соответствующую уравнениям Навье (2.127) при $\mu = 0$, $\lambda = 1$. Эта система недоопределена, поскольку комбинация

$$D_y(u_{xx} + v_{xy}) - D_x(u_{xy} + v_{yy}) \equiv 0$$

обращается в нуль тождественно. В этом последнем случае общее решение

$$u(x, y) = \varphi_y(x, y) + cx, \quad v(x, y) = -\varphi_x(x, y)$$

зависит от произвольной функции $\varphi(x, y)$. В сущности, это справедливо для всякой недоопределенной системы Δ — в записи общего решения присутствует по крайней мере одна произвольная функция, зависящая от *всех* независимых переменных. В этом случае задача Коши имеет *не*единственное решение, тогда как в случае переопределенной системы, вообще говоря, задача Коши не имеет решения вообще. Таким образом, для аналитических систем (с точки зрения задачи Коши) снова нормальные системы определены точно; переопределенные или недоопределенные системы характеризуются несуществованием или неединственностью решения соответственно.

Замечания

Система уравнений с частными производными для инвариантов локальной группы преобразований, предшествующая работе Ли, возникла в задаче Пфаффа. Ее интегрирование изучали Якоби, Майер, Дарбу, Ли и, наконец, Фробениус (Frobenius [1]), доказавший общий результат о существовании функционально независимых решений. Обсуждение классических подходов к этой задаче см. в книгах Forsyth [1; v. 1] или Carathéodory [1]. Классической является также связь с соответствующей характеристической системой обыкновенных дифференциальных уравнений; Камке (Kamke [1; v. 2, § D4] дает наиболее близкое по духу к нашему изложение вместе с другими методами интегрирования — см. также Ince [1; § 2.7].

Понятия функциональной зависимости и независимости являются классическими. Неожиданно, однако, что стандартные доказательства основной теоремы 2.16 удивительно несовершенны — обычно предполагается, что ранг дифференциала $d\zeta$ постоянен. Современное доказательство этого результата, не требующее дополнительных предположений, может быть основано на теореме Брауна (Brown [1]) (см. также Milnor [1; с. 191]), утверждающей, что множество $\{\zeta(x)\colon x \in M, \operatorname{rank} d\zeta|_x < k\}$ *критических значений* гладкого отображения $\zeta\colon M \to \mathbb{R}^k$ не содержит никакого открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^k$, и теореме Уитни (см. Kahn [1; theorem 1.5]), утверждающей, что всякое замкнутое подмножество $K \subset \mathbb{R}^k$ можно задать как множество нулей $K = \{z\colon F(z) = 0\}$ некоторой гладкой функции $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Чтобы доказать теорему 2.16, мы, предполагая, что всюду $\operatorname{rank} d\zeta < k$, полагаем тогда $K = \zeta[\bar{U}]$, где $U \subset M$ — произвольное открытое множество с компактным замыканием, и выбираем функцию F, как в теореме Уитни. Согласно теореме Брауна, функция F не обращается в нуль ни на каком открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^k$ и, следовательно, удовлетворяет требованиям определения 2.15 функциональной независимости. (Это простое доказательство, насколько мне известно, в литературе отсутствует!) Современное доказательство теоремы 2.16, основанное на теореме Сарда, имеется в работе Narasimhan [1*; theorem 1.4.14].

В случае аналитических систем условие максимальности ранга в теореме 2.8 можно ослабить, потребовав его выполнения только «почти всюду» на подмногообразии $\mathcal{S}_F$, допуская, таким образом, наличие особенностей. Этот результат, который нетрудно доказать, тем не менее, кажется, не обобщается на случай C^∞. Аналогичное обобщение теоремы 2.31 тоже может быть доказано для аналитических систем дифференциальных уравнений, допускающих особенности у подмногообразия $\mathcal{S}_\Delta$.

Первоначально Ли создал свою теорию непрерывных групп специально для изучения дифференциальных уравнений. Но он хорошо сознавал применимость своего мощного инфинитезимального метода к изучению инвариантов и алгебраических уравнений. Об алгебраической и геометрической сторонах его исследований см. Lie [4]. Историческое значение исследований Ли и их влияние рассмотрены в работах Hawkins [1] и Wussing [1; § III. 3]. Бóльшая часть работ Ли по обыкновенным дифференциальным уравнениям опубликована в собрании его статей; книга Lie [5] на самом деле не отражает всей полноты его открытий. Ключом к подходу Ли к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка была предложенная им полная классификация (с точностью до замены переменной) всех групп преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$. Пользуясь ею, он смог исчерпывающим образом перечислить все возможные понижения порядка для одного обыкновенного дифференциального уравнения; см. Lie [3], где приводятся эти результаты вместе с большим количеством конкретных интересных примеров. Результаты этой статьи включают результаты § 2.5 о многопараметрических группах симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка; все другие изложения этих вопросов в литературе, включая работы Cohen [1], Ince [1; ch. 3], Markus [1] и Овсянников [3; § 8], относятся только к случаям однопараметрических и двупараметрических групп. Тем не менее, теорема 2.68 о разрешимых группах симметрий систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка принадлежит Бьянки (Bianchi [1; § 167]); см. также Eisenhart [2; § 36]. Этот результат, очевидно, включает в себя соответствующую теорему 2.64 об уравнениях высшего порядка, но я не смог найти явную формулировку последнего результата в литературе. См. также Posluszny, Rubel [1*] по поводу дальнейших исследований обыкновенных дифференциальных уравнений, основанных на теории групп «движений» дифференциального уравнения.

Бóльшая часть исследований Ли о группах симметрий уравнений с частными производными относилась к линейным системам уравнений первого порядка, которые в силу метода характеристик по существу эквивалентны системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, в статьях Lie [2] и Lie [6] Ли рассматривал симметрии уравнений с частными производными высших порядков. В работе Lie [2; part 1] Ли вычисляет группы симметрий нескольких уравнений с частными производными второго порядка от двух независимых переменных, включая уравнение теплопроводности, группа симметрий которого появляется в конце § 13. Эта группа была вычислена позже также Аппелем (Appell [1]) и, в случае высших размерностей, Гоффом (Goff [1]). Исследования Ли, связанные с уравнениями с частными производными высших порядков, однако, вообще не были развиты другими исследователями. Одна из возможных причин состоит в том, что в отличие от случая обыкновенных дифференциальных уравнений знание группы симметрий системы уравнений с частными производными *не* помогает найти общее решение системы. Впрочем, одна увлекательная возможность — это «метод разложения группы» из работы Vessiot [1]; см. Овсянников [3, § 26], где имеется современное изложение. Помимо этого я знаю лишь раннюю работу о симметриях уравнений с частными производными Bateman [1] и статьи Cunningham [1] и Carmichael [1] о симметриях волнового уравнения и уравнений Максвелла. Если не считать их, несмотря на наличие теоремы Нётер, после 1918 г. исследования по теории и приложениям групп симметрий к уравнениям с частными производными зашли в тупик; это продолжалось до появления работы Биркгофа Birkhoff [2] по гидродинамике, с которой начали возрождаться групповые методы в изучении важных уравнений с частными производными математической физики. В конце 50-х и в 60-х годах в изучении групп симметрий многих таких систем большой прогресс был достигнут советской школой под руководством Л. В. Овсянникова [1], [2]. Интерес к этим методам на Западе возрос благодаря работам Bluman, Cole [1], [2] и книге Ames [1], вылившись в большую волну исследований в этой области в последние 15 лет.

Основной метод вычисления групп симметрий, использующий формулу продолжения для их инфинитезимальных образующих, восходит к Ли. Действительно, рекурсивный вид (2.44) формулы продолжения появился в работах Lie [2; § 11], [3; § 1]; см. также Eisenhart [2; equation (28.12)]. Однако явная формула (2.39) впервые появилась в работе Olver [2]. Другой вид (2.50), использующий характеристику такого векторного поля, более подробно будет обсуждаться в гл. 5; в книге Seshadri, Na [1; § 3.2(e)] он применен как иной способ вычисления простых симметрий. В этой книге я предпочел воспользоваться наиболее упрощенным вариантом теории струй, обязанной своим современным видом Эресманну (Ehresmann [1], [2]), которая позволяет яснее очертить геометрические основания этой теории продолжения. Интересное изложение более абстрактного дифференциально-геометрического подхода к теории струй можно найти в книге Golubitsky, Guillemin [1]; см. также § 3.5. Излишне говорить, что все изложенные здесь результаты допускают множество других переформулировок, использующих все более и более техничный и абстрактный математический аппарат — некоторые исследователи получают удовольствие от бесцельных упражнений. Сам результат, конечно, остается тем же, независимо от того, в какие одежды его стараются вырядить; несчастный читатель этих вариантов оказывается совершенно сбитым с толку, не узнав ничего о легкости и эффективности приложений этой теории к конкретным задачам. Я надеюсь, что настоящая книга в основном избежала таких ловушек и что использование локальных координат и иллюстративных примеров действительно позволит читателю, интересующемуся приложениями, многому научиться.

К настоящему времени литература с примерами явного вычисления групп симметрий отдельных систем дифференциальных уравнений стала слишком обширной, чтобы пытаться привести ее здесь. Читатель может найти ссылки в книге Овсянникова [3], а также обширную (это еще не означает, что полную) библиографию в работе Steinberg [2]. Вычисление группы симметрий уравнений Эйлера приводится в работе Бучнева [1]. Вывод преобразования Коула — Хопфа, изначально на самом деле полученного Форсайтом (Forsyth [1; v. 6, p. 102]), — см. также книгу Whitham [2; гл. 4], в которой используются методы теории групп,— можно найти в работе Kumei, Bluman [1] вместе с обобщениями[1]). Непосредственные вычисления для на-

[1]) В работах Свинолупов [1**], Соколов [1**] рассмотрены системы уравнений типа уравнеивя Бюргерса. — *Прим. ред.*

хождения группы симметрий данной системы дифференциальных уравнений достаточно механические и поэтому поддаются *выполнению на компьютере с помощью программ символьных* вычислений. Разработано несколько вариантов таких программ, в том числе содержащиеся в работах Rosenau, Schwarzmeier [1], Steinberg [1], Rosencrans [2] и Champagne, Winternitz [1] (в системе MACSYMA) и Schwarz [1] (с системе REDUCE). В русской литературе также имеются ссылки на такие программы; см. Овсянников [3; с. 89], где приведен список работ.

Имеется несколько других заслуживающих упоминания подходов к теории групп симметрий дифференциальных уравнений. Для линейных уравнений Калнинс, Миллер, Бойер и др. (см. Miller [2], [3]) предпочли для определения симметрий использовать дифференциальные операторы, а не векторные поля. Связь их метода с методом Ли разъясняется в § 5.2. В книге Ames [1] *предложен метод, основанный на самих группах преобразований*, без введения инфинитезимальных образующих, но, кажется, такой подход имеет ограниченную применимость. Сешадри и На (Seshadri, Na [1]) заметили, что можно значительно упростить вычисления симметрий, если a priori наложить ограничения на вид группы, например, предположить, что это группа проектируемых преобразований или масштабная группа. См. Rubel, Taylor [1*] и Rubel [1*] в связи с другим методом, основанным на понятии «движений» в теории дифференциальных уравнений. Подход, основанный на дифференциальных формах, предложен в работе Harrison, Estabrook [1] и развит в книге Edelen [1], где описаны также программы символьных вычислений, основанные на этом методе; см., кроме того, Gragert, Kersten, Martini [1]. Результаты здесь такие же, как и при нашем подходе, однако их метод обладает недостатком — прежде чем приступать к вычислению симметрий, нужно сначала выразить систему уравнений с частными производными как условия интегрируемости семейства дифференциальных форм. Тем не менее, этот метод может быть полезен, особенно для построения преобразования Бэклунда. Распространение нашего инфинитезимального метода на задачи со свободными границами можно найти в работе Benjamin, Olver [1].

Лишь недавно стало ясно, что более технические вопросы, поставленные в последнем параграфе этой главы, важны для симметрийного подхода. Связь между существованием решений и теорией характеристик восходит к работе Ковалевской [1]. (Наше изложение этой теории наиболее близко соответствует изложению Петровского [1].) Бурле (Bourlet [1]) первым указал на существование систем, к которым неприменима теорема Коши — Ковалевской, независимо от выбора направления, но не придал этому значения. Впоследствии ряд исследователей прошлого века, включая Делассю (Delassus [1]) и Рикье (Riquier [1]), получили довольно сложные теоремы существования для систем уравнений с частными производными, обобщающие теорему Коши—Ковалевской. Однако до появления работы Финзи Finzi [1], доказавшего важную лемму 2.85 (см. также Hadamard [1; § 25a]), не были очевидными истинные связи между условиями разрешимости и интегрируемости. Последующие определения переопределенных и недоопределеннных систем, предложенные здесь, являются новыми; см. также Olver [11]. Нормальность — более классическое понятие; см. также Виноградов [4], где приводится более технический вариант этого определения. Хотя имеются определенные связи между нашими определениями и теорией Спенсера, Голдшмидта и др. переопределенных систем уравнений с частными производными, настоящая терминология *более* точна. Сравнивая с определениями Поммаре из Pommaret [1; § V. 6.6] (которые даются только для линейных систем), мы получаем, что недоопределенные системы Поммаре всегда имеют меньше уравнений, чем неизвестных, тогда как его переопределенные системы включают *и недо*определенные, *и пере*определенные системы определения 2.86. Эти спорные вопросы тесно связаны также с вопросами о «степени определенности» систем уравнений с частными производными, возникающих в теории относительности. Они обсуждались, но не были полностью разрешены Картаном и Эйнштейном (Cartan, Einstein [1]). Вопрос о локальной разрешимости систем уравнений с частными производными тесно связан с общей теорией существования Рикье, см. Ritt [1; ch. 8], где это обсуждается. Ниренберг (Nirenberg [1; p. 15]) доказал локальную разрешимость довольно общих типов эллиптических систем. Неразрешимость, обусловленная условиями интегрируемости, была осознана в прошлом веке; гораздо более новой является неразрешимость типа Леви C^∞-систем. См. Lewy [1] и Nirenberg [1; p. 8], где приводятся примеры. Приложения этих результатов к теории групп симметрий появились ранее в работах Олвера (Olver [2], [7], [11]) и Виноградова [5].

Упражнения

2.1. Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на многообразии M.

(a) Докажите, что подмножество $\mathcal{S} \subset M$ является G-инвариантным, если и только если $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{O}$ является объединением орбит группы G.

(b) Докажите предложение 2.14.

(c) Докажите, что функция $F\colon M \to \mathbb{R}^l$ является G-инвариантной, если и только если F постоянна на орбитах группы G.