3. Решения, инвариантные относительно группы

Когда сталкиваются со сложной системой уравнений с частными производными, возникающей из некоторой важной для физики задачи, обнаружение хоть каких-нибудь точных решений представляет большой интерес. Точные решения можно использовать как модели для физических экспериментов, как эталон для проверки численных методов и т. д. Они часто отражают асимптотику или доминирующее поведение более общих типов решений. Методы, используемые для нахождения инвариантных относительно группы решений, обобщающие известную технику нахождения автомодельных решений, доставляют систематический вычислительный метод для определения больших классов частных решений. Эти инвариантные относительно группы решения характеризуются своей инвариантностью относительно некоторой группы симметрий уравнений с частными производными; чем симметричнее решение, тем легче оно строится. Основная теорема об инвариантных относительно группы решениях, грубо говоря, утверждает, что все решения, инвариантные относительно данной r-параметрической группы симметрий данной системы могут быть найдены при решении системы дифференциальных уравнений, содержащей на r меньше независимых переменных, чем исходная система. В частности, если число параметров на 1 меньше, чем число независимых переменных физической системы: $r = p - 1$, то все решения, инвариантные относительно соответствующей группы, могут быть найдены с помощью решения системы *обыкновенных дифференциальных уравнений*. Так, труднообозримое множество уравнений с частными производными сводится к более простой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, и у нас появляются шансы найти точное решение. В практических приложениях эти инвариантные относительно группы решения можно в большинстве случаев эффективно построить, и часто они оказываются единственными известными точными решениями.

Эта глава построена так, что ориентирующийся на приложения читатель может сразу же изучить практическое осуществление метода построения решений, инвариантных относительно группы, не копаясь в теоретических обоснованиях, необходимых для объяснения этого метода. В § 3.1 излагается метод, основанный на построении инвариантов данного действия группы. Он иллюстрируется в § 3.2 рядом интересных примеров, включая уравнение теплопроводности, уравнение Кортевега — де Фриза и уравнения Эйлера для течения идеальной жидкости. Дальнейшие примеры указаны в упражнениях в конце главы, там же приведены ссылки на литературу. В третьем параграфе рассматривается задача классификации решений, инвариантных относительно группы. Почти всегда имеется бесконечное число различных групп симметрий, которые можно применять для нахождения инвариантных решений, поэтому для достижения полного понимания того, какие именно решения могут быть полезны, существенно уметь определять, какие группы дают принципиально разные типы инвариантных решений. Поскольку всякое преобразование из полной группы симметрий будет переводить решения в другие решения, нам нужно найти лишь те инвариантные решения, которые не связаны преобразованием из полной группы симметрий. Эта задача классификации может быть решена с помощью присоединенного представления группы симметрий на ее алгебре Ли. Она включает аналогичную классификацию различных подгрупп группы симметрий.

Оставшиеся два параграфа этой главы посвящены строгому изложению теоретического обоснования метода нахождения инвариантных относительно группы решений. Их благополучно могут пропустить те, кого интересуют лишь приложения этой техники. Строгое глобальное геометрическое оформление этих результатов осуществляется с помощью понятия фактормногообразия некоторого многообразия по некоторой регулярной группе преобразований. Каждая точка факторmногообразия соответствует орбите этой группы, так что фактормногообразие по существу имеет размерность на r меньше, где r — число параметров группы. Объекты на исходном многообразии, инвариантные относительно группы, будут иметь естественные аналоги на фактормногообразии, которые полностью их характеризуют. В частности, для системы уравнений с частными производными, инвариантной относительно данной группы преобразований, соответствующая редуцированная система дифференциальных уравнений на фактормногообразии будет иметь поэтому на r меньше независимых переменных. Решения редуцированной системы будут отвечать решениям исходной системы, инвариантным относительно группы. Одна трудность этого метода состоит в том, что, даже когда исходное многообразие является открытым подмножеством некоторого евклидова пространства, фактормногообразие никаким естественным способом не представляется открытым подмножеством «редуцированного» евклидова пространства, так что наши предыдущие построения пространств струй и групп симметрий нельзя применить сразу. Здесь имеются два приемлемых пути. Самое простое было бы ограничиться подходящими малыми открытыми подмножествами евклидова пространства. Тогда фактормногообразие тоже можно сделать подмножеством некоторого евклидова пространства посредством выбора на нем новых независимых и зависимых переменных. Однако при таком подходе конструкции становятся весьма неприятным образом координатно зависимыми и много теряют в своей изначальной простоте. Более абстрактный подход, принятый нами, состоит в обобщении наших конструкций пространств струй, продолжений и дифференциальных уравнений на произвольные гладкие многообразия. Он осуществляется «пополнением» обычных пространств струй так, что они включают «функции», определенные на произвольных p-мерных подмногообразиях. Эти «функции» могут быть многозначными или иметь бесконечные производные. Хотя этот метод требует изрядного уровня абстракции и математической изощренности, чтобы дать определения, главные результаты об инвариантных относительно группы решениях сохраняют свой сильный геометрический дух и в том, что касается доказательств, становятся практически тривиальными. Более сложная технически локальная координатная картина непосредственно получается тогда из этой абстрактной переформулировки процедуры редукции.

3.1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ

Рассмотрим систему уравнений с частными производными Δ, определенную на открытом подмножестве $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ пространства независимых и зависимых переменных. Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на M. Грубо говоря, решение $u = f(x)$ системы называется G-инвариантным, если оно остается неизменным при всех преобразованиях из группы G. Это означает, что для любого $g \in G$ функции f и (если она определена) $g \cdot f$ совпадают в их общей области определения. Например, фундаментальное решение $u = \log(x^2 + y^2)$ двумерного уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ инвариантно относительно однопараметрической группы вращений $SO(2)$: $(x, y, u) \mapsto (x \cos\theta - y \sin\theta,\ x \sin\theta + y \cos\theta,\ u)$, действующей на независимые переменные x, y. Точнее, мы можем определить

G-инвариантное решение[1]) системы уравнений с частными производными как решение $u=f(x)$, график $\Gamma_f \equiv \{(x, f(x))\} \subset M$ которого — локально G-инвариантное подмножество множества M; см. определение 2.12.

Если G — группа симметрий системы уравнений с частными производными Δ, то при выполнении некоторых дополнительных предположений о регулярности действия группы G мы можем найти все G-инвариантные решения системы Δ, решив редуцированную систему дифференциальных уравнений, обозначаемую через Δ/G, которая будет содержать меньше независимых переменных, чем исходная система Δ. Чтобы увидеть, как осуществляется редукция, мы начнем с упрощающего предположения, что группа G действует на M *проектируемо*. Это означает, что все преобразования из G имеют вид $(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Xi_g(x), \Phi_g(x, u))$, т. е. изменения независимых переменных x не зависят от зависимых переменных u. (Более общо, действия непроектируемых групп будут рассмотрены позже, но основная техника такая же.) Тогда определено проектируемое действие группы $\tilde{x} = g \cdot x = \Xi_g(x)$ на любом открытом подмножестве $\Omega \subset X$. Мы делаем предположение о регулярности, состоящее в том, что и действие группы G на M, и проектируемое действие группы G на Ω являются *регулярными* в смысле определения 1.26 и что орбиты обоих этих действий имеют одну и ту же размерность s, где s строго меньше, чем p — число независимых переменных системы. (Случай $s = p$ совершенно тривиален, тогда как при $s > p$ не существует G-инвариантных функций. Обычно s будет таким же, как и размерность самой группы G, но это не всегда так.) При этих предположениях из теоремы 2.17 следует, что локально имеется $p—s$ функционально независимых инвариантов $y^1 = \eta^1(x), \ldots, y^{p-s} = \eta^{p-s}(x)$ проектируемого действия группы на $\Omega \subset X$. Каждая из этих функций является также инвариантом полного действия группы G на M, и, кроме того, мы можем найти q дополнительных инвариантов действия G на M вида $v^1 = \zeta^1(x, u), \ldots, v^q = \zeta^q(x, u)$, которые вместе с $\eta^1, \ldots, \eta^{p-s}$ доставляют полный набор $p+q-s$ функционально независимых инвариантов для G на M. Мы кратко записываем этот полный набор инвариантов в виде

$$y = \eta(x), \quad v = \zeta(x, u). \tag{3.1}$$

В построении редуцированной системы дифференциальных уравнений для G-инвариантных решений системы Δ инвариан-

[1]) Такие решения часто называют *инвариантно групповыми решениями.— Прим. ред.*

ты y будут играть роль новых независимых переменных, а инварианты v — роль новых зависимых переменных. Заметим, в частности, что число независимых переменных $y^1, \ldots, y^{p-s}$, которые появятся в этой редуцированной системе, на s меньше, где s — размерность орбит группы G.

Далее, имеется взаимно однозначное соответствие между G-инвариантными функциями $u = f(x)$ на M и произвольными функциями $v = h(y)$ в новых переменных v, y. Чтобы объяснить это соответствие, мы начнем с обращения к теореме о неявной функции и разрешим систему $y = \eta(x)$ от $p-s$ независимых переменных, скажем, $\tilde{x} = (x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p-s}})$, относительно новых переменных $y^1, \ldots, y^{p-s}$ и остальных s старых независимых переменных, обозначаемых $\hat{x} = (x^{j_1}, \ldots, x^{j_s})$. Таким образом, мы имеем решение

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y), \tag{3.2}$$

где γ — некоторая корректно определенная функция. Первые $p-s$ из старых независимых переменных называются *главными переменными* $\tilde{x}$, а остальные s из этих переменных — *параметрическими переменными* $\hat{x}$, поскольку они будут на самом деле входить во все последующие формулы как параметры. То, как переменные x разделяются на главные и параметрические, определяется лишь требованием, чтобы подматрица $(\partial\eta^j/\partial\tilde{x}^i)$ размера $(p-s)\times(p-s)$ полной матрицы Якоби $\partial\eta/\partial x$ была обратима, т. е. чтобы была применима теорема о неявной функции; в остальных отношениях выбор совершенно произволен. Нам нужно сделать дальнейшее предположение о *трансверсальности* действия группы G на M, ср. (3.35), что позволит нам разрешить другую систему инвариантов $v = \zeta(x, u)$ от всех зависимых переменных $u^1, \ldots, u^q$ через $x^1, \ldots, x^p$ и $v^1, \ldots, v^q$ и, следовательно, через новые переменные y, v и параметрические переменные $\hat{x}$:

$$u = \tilde{\delta}(x, v) = \tilde{\delta}(\hat{x}, \gamma(\hat{x}, y), v) \equiv \delta(\hat{x}, y, v) \tag{3.3}$$

вблизи любой точки $(x_0, u_0) \in M$.

Если $v = h(y)$ — произвольная гладкая функция, то (3.3) в совокупности с (3.1) дает соответствующую G-инвариантную функцию на M вида

$$u = f(x) = \delta(\hat{x}, \eta(x), h(\eta(x))). \tag{3.4}$$

Обратно, если $u = f(x)$ — произвольная G-инвариантная функция на M, то не слишком трудно показать, что обязательно существует функция $v = h(y)$, такая, что f и соответствующая функция (3.4) локально совпадают. Таким образом, мы видим, как G-инвариантность функций служит для уменьшения числа переменных, от которых они зависят.

Нас интересует теперь, как найти все G-инвариантные решения некоторой системы уравнений с частными производными

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l.$$

Иными словами, мы хотим узнать, когда функция вида (3.4), соответствующая функции $v = h(y)$, будет решением системы Δ. Это будет налагать определенные ограничения на функцию h; они основаны на вычислении формул для производных функции вида (3.4) по x через производные функции $v = h(y)$ по y и подстановке их в систему дифференциальных уравнений Δ. Таким образом, нам нужно знать, как связаны производные функций $v = h(y)$ с производными соответствующей G-инвариантной функции $u = f(x)$. Нужно просто применить цепное правило. Дифференцирование (3.4) по x приводит к системе уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\delta(\hat{x}, y, v)] = \frac{\partial \delta}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \delta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

поскольку $y = \eta(x)$. Здесь $\partial u/\partial x$ и т. д. обозначают матрицы Якоби производных первого порядка указанных переменных. Кроме того, используя (3.2), мы можем переписать $\partial\eta/\partial x$ через y и параметрические переменные $\hat{x}$. Таким образом, мы получаем уравнение вида

$$\partial u/\partial x = \delta_1(\hat{x}, y, v, \partial v/\partial y),$$

выражающее производные первого порядка произвольной G-инвариантной функции u по x через y, v, первые производные от v по y и параметрические переменные $\hat{x}$. Продолжая дифференцировать, используя цепное правило и подставляя там, где это нужно, (3.2), мы приходим к общей формуле

$$u^{(n)} = \delta^{(n)}(\hat{x}, y, v^{(n)})$$

для всех производных таких функций u по x до порядка n включительно, выраженных через y, v, производные от v по y до порядка n включительно и вездесущие параметрические переменные $\hat{x}$. Сейчас стоит рассмотреть характерный пример.

Пример 3.1. Рассмотрим однопараметрическую группу растяжений

$$(x, t, u) \longmapsto (\lambda x, \lambda t, u), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

действующую на $X \times U \simeq \mathbb{R}^3$. На верхней полуплоскости $M = \{t > 0\}$ действие регулярно, причем глобальные независимые инварианты — это $y = x/t$ и $v = u$. Если мы считаем v функцией от y, мы можем получить формулы для производных от u по x и t, выраженных через y, v и производные от v по y вместе с единственной параметрической переменной, которую мы обозначаем t, так что x будет соответствующей главной переменной. Мы получаем, пользуясь цепным правилом, что если $u = v = v(y) = v(x/t)$, то

$$u_x = t^{-1}v_y, \quad u_t = -t^2 x v_y = -t^{-1} y v_y.$$

Дальнейшее дифференцирование приводит к формулам для произведения второго порядка

$$u_{xx} = t^{-2}v_{yy}, \quad u_{xt} = -t^{-2}(yv_{yy} + v_y), \quad u_{tt} = t^{-2}(y^2 v_{yy} + 2yv_y) \tag{3.5}$$

и т. д.

Раз соответствующие формулы, связывающие производные от u по x с производными от v по y, уже получены, редуцированная система дифференциальных уравнений для G-инвариантных решений системы Δ получается подстановкой этих выражений в систему там, где они встречаются. В общем случае это приводит к системе уравнений вида

$$\tilde{\Delta}_\nu(\hat{x}, y, v^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

содержащей еще параметрические переменные $\hat{x}$. Если G — на самом деле группа симметрий для системы Δ, эта полученная система будет фактически всегда *эквивалентна* системе уравнений, обозначаемой

$$(\Delta/G)_\nu(y, v^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

которая не зависит от параметрических переменных и, таким образом, действительно представляет собой систему дифференциальных уравнений относительно v как функции от y. Это и есть редуцированная система Δ/G для G-инвариантных решений системы Δ. Каждое решение $v = h(y)$ системы Δ/G будет ввиду (3.4) соответствовать G-инвариантному решению системы Δ, и, более того, каждое G-инвариантное решение может быть построено таким образом.

Пример 3.2. Одномерное волновое уравнение $u_{tt} - u_{xx} = 0$ инвариантно относительно группы растяжений, описанной в примере 3.1. Чтобы построить соответствующие инвариантные относительно растяжений решения, нам нужно лишь подставить формулу для производных (3.5) в волновое уравнение и решить полученное обыкновенное дифференциальное уравнение. После подстановки мы получаем уравнение

$$t^{-2}(y^2v_{yy}+2yv_y-v_{yy})=0.$$

Как и обещает общая теория, это уравнение эквивалентно уравнению

$$(y^2-1)\,v_{yy}+2yv_y=0,$$

в котором отсутствует уже параметрическая переменная t. Это последнее обыкновенное дифференциальное уравнение является редуцированным уравнением для инвариантных относительно растяжений решений волнового уравнения. Оно легко интегрируется. Его общее решение —

$$v=c\log|(y-1)/(y+1)|+c',$$

где c, c' — произвольные постоянные. Заменяя переменные y, v в решении на их выражения через x, t, u, мы получаем общее инвариантное относительно растяжений решение волнового уравнения (для рассматриваемой группы симметрий растяжений)

$$u=c\log|(x-t)/(x+t)|+c'.$$

Для удобства читателя мы приводим ниже основные вычислительные процедуры для нахождения инвариантных относительно группы решений данной системы уравнений с частными производными с самого начала. Мы перечисляем шаги по порядку, начиная с вычисления группы симметрии.

(I) Находим все инфинитезимальные образующие $\mathbf{v}$ групп симметрий системы, пользуясь основными методами продолжения гл. 2, в частности инфинитезимальным критерием (2.25).

(II) Выбираем «степень симметрии» s инвариантных решений. Здесь $1\leqslant s\leqslant p$ будет соответствовать размерности орбит некоторой подгруппы полной группы симметрий. Редуцированные системы дифференциальных уравнений для инвариантных решений будут зависеть от $p—s$ независимых переменных. Таким образом, чтобы свести систему уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, нам нужно выбрать $s=p-1$. Вообще говоря, чем меньше s, тем больше будет инвариантных решений, но тем труднее будет найти точное решение редуцированной системы Δ/G.

(III) Находим все s-мерные подгруппы G полной группы симметрий, найденной в п. I. Это эквивалентно (теорема 1.51) нахождению всех s-мерных подалгебр полной алгебры Ли инфинитезимальных симметрий $\mathbf{v}$. Каждой такой подгруппе или подалгебре будет соответствовать множество инвариантных относительно группы решений, отражающее симметрии, присущие самой группе G. Задача классификации подалгебр данной алгебры Ли будет рассмотрена в деталях в § 3.3. (В принципе s-мерная подгруппа G может иметь орбиты размерности меньше s, и, как мы отмечали ранее, размерность орбит как раз имеет значение. Практически, однако, этот вид вырождения встречается редко, так что мы можем довольствоваться фиксацией размерности подгруппы.)

(IV) Фиксировав группу симметрий G, мы строим полное множество функционально независимых инвариантов, как в § 2.1, которые мы делим на два класса

$$\begin{aligned} y^1 &= \eta^1(x, u), \ \ldots, \ y^{p-s} = \eta^{p-s}(x, u), \\ v^1 &= \zeta^1(x, u), \ \ldots, \ v^q = \zeta^q(x, u), \end{aligned} \tag{3.6}$$

отвечающие новым независимым и зависимым переменным соответственно. Если G действует проектируемо, выбор независимых и зависимых переменных предписывается требованием, что η^i не зависят от u; в более общем случае имеется не так уж мало свободы в этом выборе, и разные выборы приведут к существенно различным на вид редуцированным системам, но все они связаны некоторыми преобразованиями типа преобразования годографа.

(V) Если G действует трансверсально (ср. предложение 3.37), мы можем разрешить (3.6) относительно $p-s$ переменных x, которые мы обозначаем через $\tilde{x}$, и всех переменных u, выразив их через y, v и s оставшихся параметрических переменных $\hat{x}$:

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y, v), \quad u = \delta(\hat{x}, y, v). \tag{3.7}$$

Далее, рассматривая v как функцию от y, мы можем воспользоваться формулами (3.6), (3.7) и цепным правилом дифференцирования и тем самым найти выражения для производных по x от любой G-инвариантной функции u через y, v, производные v по y и параметрические переменные $\hat{x}$:

$$u^{(n)} = \delta^{(n)}(\hat{x}, y, v^{(n)}). \tag{3.8}$$

(VI) Подставляем выражения (3.7), (3.8) в систему $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. Полученная система уравнений всегда будет эквивалентна системе дифференциальных уравнений относительно $v = h(y)$, не зависящей от параметрических переменных $\hat{x}$:

$$\Delta/G(y, v^{(n)}) = 0. \tag{3.9}$$

На этом шаге мы построили редуцированную систему дифференциальных уравнений для G-инвариантных решений.

(VII) Решаем редуцированную систему (3.9). Каждому решению $v = h(y)$ системы Δ/G соответствует G-инвариантное решение $u = f(x)$ исходной системы, которое неявно задается соотношением

$$\zeta(x, u) = h[\eta(x, u)]. \tag{3.10}$$

Повторяя шаги с IV по VII для каждой группы симметрий G, определенной на шаге III, мы получим полное множество инвариантных относительно группы решений для нашей системы.

3.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ

Прежде чем приступить к доказательству того, что описанная в предыдущем параграфе процедура построения инвариантных относительно группы решений работает, мы проиллюстрируем этот метод несколькими систематическими примерами, в которых строятся инвариантные относительно группы решения для уравнения Кортевега — де Фриза, уравнения теплопроводности и уравнений Эйлера. Эти примеры естественным путем приведут нас к задаче о том, как классифицировать инвариантные относительно группы решения таким образом, чтобы найти «все» такие решения с минимальными вычислительными трудностями. Но прежде чем обращаться к этому вопросу, мы рассматриваем примеры.

Пример 3.3. *Уравнение теплопроводности.* Группа симметрий уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

была вычислена в примере 2.41; она состоит из шестипараметрической группы симметрий, присущей самому уравнению теплопроводности, плюс бесконечномерная подгруппа, проистекающая из линейности этого уравнения. Каждой однопараметрической подгруппе полной группы симметрий будет соответствовать класс инвариантных относительно группы решений, который будет получаться из редуцированного обыкновенного дифференциального уравнения, вид которого, вообще говоря, будет зависеть от рассматриваемой конкретной подгруппы.

(a) *Бегущие волны.* Вообще, решения вида бегущей волны у уравнения с частными производными появляются как специальные инвариантные относительно группы решения, когда рассматриваемая группа является группой сдвигов в пространстве независимых переменных. В настоящем примере рассмотрим группу сдвигов

$$(x, t, u) \mapsto (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$