придал этому значения. Впоследствии ряд исследователей прошлого века, включая Делассю (Delassus [1]) и Рикье (Riquier [1]), получили довольно сложные теоремы существования для систем уравнений с частными производными, обобщающие теорему Коши—Ковалевской. Однако до появления работы Финзи Finzi [1], доказавшего важную лемму 2.85 (см. также Hadamard [1; § 25a]), не были очевидными истинные связи между условиями разрешимости и интегрируемости. Последующие определения переопределенных и недоопределеннных систем, предложенные здесь, являются новыми; см. также Olver [11]. Нормальность — более классическое понятие; см. также Виноградов [4], где приводится более технический вариант этого определения. Хотя имеются определенные связи между нашими определениями и теорией Спенсера, Голдшмидта и др. переопределенных систем уравнений с частными производными, настоящая терминология *более* точна. Сравнивая с определениями Поммаре из Pommaret [1; § V. 6.6] (которые даются только для линейных систем), мы получаем, что недоопределенные системы Поммаре всегда имеют меньше уравнений, чем неизвестных, тогда как его переопределенные системы включают *и недо*определенные, *и пере*определенные системы определения 2.86. Эти спорные вопросы тесно связаны также с вопросами о «степени определенности» систем уравнений с частными производными, возникающих в теории относительности. Они обсуждались, но не были полностью разрешены Картаном и Эйнштейном (Cartan, Einstein [1]). Вопрос о локальной разрешимости систем уравнений с частными производными тесно связан с общей теорией существования Рикье, см. Ritt [1; ch. 8], где это обсуждается. Ниренберг (Nirenberg [1; p. 15]) доказал локальную разрешимость довольно общих типов эллиптических систем. Неразрешимость, обусловленная условиями интегрируемости, была осознана в прошлом веке; гораздо более новой является неразрешимость типа Леви C^∞-систем. См. Lewy [1] и Nirenberg [1; p. 8], где приводятся примеры. Приложения этих результатов к теории групп симметрий появились ранее в работах Олвера (Olver [2], [7], [11]) и Виноградова [5].

Упражнения

2.1. Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на многообразии M.

(a) Докажите, что подмножество $\mathcal{S} \subset M$ является G-инвариантным, если и только если $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{O}$ является объединением орбит группы G.

(b) Докажите предложение 2.14.

(c) Докажите, что функция $F\colon M \to \mathbb{R}^l$ является G-инвариантной, если и только если F постоянна на орбитах группы G.

(d) Докажите, что единственными инвариантами иррационального потока на торе являются постоянные функции.

2.2. Пусть G — однопараметрическая группа преобразований $\mathbb{R}^3$, порожденная векторным полем $\mathbf{v}$ из упр. 1.11. Докажите, что G обладает только одним независимым глобальным инвариантом.

2.3. Пусть группа G действует на многообразии M, и пусть $H \subset G$ — ее подгруппа. Докажите, что если $\mathcal{S} \subset M$ — (локально) H-инвариантное подмножество и преобразование $g \in G$ определено на всем $\mathcal{S}$, то $g\cdot\mathcal{S} = \{g\cdot x: x \in \mathcal{S}\}$ (локально) инвариантно относительно сопряженной подгруппы $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}: h \in H\}$.

2.4. Система подмногообразий многообразия M называется G-инвариантной, если групповые элементы отображают любое подмногообразие этой системы в другое подмногообразие этой системы. Например, множество параллельных прямых $\{y = kx + b\}$, где k фиксировано, инвариантно относительно *любой* группы сдвигов $\mathbb{R}^2$. Докажите, что множества уровня функции $F: M \to \mathbb{R}^l$ инвариантны относительно группы преобразований G, если и только если $\mathbf{v}(F) = H(F)$ для любой инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ группы G, где H — некоторая функция, зависящая от $\mathbf{v}$, определенная на множестве значений функции F. (Eisenhart [2; p. 82]).

2.5. (a) Докажите локальный вариант предложения 2.10.

(b) Докажите глобальный вариант, используя разбиение единицы, — см. Kahn [1; theorem 1.4].

(c) Докажите предложение 2.11. (*Указание.* Используйте теорему 1.8.)

(d) Докажите, что если $R_i(x)$, $i = 1, \ldots, p$, — гладкие функции, то

$$\sum_{i=1}^{p} R_i(x)\left(x^i - c_i\right) = \sum_{i=1}^{p} a_i x^i + b$$

— аффинная функция от x, если и только если $R_i(x) = a_i + S_i(x)$, где

$$\sum_{i=1}^{p} S_i(x)\left(x^i - c_i\right) \equiv 0,$$

или, что эквивалентно,

$$S_i(x) = \sum_{j=1}^{p} S_{ij}(x)\left(x^j - c_j\right),$$

где $S_{ij} = -S_{ji}$.

2.6. Пусть $X = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$. Рассмотрим однопараметрическую группу

$$g_\varepsilon: (x, u) \longmapsto (x\cos(r\varepsilon) - u\sin(r\varepsilon),\ x\sin(r\varepsilon) + u\cos(r\varepsilon)),$$

где $r^2 = x^2 + y^2$. Пусть $u = f(x)$ — функция, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что для *любого* $\varepsilon \neq 0$ преобразованная функция $\tilde{u} = g_\varepsilon\cdot f(x)$ *не* является глобально определенной функцией для $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Как это взаимосвязано с нашей конструкцией продолжения действия группы?

2.7. Найдите определяющие уравнения группы симметрий нелинейного волнового уравнения $u_t = uu_x$ и отыщите некоторые частные группы симметрий. Изменятся ли ваши результаты, если коэффициент при u_x заменить на $f(u)$, где f — некоторая гладкая функция? (См. также пример 5.7.)

2.8. Уравнение Фоккера — Планка имеет вид

$$u_t = u_{xx} + (xu)_x = u_{xx} + xu_x + u.$$

Найдите его группу симметрий и интерпретируйте ее геометрически. Воспользуйтесь преобразованиями из этой группы, чтобы найти некоторые частные решения этого уравнения. (*Bluman, Cole* [2; § 2.10].)

2.9. Найдите группу симметрий телеграфного уравнения $u_{tt} = u_{xx} + u$. Сравните эту группу с группой симметрий эквивалентной системы первого порядка $u_t + u_x = v$, $v_t - v_x = u$.

2.10. Группы уравнений высших порядков и эквивалентных им систем первого порядка не всегда сравнимы. Например, вычислите группу симметрий двумерного волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ и сравните ее с группой симметрий эквивалентной системы $u_t = v$, $u_x = w$, $v_t = w_x$, $v_x = w_t$. Как обстоит дело с двумерным уравнением Лапласа? (Olver [2], Ибрагимов [1; § 17.1].)

*2.11. Докажите, что группа симметрий (2.65) двумерного волнового уравнения (опуская тривиальные линейные симметрии $u \mapsto \lambda u + \alpha(x, t)$) локально изоморфна группе $SO(3, 2)$ линейных изометрий $z \mapsto Rz$ пространства $\mathbb{R}^5$ с метрикой $(dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 - (dz^4)^2 - (dz^5)^2$. (См. упр. 1.29.) (Miller [3; p. 223].)

2.12. Найдите группу симметрий m-мерного уравнения теплопроводности $u_t = \Delta u$, $x \in \mathbb{R}^m$. Как она соотносится с одномерным случаем? (Goff [1].)

2.13. Обсудите группу симметрий уравнения Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = 0$, где λ — фиксированная постоянная, $x \in \mathbb{R}^3$. (Miller [3; § 3.1].)

2.14. Обсудите группу симметрий бигармонического уравнения $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$, $x \in \mathbb{R}^m$. Как она связана с группой симметрий уравнения Лапласа?

2.15. Докажите, что группа симметрий уравнений Навье—Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

где $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$, а ν — вязкость, такая же, как и группа симметрий соответствующей системы уравнений Эйлера ($\nu = 0$). (Бучнев [1], Lloyd [1].)

*2.16. (a) Уравнения Максвелла для электрического поля $E \in \mathbb{R}^3$ и магнитного поля $B \in \mathbb{R}^3$ имеют векторный вид

$$E_t = \nabla \times B, \quad B_t = -\nabla \times E, \quad \nabla \cdot E = 0, \quad \nabla \cdot B = 0.$$

Обсудите симметрии этой системы.

(b) Эквивалентная формулировка получается введением векторного потенциала A, где $B = \nabla \times A$. Заметим, что $\nabla \times (A_t + E) = 0$, следовательно, существует скалярный потенциал φ, удовлетворяющий условию $A_t + E = \nabla\varphi$. В результате получаем систему

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = \Delta\varphi.$$

Как группа симметрий этой последней системы соотносится с предыдущей формой уравнений Максвелла? (Овсянников [3; с. 394], Фущич и Никитин [1], [2*].

*2.17. Проанализируйте симметрии уравнений Навье (2.127) линейной изотропной упругости. Обсудите различие между двумерным и трехмерным случаями. Зависят ли ваши результаты от значений коэффициентов Ламе λ и μ? (Olver [9].)

2.18. *Групповая классификация.* Часто система дифференциальных уравнений, возникшая из физической задачи, содержит некоторые производные функции, точный вид которых зависит от конкретной рассматриваемой физической системы. Напрнмер, общее уравнение нелинейной теплопроводности имеет вид

$$u_t = D_x(K(u)u_x), \tag{$*$}$$

где $K(u)$ зависит от конкретиого типа моделируемой среды. Часто имеются хорошие физнческие основания для изучения тех уравнений, в которых вид этих произвольных функций допускает бóльшую группу симметрий, чем в ином случае. Проблема нахождеиия таких функций известна как *задача о групповой классификации*. Выполните групповую классификацию для нелинейного уравнения теплопроводности, доказав следующее:

(a) Если K — произвольная функция (т.е. не имеет ни одии из перечисленных ниже специальных видов), то уравнение ($*$) имеет трехпараметрическую группу симметрий.

(b) Если $K(u) = (au+b)^m$ (при $m \neq -4/3$, $a \neq 0$), то группа симметрий четырехмерна.

(c) При $K(u) = ce^{au}$ имеется пятипараметрическая группа. См. Oron, Rosenau [1*]; отметим, что этот пример в других работах приводится с ошибкой.

(d) При $K(u) = (au+b)^{-4/3}$, $a \neq 0$, имеется пятипараметрическая группа.

(e) При $K(u) = \mathrm{const}$ эта группа бескоиечиомериа. (Овсяниников [3; с. 68—73]; см. также Lie [2].)

2.19. Рассмотрим линейное однородиое уравнение с частными производными первого порядка

$$\sum_{i=1}^{p} \xi^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0. \tag{$*$}$$

Пусть $\mathbf{v} = \sum \xi^i(x)\partial_i$ — соответствующее векторное поле.

(a) Покажите, что $\mathbf{w} = \sum \eta^i(x)\partial_i$ порождает однопараметрическую группу симметрий, если и только если $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \gamma\mathbf{v}$ для иекоторой числовой фуикции $\gamma(x)$.

(b) Пусть $p = 2$. Покажите, что если поле $\mathbf{w}$ порождает нетривиальную группу симметрий (это означает, что $\mathbf{w} \neq \lambda\mathbf{v}$ ни для какой функции $\lambda(x)$), то мы можем найти общее решение уравнения ($*$) посредством квадратуры (если нам известны инварианты поля $\mathbf{w}$).

(c) Что происходит при $p \geqslant 3$?

(Lie [5; p. 434]).

2.20. Докажите, что система $u_x = 0$, $u_y + xu_z = 0$ не является локально разрешимой. Докажите, что группа, порожденная векторным полем $\mathbf{v} = x\partial_z$, является группой симметрий, но поле $\mathbf{v}$ не удовлетворяет инфинитезимальному критерию (2.120).

***2.21.** Пусть дифференциальиое уравиеиие $P(x, u^{(n)}) = 0$, $x \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}$, допускает бесконечномерную группу симметрий с образующими $\rho(x)\partial_u$, где ρ — произвольное решение лииейного дифференциальиого уравиеиия $\Delta[\rho]=0$. Докажите, что P эквивалентно неоднородиому варианту того же самого уравнения $\Delta[u] = f(x)$. (Kumei, Bluman [1].)

***2.22.** (a) Докажите, что дифференциальное уравнение $P(x, u^{(n)}) = 0$ эквивалеитно *линейному* дифференциальному уравнению $\Delta[\tilde{u}] = f(\tilde{x})$ относительно замеи переменных $x = \Xi(\tilde{x}, \tilde{u})$, $u = \Phi(\tilde{x}, \tilde{u})$, если и только если оно допускает бесконечномерную группу симметрий с образующими вида

$$\mathbf{v} = \rho(\tilde{x}) \left\{ \frac{\partial \Xi}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial}{\partial u} \right\},$$

где $\rho(x, u)$ — произвольное решение линейного дифференциального уравнения. (*Указание.* Сделайте замену переменных и примените предыдущее упражнение.)

(b) Обсудите в свете этого результата наш вывод преобразования Хопфа—Коула из примера 2.42.

(c) Примените эту технику, чтобы линеаризовать уравнение Томаса

$$u_{xt} + \alpha u_t + \beta u_x + \gamma u_x u_t = 0,$$

возникающее при изучении процессов химического обмена.

(d) Примените эту технику к потенциальной форме $u_t = u_x^{-2} u_{xx}$ нелинейного уравнения диффузии $v_t = D_x(v^{-2}v_x)$, играющего важную роль в физике твердого тела и в теории течения жидкости через пористую среду. (Kumei, Bluman [1], Whitham [2; c.], Rosen [1], Fokas, Yortsos [1], Bluman, Kumei [1].)

***2.23.** Два эволюционных уравнения $u_t = P(x, u^{(n)})$ и $v_s = Q(y, v^{(m)})$ называются связанными, если существует замена переменных

$$t = T(s, y), \quad x = \Xi(s, y), \quad u = \Phi(s, y, v),$$

переводящая одно уравнение в уравнение, эквивалентное другому.

(a) Докажите, что если уравнение $u_t = P$ связано с уравнением $v_s = Q$, то векторное поле

$$\mathbf{v} = \frac{\partial T}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Xi}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial}{\partial u}$$

— симметрия уравнения $u_t = P$.

(b) Докажите, что если

$$\mathbf{v} = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u} \qquad (*)$$

— симметрия уравнения $u_t = P$, то найдется связанное эволюционное уравнение $v_s = Q$, такое, что в новых координатах $\mathbf{v} = \partial_s$. (На самом деле для большого класса эволюционных уравнений (*) — наиболее общая симметрия, так что мы имеем взаимно однозначное соответствие между связанными эволюционными уравнениями и симметриями.)

(c) Найдите преобразование, связывающее уравнение Кортевега—де Фриза $u_t = u_{xxx} + uu_x$ и уравнение $v_s = v_{yyy} + vv_y + 1$. (Kalnins, Miller [2].)

2.24. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Найдите наиболее общее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, инвариантное относительно группы растяжений $(x, u) \longmapsto (\lambda x, \lambda^{\alpha} u)$, $\lambda > 0$. Как эти уравнения разрешить квадратурой?

2.25. Докажите, что уравнение второго порядка $u_{xx} = xu + \operatorname{tg}(u_x)$ *не имеет* непрерывных групп симметрий! (Cohen [1; p. 206].)

2.26. (a) Докажите, что группа симметрий уравнения $u_{xx} = 0$ восьмимерна и порождается векторными полями

$$\partial_x, \quad x\partial_x, \quad u\partial_x, \quad xu\partial_x + u^2\partial_u,$$
$$\partial_u, \quad x\partial_u, \quad u\partial_u, \quad x^2\partial_x + xu\partial_u.$$

Докажите, что она является подгруппой проективной группы плоскости, состоящей из преобразований вида

$$(x, u) \longmapsto \left(\frac{ax + bu + c}{\alpha x + \beta u + \gamma}, \frac{dx + eu + f}{\alpha x + \beta u + \gamma}\right),$$

где $a\beta - b\alpha \neq 0$, $d\beta - e\alpha \neq 0$. Интерпретируйте геометрически эти преобразования.

(b) Докажите, что группа симметрий уравнения $d^n u/dx^n = 0$ при $n \geqslant 3$ $(n+4)$-мериа. (Lie [3], Markus [1].)

2.27. Докажите, что одно обыкновенное дифференциальное уравиеиие n-го порядка имеет, самое большее, $(n+4)$-параметрическую группу симметрий при $n \geqslant 3$. (Lie [3], Gonzalez-Gascon, Gonzalez-Lopez [1].)

2.28. Докажите, что $SL(2)$—неразрешимая группа Ли. Что можно сказать о группе $SO(3)$?

2.29. Рассмотрим обыкновенное дифференпиальное уравнение Δ: $u_x^2 - 4u = 0$.

(a) Докажите, что Δ имеет всюду максимальный ранг.

(b) Докажите, что $u_{xxx}^2 = 0$ — комбииация уравнений из $\Delta^{(5)}$, но $u_{xxx} = 0$ *не является* такой комбинацией. (Ritt [1; p. 79].)

*2.30. *Уравнения, инвариантные относительно «нелокальных симметрий».* Чтобы читатель не думал, что все методы интегрирования обыкиовенных дифференциальных уравиений сводятся к инвариантности уравиения относительно иекоторой группы симметрнй представленного здесь вида, мы предлагаем следующую предостерегающую задачу.

(a) *Экспоненциальное векторное поле* — это формальное выражение вида

$$\mathbf{v}^* = e^{\int P(x,u)\,dx}\left(\xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x, u)\frac{\partial}{\partial u}\right),$$

где $\int P(x, u)\,dx$ является формально интегралом функции, а $u = f(x)$ — выбраниая нами функция. Таким образом,

$$D_x\left[\int P(x, u)\,dx\right] = P(x, u), \quad D_x^2\left[\int P(x, u)\,dx\right] = D_x P$$

и т. д. Подстановка $\mathbf{v}^*$ в формулу продолжеиия (2.50) $\left(\text{с заменой } \xi \text{ на } e^{\int P\,dx}\xi,\ \varphi \text{ на } e^{\int P\,dx}\varphi\right)$ доказывает, что

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}^* = e^{\int P(x,u)\,dx}\cdot \mathbf{v}^{(n)},$$

где $\mathbf{v}^{(n)}$ — обычное векторное поле на $M^{(n)}$. Например, если $\mathbf{v}^* = e^{\int u\,dx}\partial_u$, то

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}^* = \sum_{k=0}^{n} D_x^k\left[e^{\int u\,dx}\right]\frac{\partial}{\partial u_k} =$$

$$= e^{\int u\,dx}\left[\partial_u + u\partial_{u_x} + (u_x + u^2)\,\partial_{u_{xx}} + \dots\right].$$

(b) Докажите, что дифференциальные инварианты для экспоиенциального векторного поля можно выбрать в виде

$$y = \eta(x, u), \quad w = \zeta(x, u, u_x), \quad w_n = d^n w/dy^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

точно так же, как для обычного векторного поля. Каковы дифференциальные инварианты третьего порядка для $e^{\int u\,dx}\partial_u$?

(c) Докажите, что обыкновенное дифференциальное уравнение $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$, являющееся инвариантиым относительно экспоненциального векторного поля:

$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}^*(\Delta)=0$ при $\Delta=0$, допускает понижение порядка на единицу. Используйте это, чтобы свести уравнение

$$u_{xx}-uu_x=H\left(x,\ u_x-\frac{1}{2}u^2\right)$$

к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка.

(d) Обратно, докажите, что если порядок Δ можно понизить на единицу подстановкой $v=\gamma(x,u,u_x)$, то Δ инвариантно относительно экспоненциального векторного поля

$$\mathbf{v}^*=\exp\left[-\int\frac{\partial\gamma/\partial u}{\partial\gamma/\partial u_x}\,dx\right]\frac{\partial}{\partial u}.$$

(e) Как могут на практике возникнуть эти симметрии? Рассмотрим «неправильную» процедуру понижения порядка, использованную в примере 2.62, чтобы получить (2.109). Нам бы хотелось сказать, что другая симметрия $\mathbf{v}$ уравнения (2.108) остается симметрией уравнения (2.109). Однако $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}=x\partial_u+\partial_{u_x}=x(\partial_y+\partial_z)$ не является корректно определенным векторным полем в координатах (y,z). Докажите, что $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}$ является *экспоненциальным* векторным полем в этих координатах (*указание*: покажите, что $x=\exp\left(\int z^{-1}\,dy\right)$) и, кроме того, остается симметрией уравнения (2.109). Воспользуйтесь этой информацией, чтобы завершить интегрирование уравнения (2.108).

2.31. Пусть $\mathrm{M}(\omega)$ — матрица размера $q\times q$ однородных многочленов n-й степени от ω. Докажите, что $\det\mathrm{M}(\omega)=0$ для всех ω, если и только если найдется вектор $\sigma(\omega)$ однородных многочленов, такой, что $\mathrm{M}(\omega)\sigma(\omega)=0$ для всех ω. Какова минимальная степень многочленов, входящих в такой вектор σ? Обобщите это на случай, когда многочлены, входящие в M, однородны, но не одной и той же степени. [Finzi [1].)

2.32. Всегда ли является нормальной система эволюционных уравнений?

2.33. Пусть $\Delta_\nu(x,u^{(n)})=0$, $\nu=1,\ldots,l$, — вполне невырожденная система дифференциальных уравнений. Докажите, что функция $Q(x,u^{(m)})$ обращается в нуль на всех решениях $u=f(x)$ системы Δ, если и только если существуют дифференциальные операторы $\mathcal{D}_\nu=\sum_J P_\nu^J(x,u^{(m)})D_J$, $\nu=1,\ldots$ $\ldots,l$, такие, что $Q=\sum_\nu\mathcal{D}_\nu\cdot\Delta_\nu$ для всех функций $u=f(x)$. (*Указание*. Воспользуйтесь предложением 2.10.)