $\mathcal{S}_\Delta$ — инвариантное подмножество группы G. Таким образом, теорема доказана. □

Чтобы оценить необходимость условия локальной разрешимости в теореме 2.71, мы обсудим два примера. Рассмотрим сначала систему Ниренберга (2.119). Поскольку единственные решения вблизи нуля — константы, группа сдвигов $(x, y, u, v) \mapsto (x, y + \varepsilon, u, v)$ является группой симметрий. Однако инфинитезимальный критерий (2.120) не выполняется; применяя $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \partial_y$ к первому уравнению, мы получаем $h_y v_y$, а это выражение отлично от нуля, не будучи алгебраическим следствием системы. Эта группа также (по той же причине) является группой симметрий переопределенной системы (2.117). Однако

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}(u_x - yu) = -u,$$

что не является алгебраическим следствием системы (2.117), и снова инфинитезимальный критерий (2.120) неприменим. Однако условие (2.120) станет и необходимым, и достаточным для того, чтобы группа G была группой симметрий, если только мы потребуем, чтобы оно выполнялось в точках локальной разрешимости:

Теорема 2.72. *Пусть $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ — система дифференциальных уравнений максимального ранга. Локальная группа преобразований G является группой симметрий этой системы, если и* *только если для каждой точки* $(x_0, u_0^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$, *в которой система локально разрешима,*

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}\left(\Delta_\nu\left(x_0, u_0^{(n)}\right)\right) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

для всех инфинитезимальных образующих $\mathbf{v}$ *группы* G.

Доказательство получается немедленно. □

Теорема Коши—Ковалевской

Для аналитических систем уравнений с частными производными теорема Коши — Ковалевской играет центральную роль в теории существования. Помимо того что это основной общий результат о существовании решений таких систем, эта теорема также дает ключ к общей теории характеристик, лежащей в основе всякого серьезного исследования поведения решений систем уравнений с частными производными. Как мы увидим, теорема Коши — Ковалевской дает также доказательство локальной разрешимости большинства аналитических систем дифференциальных уравнеиий.

В своем изначальном виде теорема Коши — Ковалевской относится к задаче Коши на начальной гиперплоскости $\{t = t_0\}$ для системы в *форме Ковалевской*

$$u_{nt}^\alpha \equiv \frac{\partial^n u^\alpha}{\partial t^n} = \Gamma_\alpha(y, t, \widetilde{u^{(n)}}), \quad \alpha = 1, \ldots, q. \tag{2.121}$$

Здесь $(y, t) = (y_1, \ldots, y^{p-1}, t)$ — независимые переменные, а $\widetilde{u^{(n)}}$ означает все частные производные функции u по y и t до порядка n включительно, *кроме* производных u_{nt}^α, возникающих в левой части (2.121). *Данные Коши* для этой системы задаются следующим образом:

$$\frac{\partial^k u^\alpha}{\partial t^k}(y, t_0) = h_k^\alpha(y), \quad \alpha = 1, \ldots, q, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{2.122}$$

где h_k^α — аналитические функции на гиперплоскости $\{t = t_0\}$ для точек y из окрестности точки $y_0 \in \mathbb{R}^{p-1}$.

Теорема 2.73. *Предположим, что функции* Γ_α *в системе Ковалевской* (2.121) *аналитичны по своим аргументам и что данные Коши* $h_k^\alpha(y)$ *в* (2.122) *также являются аналитическими функциями для* y, *близких к* y_0. *Тогда существует аналитическое решение* $u = f(y, t)$ *задачи Коши* (2.121), (2.122), *определенное для* (y, t) *из некоторой окрестности точки* (y_0, t_0) *на гиперплоскости* $\{t = t_0\}$.

Эта теорема немедленно устанавливает локальную разрешимость системы Ковалевской (2.121).

Следствие 2.74. *Если* Δ *— аналитическая система в форме Ковалевской* (2.121), *то она локально разрешима.*

Доказательство. Заметим, что в задаче о локальной разрешимости системы (2.121) мы можем произвольным образом задать производные наименьшего порядка по t $\widetilde{u_0^{(n)}}$ в начальной точке (y_0, t_0); остальные производные n-го порядка, а именно $u^{\alpha}_{nt,0}$, тогда определяются требованием, что $(y_0, t_0, u_0^{(n)})$ — решение системы Δ. Выберем для заданных $(y_0, t_0, u_0^{(n)})$ аналитические функции $h^{\alpha}_k(y)$, $k=0, \ldots, n-1$, $\alpha=1, \ldots, q$, такие, что производные по y

$$\partial_J h^{\alpha}_k(y_0) = \partial^i h^{\alpha}_k(y_0)/\partial y^{j_1} \ldots \partial y^{j_i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-k,$$

совпадают с соответствующим предписанным значением $u^{\alpha}_{kt,J0}$, где $u^{\alpha}_{kt,J} \equiv D_J(u^{\alpha}_{kt})$. (Снова $h^{\alpha}_k(y)$ могут быть подходящими многочленами Тейлора.) Соответствующее решение $u=f(y,t)$ задачи Коши (2.121), (2.122) из теоремы Коши — Ковалевской решает тогда задачу существования локального решения для системы Δ. В самом деле, для $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\#J \leqslant n-k$

$$\partial_J \partial_t^k f^{\alpha}(y_0, t_0) = \partial_J h^{\alpha}_k(y_0) = u^{\alpha}_{kt,J0},$$

тогда как производные n-го порядка $\partial_t^n f^{\alpha}(y_0, t_0)$ и $u^{\alpha}_{nt,0}$ совпадают, поскольку они удовлетворяют данному уравнению (2.121) в точке (y_0, t_0) с одним и тем же значением $\widetilde{u_0^{(n)}}$. □

Более общо, можно допустить, что в левых частях стоят производные по t разных порядков. При этом система будет иметь *общую форму Ковалевской*, если

$$\partial^{n_\alpha} u^{\alpha}/\partial t^{n_\alpha} = \Gamma_\alpha(t, y, \widetilde{u^{(n)}}), \tag{2.123}$$

где $n=\max\{n_1, \ldots, n_q\}$, а $\widetilde{u^{(n)}}$ обозначает все производные всех функций u^{β} до порядка n_β включительно, кроме частных производных $\partial^{n_\beta} u^{\beta}/\partial t^{n_\beta}$, возникающих в левой части. Задача Коши (2.122) — та же, только здесь k для каждого α меняется от 0 до $n_\alpha - 1$. Все результаты этого параграфа, включая следствие 2.74, остаются справедливыми для этих более общих форм Ковалевской; доказательства лишь немного усложняются, и мы оставляем детали читателю.

Характеристики

Круг применимости теоремы существования Коши — Ковалевской, а следовательно, и теоремы о локальной разрешимости (следствие 2.74) можно было бы значительно расширить, если иметь возможность преобразовать данную систему аналитических дифференциальных уравнений в систему в форме Ковалевской (2.121) или (2.123) заменой независимых переменных. Прежде всего, чтобы иметь шансы быть преобразованной к форме Ковалевской, система

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, q,$$

должна иметь одинаковое число уравнений и неизвестных (зависимых переменных), поэтому мы сосредоточиваем внимание здесь только на таких системах.

Оказывается, достаточно рассматривать замены переменных простого вида

$$t = \psi(x), \quad y = (y^1, \ldots, y^{p-1}) = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^p), \tag{2.124}$$

где ψ — гладкая вещественнозначная функция с ненулевым градиентом, $\nabla\psi(x_0) \neq 0$ в исследуемой точке x_0, а i выбрано так, что $\partial\psi(x_0)/\partial x^i \neq 0$, т. е. замена переменных (2.124) локально обратима. Заметим, что начальная гиперплоскость $\{t = t_0\}$ в координатах (y, t) получается из множества уровня $S = \{x: \psi(x) = t_0\}$ в исходных координатах, так что задача Коши в координатах x состоит в задании начальных данных на гиперповерхности S. После замены переменных (2.124) соответствующая система

$$\widetilde{\Delta}_\nu(y, t, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, q, \tag{2.125}$$

содержит y, t и производные от u по y и t до порядка n включительно, полученные выражением производных от u по x через производные по y и t. Мы можем применить теорему Коши — Ковалевской к преобразованной системе (2.125), *если только* мы можем разрешить ее относительно производных n-го порядка u^α_{nt} по t, выразив их через y и t и остальные производные $\widetilde{u^{(n)}}$. По теореме о неявной функции это можно сделать в окрестности точки $(y_0, t_0, u_0^{(n)})$, если только матрица $\mathbf{M}$ размера $q \times q$ с элементами

$$\mathbf{M}_{\alpha\nu} = \partial\widetilde{\Delta}_\nu(y_0, t_0, u_0^{(n)})/\partial u^\alpha_{nt}, \quad \alpha, \nu = 1, \ldots, q,$$

невырожденна: $\det \mathbf{M} \neq 0$.

Посмотрим, что из себя представляет матрица $\mathbf{M}$. Если u_J^α — произвольная производная n-го порядка от u по x, то по цепному правилу

$$u_J^\alpha = \frac{\partial^n u^\alpha}{\partial x^{j_1} \ldots \partial x^{j_n}} = \frac{\partial \psi}{\partial x^{j_1}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^{j_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^{j_n}} \cdot \frac{\partial^n u^\alpha}{\partial t^n} + \ldots \equiv$$
$$\equiv (\nabla \psi)_J u_{nt}^\alpha + \ldots .$$

Здесь не выписаны члены, содержащие различные производные порядка n и ниже от u^α по y и t, кроме ключевой производной u_{nt}^α. Поэтому, если мы составим матрицу $\mathbf{M}(\omega) = \mathbf{M}_\Delta\left(\omega;\ x_0,\ u_0^{(n)}\right)$ размера $q \times q$, элементы которой — однородные многочлены

$$\mathbf{M}_{\alpha\nu}(\omega) = \sum_{\# J = n} \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha}\left(x_0,\ u_0^{(n)}\right) \cdot \omega_J, \quad \alpha,\ \nu = 1,\ \ldots,\ q, \tag{2.126}$$

степени n, зависящие от $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p)$, где $\omega_J \equiv \omega_{j_1} \cdot \omega_{j_2} \cdot \ldots \cdot \omega_{j_n}$, то предыдущая матрица получается вычислением $\mathbf{M}(\omega)$ в точке $\omega = \nabla \psi(x_0)$.

Определение 2.75. Пусть Δ — система дифференциальных уравнений n-го порядка, имеющая одинаковое число уравнений и неизвестных. Для данной точки $\left(x_0,\ u_0^{(n)}\right) \subset \mathcal{S}_\Delta$ составим матрицу многочленов (2.126) размера $q \times q$. Ненулевой набор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p)$ определяет *нехарактеристическое направление* (соответственно *характеристическое направление*) к системе Δ в точке $\left(x_0,\ u_0^{(n)}\right)$, если матрица $\mathbf{M}(\omega)$ невырожденна (соответственно вырожденна). Гиперповерхность $S = \{\psi(x) = c\}$, $\Delta\psi \neq 0$, называется *нехарактеристической* в точке $\left(x_0,\ u_0^{(n)}\right)$, если $\omega = \nabla\psi(x_0)$ определяет там нехарактеристическое направление.

В частности, если производные наибольшего порядка входят в систему $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ линейно с коэффициентами, зависящими только от x, то матрица $\mathbf{M}(\omega)$, определяющая характеристические направления, зависит только от x_0, так что мы можем опускать упоминание о частном решении $u_0^{(n)}$ и (не опасаясь двусмысленности) говорить о характеристическом или нехарактеристическом направлении в самой точке x_0. Это случай, наиболее часто встречающийся в физических системах.

Наши предыдущие рассмотрения показывают, что мы можем применить теорему Коши — Ковалевской к задаче Коши, если только начальные данные лежат на нехарактеристической гиперповерхности.

Теорема 2.76. *Если* $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ — *аналитическая система дифференциальных уравнений и поверхность* S — *нехарактеристическая аналитическая гиперповерхность для* Δ *в точке* $(x_0, u_0^{(n)})$, *то существует локальное аналитическое решение задачи Коши*

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0,$$
$$\frac{\partial^k u}{\partial n^k} = h_k(x), \quad x \in S, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

в окрестности точки x_0. *Здесь* h_k — *аналитические функции на* S, *а* $\partial/\partial n$ *означает производную вдоль нормали к* S.

Пример 2.77. (a) В случае одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = H(x, t, u, u_x, u_t)$$

направление $\omega(\tau, \xi)$ является характеристическим тогда и только тогда, когда

$$\tau^2 - \xi^2 = 0.$$

Таким образом, мы снова получаем известные характеристические кривые

$$\psi(x, t) = t \pm x = k.$$

Любая кривая, не касающаяся этих прямых, может служить для задания данных Коши.

(b) Уравнения линейной изотропной упругости (*уравнения Навье*). Для двумерного случая они принимают вид

$$\begin{aligned} &(2\mu + \lambda) u_{xx} + \mu u_{yy} + (\mu + \lambda) v_{xy} = 0, \\ &(\mu + \lambda) u_{xy} + \mu v_{xx} + (2\mu + \lambda) v_{yy} = 0, \end{aligned} \tag{2.127}$$

где λ и μ — константы, называемые *коэффициентами Ламе*. Матрица $\mathbf{M}(\xi, \eta) = \mathbf{M}(\omega)$ размера 2×2, определяющая характеристики, имеет вид

$$\mathbf{M}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda)\xi^2 + \mu\eta^2 & (\mu + \lambda)\xi\eta \\ (\mu + \lambda)\xi\eta & \mu\xi^2 + (2\mu + \lambda)\eta^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда направление $\omega = (\xi, \eta)$ характеристическое, если и только если

$$\det \mathbf{M}(\xi, \eta) = (2\mu + \lambda)\mu(\xi^2 + \eta^2)^2 = 0.$$

Таким образом, за исключением случаев $\mu = 0$ или $2\mu + \lambda = 0$, когда *каждое* направление является характеристическим, у уравнений Навье нет вещественных характеристических направлений. Заметим, что случай $\mu = 0$, $\lambda = 1$ приводит к членам старшего порядка системы (2.118), не являющейся локально разрешимой. Значит, у последней системы каждое направление характеристическое.

Нормальные системы

Следствие 2.74 немедленно даст нам решение задачи о локальной разрешимости для аналитической системы, если только мы сможем найти хотя бы одно нехарактеристическое направление к этой системе в рассматриваемой точке $(x_0, u_0^{(n)})$. Как разъясняется в примере 2.77(b), не всякая система дифференциальных уравнений с частными производными удовлетворяет этому основному требованию. Поэтому нам нужно отличать те системы, для которых это требование выполняется.

Определение 2.78. Система из q дифференциальных уравнений $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ от q зависимых переменных $u = (u_1, \ldots, u_q)$ *нормальна в точке* $(x_0, u_0^{(n)}) \in \mathscr{S}_\Delta$, если в этой точке существует хотя бы одно нехарактеристическое направление ω для Δ. Система *нормальна*, если она нормальна в каждой точке множества $\mathscr{S}_\Delta$.

Теорема 2.79. *Система дифференциальных уравнений нормальна в точке* $(x_0, u_0^{(n)})$, *если и только если существует замена переменных* $(y, t) = \chi(x)$, *переводящая ее в систему в форме Ковалевской вблизи точки* $(y_0, t_0) = \chi(x_0)$.

Следствие 2.80. *Если система дифференциальных уравнений является и аналитической, и нормальной в точке* $(x_0, u_0^{(n)})$, *то она в этой точке локально разрешима.*

Мы просто делаем замену переменных и применяем следствие 2.74 к полученной системе Ковалевской. Далее мы увидим, что следствие 2.80 можно обратить!

Продолжение дифференциальных уравнений

Определение 2.81. Пусть

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

— система дифференциальных уравнений n-го порядка, заданная обращением в нуль гладкой функции $\Delta\colon M^{(n)} \to \mathbb{R}^l$. Тогда k-е *продолжение* этой системы — система дифференциальных уравнений порядка $n + k$

$$\Delta^{(k)}(x, u^{(n+k)}) = 0,$$

полученная дифференцированием уравнений системы Δ всевозможными способами до порядка k включительно. Иными словами, система $\Delta^{(k)}$ состоит из $\binom{p+k-1}{k}\cdot l$ уравнений

$$D_J\Delta_\nu(x, u^{(n+k)}) = 0,$$

где $\nu = 1, \ldots, l$, а J пробегает все мультииндексы порядка $0 \leqslant \# J \leqslant k$.

Например, первое продолжение уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

— это система трех уравнений

$$u_t = u_{xx}, \quad u_{xt} = u_{xxx}, \quad u_{tt} = u_{xxt}.$$

Второе продолжение получается добавлением уравнений четвертого порядка

$$u_{xxt} = u_{xxxx}, \quad u_{xtt} = u_{xxxt}, \quad u_{ttt} = u_{xxtt}$$

и т. д.

Предложение 2.82. *Если $u = f(x)$ — гладкое решение системы $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$, то оно является решением каждого продолжения этой системы $\Delta^{(k)}(x, u^{(n+k)}) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

Определение 2.83. Система дифференциальных уравнений называется *вполне невырожденной*, если она и все ее продолжения имеют максимальный ранг и локально разрешимы.

Как мы сейчас покажем, всякая аналитическая система в форме Ковалевской и, следовательно, всякая нормальная аналитическая система всегда вполне невырожденна. Неожиданным является то, что в случае аналитических систем с одинаковым числом уравнений и неизвестных этим исчерпываются все вполне невырожденные системы; если аналитическая система не нормальна, то некоторое ее продолжение либо не имеет максимального ранга, либо не является локально разрешимым. Случай C^∞ сложнее, поскольку, как установил Леви, там может не существовать решения.

Теорема 2.84. *Аналитическая система дифференциальных уравнений*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, q,$$

имеющая одинаковое число уравнений и зависимых переменных $u^1, \ldots, u^q$, является вполне невырожденной, если и только если она нормальна.

Доказательство. Из теоремы Коши — Ковалевской немедленно следует, что всякая нормальная система вполне невырожденна. В самом деле, выбрав нехарактеристическое направление, мы можем считать, что это система в форме Ковалевской (2.121). k-е продолжение такой системы имеет вид

$$u^\alpha_{(n+l)t,J} = D_t^l D_J \{\Gamma_\alpha (y, t, \widetilde{u^{(n)}})\}, \tag{2.128}$$

где $J = (j_1, \ldots, j_i)$ пробегает все мультииндексы с $1 \leqslant j_\varkappa \leqslant \leqslant p-1$, $l+i \leqslant k$, а D_J обозначает соответствующую полную производную i-го порядка по $y = (y^1, \ldots, y^{p-1})$ и $u^\alpha_{(n+l)t,J} = D_J [u^\alpha_{(n+l)t}]$. Правая часть (2.128) зависит от производных $u^\beta_{mt,K}$, где $m < n+l$. Мы можем поэтому выразить по индукции производные $u^\beta_{mt,K}$, $m \geqslant n$, через y, t и производные $u^\gamma_{jt,L}$, где $j < n$. Таким образом, (2.128) эквивалентна системе вида

$$u^\alpha_{(n+l)t,J} = \Gamma_\alpha^{J,l}(y, t, \widetilde{u^{(n+k)}}), \tag{2.129}$$

где $l + \#J \leqslant k$ и $\widetilde{u^{(n+k)}}$ обозначает все производные от u до порядка $n+k$, кроме производных, включающих n или больше производных по t. Условие максимальности ранга для $\Delta^{(k)}$ легко получается из того, что подматрица полной матрицы Якоби системы (2.129), ср. определение 2.30, соответствующая всем частным производным

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta_{mt,K}} \left[u^\alpha_{(n+l)t,J} - \Gamma_\alpha^{J,l}\right], \quad m \geqslant n,$$

— единичная матрица.

Локальная разрешимость системы (2.129) следует из теоремы Коши — Ковалевской. Мы можем произвольно задать производные $\widetilde{u_0^{(n+k)}}$ в точке y_0, t_0; значения остальных производных в $u_0^{(n+k)}$ будут тогда определяться самой продолженной системой. Пусть $h^\alpha_m(y)$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, $\alpha = 1, \ldots, q$,— аналитические функции, принимающие предписанные значения

$$\partial_J h^\alpha_m (y_0) = u^\alpha_{mt,J0}, \quad \# J \leqslant n+k-m,$$

в точке (y_0, t_0). Пусть $u = f(y, t)$ — аналитическое решение полученной задачи Коши из теоремы Коши — Ковалевской. Тогда

$$\partial_J \partial_t^m f(y_0, t_0) = u^\alpha_{mt,J0},$$

где $\#J + m \leqslant n+k$: для $m < n$ это следует из определения функций h^α_m, а для $m \geqslant n$ это получается из того, что и $\mathrm{pr}^{(n+k)} f(y_0, t_0)$, и $(y_0, t_0, u_0^{(n)})$ удовлетворяют в этой точке k-му продолжению системы Δ. Таким образом, $u=f(y,t)$ дает решение задачи локальной разрешимости для Δ в точке $(y_0, t_0, u_0^{(n)})$.

Доказательство обратного утверждения в теореме 2.84 основано на прекрасном результате Финзи.

Лемма 2.85. *Пусть*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)})=0, \quad \nu=1, \ldots, q,$$

— система дифференциальных уравнений n-го порядка. Тогда система Δ не имеет нехарактеристических направлений в точке $(x_0, u_0^{(n)})$ тогда и только тогда, когда существуют однородные дифференциальные операторы k-го порядка

$$\mathscr{D}_\nu=\sum_{\# J=k} P_\nu^J D_J, \quad \nu=1, \ldots, q,$$

не все равные нулю в точке $(x_0, u_0^{(n)})$, такие, что в точке $(x_0, u_0^{(n)})$ линейная комбинация

$$\sum_{\nu=1}^{q} \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu \equiv Q\left(x_0, u_0^{(n+k-1)}\right) \tag{2.130}$$

зависит только от производных от u порядка не больше чем $n+k-1$.

Более того, если у системы Δ не существует нехарактеристических направлений для всех точек $(x, u^{(n)})$ из некоторого относительно открытого подмножества $\mathscr{S}_\Delta \cap V$, V открыто в $M^{(n)}$, то дифференциальные операторы $\mathscr{D}_\nu$ гладко зависят от $(x, u^{(n)})$. В этом случае (2.130) справедливо для всех точек $(x, u^{(n+k)}) \in M^{(n+k)}$, проектирующихся в точку $(x, u^{(n)}) \in \in \mathscr{S}_\Delta \cap V$.

Суть этой леммы состоит в следующем. Обычно если Δ — система дифференциальных уравнений n-го порядка и $\mathscr{D}_1, \ldots$ $\ldots, \mathscr{D}_q$ — дифференциальные операторы k-го порядка, то следует ожидать, что линейная комбинация $\sum \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu$ зависит от производных от u порядка $n+k$. Однако в случае, когда система Δ имеет только характеристические направления, можно найти некоторые нетривиальные дифференциальные операторы k-го порядка $\mathscr{D}_\nu$, такие, что комбинация $\sum \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu$ зависит *только* от производных порядка $n+k-1$ и ниже, и, следовательно, условие $\sum \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu=0$, которое должно выполняться на всех решениях, дает дополнительное условие интегрируемости на производные от u порядка $n+k-1$, которое не выводится непосредственно из $(k-1)$-го продолжения $\Delta^{(k-1)}$. Обратно, если система обладает некоторыми нетривиальными условиями интегрируемости, из леммы Финзи следует, что у этой системы не может быть нехарактеристических направлений. Теперь мы можем понять, почему система (2.118) не имеет нехарактеристических направлений: по той же самой причине, по которой она не является локально разрешимой! Дальнейшие следствия этого результата будут исследованы после того, как мы обсудим его доказательство.

Доказательство леммы 2.85. В соответствии с определением 2.75 система Δ имеет только характеристические направления в некоторой точке, если и только если соответствующая матрица $\mathbf{M}(\omega)$ размера $q \times q$ многочленов от $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p)$ степени n является вырожденной для всех значений ω:

$$\det \mathbf{M}(\omega) \equiv 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^p.$$

Относительно легкий результат из линейной алгебры (см. упр. 2.31) состоит в том, что это верно, если и только если существует вектор-строка $\sigma(\omega) = (\sigma^1(\omega), \ldots, \sigma^q(\omega)) \not\equiv 0$ из однородных многочленов от ω, такая, что

$$\sigma(\omega) \cdot \mathbf{M}(\omega) \equiv 0 \tag{2.131}$$

для всех ω. В нашем случае полагаем

$$\sigma^\nu(\omega) = \sum_{\# J = k} P_\nu^J \omega_J.$$

Тогда коэффициенты P_ν^J в σ^ν будут служить коэффициентами операторов $\mathscr{D}_\nu$ в (2.130). В самом деле, легко видеть, что если $\# J = k$, то

$$D_J \left[\Delta_\nu (x, u^{(n)})\right] = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\# K = n} \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_K^\alpha} u_{J, K}^\alpha + \ldots,$$

где $u_{J,K}^\alpha$ обозначает производную $D_J\left(u_K^\alpha\right)$ порядка $n + k$, а все опущенные слагаемые зависят от производных порядка не больше $n + k - 1$. Таким образом,

$$\sum_{\nu=1}^{q} \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu = \sum_{\nu=1}^{q} \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\# K = n} P_\nu^J \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_K^\alpha} + Q\left(x, u^{(n+k-1)}\right) \tag{2.132}$$

для некоторой определенной функции Q, зависящей от производных от u порядка не больше $n + k - 1$. С другой стороны, элемент с номером α в произведении (2.131) строки σ на $\mathbf{M}$ равен в силу (2.126)

$$\sum_{\nu=1}^{q} \sum_{\# J=k} \sum_{\# K=n} P_J^\nu \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_K^\alpha} \omega_J \omega_K \equiv 0$$

в точке $(x_0, u_0^{(n)})$. Поскольку $u_{J,K}^\alpha$ также полностью симметричны по индексам J, K, мы заключаем, что в точке $(x_0, u_0^{(n)})$ общая сумма в правой части (2.132) обращается в нуль и, следовательно, выполняется (2.130). Гладкая зависимость дифференциальных операторов $\mathscr{D}_\nu$ от $(x, u^{(n)})$ в случае, когда нет нехарактеристических направлений ни на каком открытом подмножестве множества $\mathscr{S}_\Delta$, следует из того, что если $\mathbf{M}(\omega) = \mathbf{M}(\omega; x, u^{(n)})$ гладко зависит от параметров $(x, u^{(n)})$, то многочлены $\sigma(\omega) = \sigma(\omega; x, u^{(n)})$ можно выбрать также гладко зависящими от тех же параметров.

Чтобы доказать обратное, достаточно заметить, что (2.130) никогда не может выполняться для системы в форме Ковалевской. В самом деле, всякая комбинация $\sum \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu$ операторов $\mathscr{D}_\nu$ k-го порядка, не всех равных нулю, всегда будет зависеть от производных порядка $n + k$, а именно от производных k-го порядка от u_{nt}^α. Таким образом, если система $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ имеет нехарактеристическое направление в точке $(x_0, u_0^{(n)})$, мы можем выбрать координаты так, что система будет в форме Ковалевской и, следовательно, (2.130) не будет выполняться. □

Пусть система дифференциальных уравнений Δ удовлетворяет предположениям леммы 2.85, так что она не является нормальной в точке $(x_0, u_0^{(n)})$. Тогда имеются условия интегрируемости вида (2.130), где некоторая линейная комбинация уравнений k-го продолжения $\Delta^{(k)}$ зависит от производных порядка не больше $n + k - 1$. На этой стадии возникают две различные возможности.

(a) Условие интегрируемости $\sum \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu = 0$ в точке $(x_0, u_0^{(n)})$ — следствие алгебраических соотношений между производными порядка $n + k - 1$ и ниже, полученных уже из $(k-1)$-го продолжения $\Delta^{(k-1)}$.

(b) Условие интегрируемости $\sum \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu = 0$ — новое условие, не являющееся алгебраическим следствием продолжения $\Delta^{(k-1)}$, оно дает дополнительное соотношение на производные порядка $n + k - 1$ и ниже.

Мы формализуем это различие в определении недоопределенной и переопределенной систем соответственно.

Определение 2.86. Пусть Δ — система дифференциальных уравнений n-го порядка. Пусть $(x_0, u_0^{(n)})$ — начальные значения, удовлетворяющие системе.

(a) Система Δ *переопределена* в точке $(x_0, u_0^{(n)})$, если для некоторого $k \geqslant 0$ существуют однородные дифференциальные операторы k-го порядка $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_q$, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация $\sum \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu = Q$ уравнений из $\Delta^{(k)}$ в точке $(x_0, u_0^{(n)})$ зависит лишь от производных от u порядка не больше $n+k-1$ и линейная комбинация Q не обращается в нуль как алгебраическое следствие продолжения $\Delta^{(k-1)}$.

(b) Система Δ *недоопределена* в точке $(x_0, u_0^{(n)})$, если (i) существует по крайней мере одно множество однородных операторов k-го порядка $D_1, \ldots, D_q$, не все из которых равны нулю, таких, что $\sum \mathscr{D}_\nu \Delta_\nu = Q$ зависит от производных не больше чем $(n+k-1)$-го порядка в точке x_0, и (ii) каковы бы ни были $D_1, \ldots, D_q$, удовлетворяющие условию (i). Q обращается в нуль как алгебраическое следствие предыдущего продолжения $\Delta^{(k-1)}$.

Короче, переопределенная система — это система, в которой имеются нетривиальные условия интегрируемости. В этом случае некоторое продолжение $\Delta^{(k-1)}$ не является локально разрешимым, поскольку мы можем найти точку $(x_0, u_0^{(n+k-1)}) \in \mathscr{S}_{\Delta^{(k-1)}}$, которая не удовлетворяет новому условию интегрируемости, получающемуся из $\Delta^{(k)}$. С другой стороны, недоопределенная система — это система, в которой уравнения некоторого продолжения $\Delta^{(k)}$ алгебраически зависимы, так что не может выполняться условие максимальности ранга. В любом случае система не является полностью невырожденной. Системы третьего типа — нормальные системы — являются тогда в определенном смысле точно определенными и, следовательно, в аналитическом случае составляют единственный класс вполне невырожденных систем; все другие либо недоопределены, либо переопределены. Это завершает доказательство теоремы 2.84. □

Пример 2.87. (a) Рассмотрим систему второго порядка (2.118). Оказывается, это переопределенная система, поскольку

$$D_y(u_{xx} + v_{xy} + v_x) - D_x(u_{xy} + v_{yy} - u_x) = v_{xy} + u_{xx}$$

зависит от производных второго порядка, но не обращается в нуль как алгебраическое следствие (2.118). С другой стороны, если опустить члены низшего порядка, то получим систему

$$u_{xx} + v_{xy} = 0, \quad u_{xy} + v_{yy} = 0,$$

соответствующую уравнениям Навье (2.127) при $\mu = 0$, $\lambda = 1$. Эта система недоопределена, поскольку комбинация

$$D_y(u_{xx} + v_{xy}) - D_x(u_{xy} + v_{yy}) \equiv 0$$

обращается в нуль тождественно. В этом последнем случае общее решение

$$u(x, y) = \varphi_y(x, y) + cx, \quad v(x, y) = -\varphi_x(x, y)$$

зависит от произвольной функции $\varphi(x, y)$. В сущности, это справедливо для всякой недоопределенной системы Δ — в записи общего решения присутствует по крайней мере одна произвольная функция, зависящая от *всех* независимых переменных. В этом случае задача Коши имеет *не*единственное решение, тогда как в случае переопределенной системы, вообще говоря, задача Коши не имеет решения вообще. Таким образом, для аналитических систем (с точки зрения задачи Коши) снова нормальные системы определены точно; переопределенные или недоопределенные системы характеризуются несуществованием или неединственностью решения соответственно.

Замечания

Система уравнений с частными производными для инвариантов локальной группы преобразований, предшествующая работе Ли, возникла в задаче Пфаффа. Ее интегрирование изучали Якоби, Майер, Дарбу, Ли и, наконец, Фробениус (Frobenius [1]), доказавший общий результат о существовании функционально независимых решений. Обсуждение классических подходов к этой задаче см. в книгах Forsyth [1; v. 1] или Carathéodory [1]. Классической является также связь с соответствующей характеристической системой обыкновенных дифференциальных уравнений; Камке (Kamke [1; v. 2, § D4] дает наиболее близкое по духу к нашему изложение вместе с другими методами интегрирования — см. также Ince [1; § 2.7].

Понятия функциональной зависимости и независимости являются классическими. Неожиданно, однако, что стандартные доказательства основной теоремы 2.16 удивительно несовершенны — обычно предполагается, что ранг дифференциала $d\zeta$ постоянен. Современное доказательство этого результата, не требующее дополнительных предположений, может быть основано на теореме Брауна (Brown [1]) (см. также Milnor [1; с. 191]), утверждающей, что множество $\{\zeta(x): x \in M, \operatorname{rank} d\zeta|_x < k\}$ *критических значений* гладкого отображения $\zeta: M \to \mathbb{R}^k$ не содержит никакого открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^k$, и теореме Уитни (см. Kahn [1; theorem 1.5]),