(VII) Решаем редуцированную систему (3.9). Каждому решению $v = h(y)$ системы Δ/G соответствует G-инвариантное решение $u = f(x)$ исходной системы, которое неявно задается соотношением

$$\zeta(x, u) = h[\eta(x, u)]. \tag{3.10}$$

Повторяя шаги с IV по VII для каждой группы симметрий G, определенной на шаге III, мы получим полное множество инвариантных относительно группы решений для нашей системы.

3.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ

Прежде чем приступить к доказательству того, что описанная в предыдущем параграфе процедура построения инвариантных относительно группы решений работает, мы проиллюстрируем этот метод несколькими систематическими примерами, в которых строятся инвариантные относительно группы решения для уравнения Кортевега — де Фриза, уравнения теплопроводности и уравнений Эйлера. Эти примеры естественным путем приведут нас к задаче о том, как классифицировать инвариантные относительно группы решения таким образом, чтобы найти «все» такие решения с минимальными вычислительными трудностями. Но прежде чем обращаться к этому вопросу, мы рассматриваем примеры.

Пример 3.3. *Уравнение теплопроводности.* Группа симметрий уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

была вычислена в примере 2.41; она состоит из шестипараметрической группы симметрий, присущей самому уравнению теплопроводности, плюс бесконечномерная подгруппа, проистекающая из линейности этого уравнения. Каждой однопараметрической подгруппе полной группы симметрий будет соответствовать класс инвариантных относительно группы решений, который будет получаться из редуцированного обыкновенного дифференциального уравнения, вид которого, вообще говоря, будет зависеть от рассматриваемой конкретной подгруппы.

(a) *Бегущие волны.* Вообще, решения вида бегущей волны у уравнения с частными производными появляются как специальные инвариантные относительно группы решения, когда рассматриваемая группа является группой сдвигов в пространстве независимых переменных. В настоящем примере рассмотрим группу сдвигов

$$(x, t, u) \longmapsto (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

порожденную образующей $\partial_t + c\partial_x$, где c — фиксированная постоянная, которая будет определять скорость волн. Глобальными инвариантами этой группы являются

$$y = x - ct, \quad v = u, \tag{3.11}$$

так что инвариантное относительно группы решение $v = h(y)$ имеет привычный вид $u = h(x - ct)$, определяющий волну неизменного профиля, движущуюся с постоянной скоростью c. Выражая производные от u по x и t через производные от v по y, мы находим

$$u_t = -cv_y, \quad u_x = v_y, \quad u_{xx} = v_{yy}$$

и т. д. Подставляя эти выражения в уравнение теплопроводности, мы находим редуцированное обыкновенное дифференциальное уравнение для бегущих волн:

$$-cv_y = v_{yy}.$$

Общее решение этого линейного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$v(y) = ke^{-cy} + l,$$

где k, l — произвольные постоянные. В исходных переменных в соответствии с (3.11) мы находим наиболее общий вид бегущей волны волнового уравнения. Это экспонента

$$u(x, t) = ke^{-c(x-ct)} + l.$$

(b) *Решения, инвариантные относительно растяжений.* У волнового уравнения имеются две однопараметрические группы симметрий растяжения. Рассмотрим линейную комбинацию

$$x\partial_x + 2t\partial_t + 2au\partial_u, \quad a \in \mathbb{R},$$

их инфинитезимальных образующих, соответствующую группе растяжений

$$(x, t, u) \longmapsto (\lambda x, \lambda^2 t, \lambda^{2a} u), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

На полупространстве $\{(x, t, u)\colon t > 0\}$ глобальными инвариантами этой однопараметрической группы будут функции

$$y = x/\sqrt{t}, \quad v = t^{-a} u.$$

Выражая производные от u через производные от v, получаем

$$u = t^a v,$$

$$u_x = t^{a-1/2} v_y, \quad u_{xx} = t^{a-1} v_{yy},$$

$$u_t = -\frac{1}{2} x t^{a-3/2} v_y + a t^{a-1} v = t^{a-1}\left(-\frac{1}{2} y v_y + av\right).$$

Здесь мы обращаемся с t как с параметрической переменной и с успехом выражаем соответствующие производные от u по x и t через y, v, производные от v по y и параметрическую переменную t, как в (3.8).

Подставляя эти выражения в уравнение теплопроводности, получаем

$$t^{a-1}v_{yy} = t^{a-1}\left(-\frac{1}{2}yv_y + av\right).$$

Как гарантирует нам общая теория, это уравнение эквивалентно уравнению, в котором отсутствует параметрическая переменная t, а именно

$$v_{yy} + \frac{1}{2}yv_y - av = 0.$$

Это уравнение представляет собой редуцированное уравнение для инвариантных относительно растяжений решений. Решения этого линейного обыкновенного дифференциального уравнения можно записать через функции параболического цилиндра. В самом деле, если положить

$$w = v\exp\left(\frac{1}{8}y^2\right),$$

то w удовлетворяет дифференциальному уравнению Вебера

$$w_{yy} = \left[\left(a + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}y^2\right]w.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$w(y) = kU\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \tilde{k}V\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right),$$

где $U(b, z)$, $V(b, z)$ — функции параболического цилиндра, ср. Abramowitz, Stegun [1; § 19.1]. Таким образом, общее инвариантное относительно растяжений решение уравнения теплопроводности принимает вид

$$u(x, t) = t^a e^{-x^2/8t}\left\{kU\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{x}{\sqrt{2t}}\right) + \tilde{k}V\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\right\}.$$

Некоторые значения a приводят к специальным инвариантным решениям, выражающимся через элементарные функции. Например, при $a = 0$ мы получаем решение

$$u(x, t) = k^* \operatorname{erf}(x/\sqrt{2t}) + \tilde{k}^*,$$

где erf — функция ошибок. Поскольку $U\left(-n - \frac{1}{2}, z\right) = e^{-z^2/4}\mathrm{H}_n(z)$, где H_n есть n-й многочлен Эрмита, при $a =$

$=-(n+1)/2$ мы получаем решения

$$u(x,\ t)=t^{-(n+1)/2}e^{-x^2/4t}\,\mathrm{H}_n\left(x/\sqrt{2t}\right).$$

которые включают функцию источника $(n=0)$. Аналогично, соотношение $V(n+1/2,\ z)=\sqrt{2/\pi}\,e^{z^2/4}\,\mathrm{H}_n^*(z)$, где $\mathrm{H}_n^*(z)=(-i)^n\,\mathrm{H}_n(iz)$, приводит к так называемым многочленам теплопроводности (см. Widder [1])

$$x,\quad x^2+2t,\quad x^3+6xt \text{ и т. д.},$$

являющимся инвариантными относительно растяжений решениями специального вида.

(c) *Решения, инвариантные относительно преобразований Галилея.* Однопараметрическая группа преобразований Галилея, порожденная векторным полем $\mathbf{v}_5=2t\partial_x-xu\partial_u$, обладает глобальными инвариантами $y=t$, $v=u\exp(x^2/4t)$ на верхней полуплоскости $\{t>0\}$. Мы получаем

$$u_t=\left(v_y+\frac{x^2}{4t^2}v\right)e^{-x^2/4t},\quad u_{xx}=\left(\frac{x^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right)ve^{-x^2/4t}.$$

Поэтому для уравнения теплопроводности редуцированное уравнение для решений, инвариантных относительно преобразований Галилея, — обыкновенное дифференциальное уравнение *первого порядка* $2yv_y+v=0$, несмотря на то что уравнение теплопроводности было уравнением с частными производными второго порядка. Его решение: $v(y)=k/\sqrt{y}$. Следовательно, наиболее общее инвариантное относительно преобразований Галилея решение пропорционально функции источника

$$u(x,\ t)=\frac{k}{\sqrt{t}}\,e^{-x^2/4t},$$

которую мы нашли раньше как решение, инвариантное относительно растяжений. Таким образом, одно и то же решение может быть инвариантным относительно разных подгрупп полной группы симметрий.

Очевидно, мы можем расширить этот список инвариантных относительно группы решений, рассматривая однопараметрические подгруппы, полученные из более общих линейных комбинаций инфинитезимальных образующих полной группы симметрий. Однако сейчас без какого-либо представления о классификации этих решений продолжать бессмысленно. Когда мы опишем корректную классификационную процедуру, мы вернемся к этому вопросу и найдем (в некотором смысле) наиболее общее инвариантное относительно группы решение уравнения теплопроводности. См. пример 3.17.

Пример 3.4. Группа симметрий уравнения Кортевега — де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$$

была вычислена в примере 2.44. Рассмотрим соответствующие решения, инвариантные относительно группы.

(a) *Бегущие волны.* Здесь группа — та же група сдвигов, рассмотренная уже в предыдущем примере. Выраженное через инварианты $y = x - ct$, $v = u$ редуцированное уравнение имеет вид

$$v_{yyy} + vv_y - cv_y = 0.$$

Его сейчас же можно один раз проинтегрировать:

$$v_{yy} + \frac{1}{2} v^2 - cv = k.$$

Второе интегрирование осуществляется после умножения на v_y:

$$\frac{1}{2} v_y^2 = -\frac{1}{6} v^3 + \frac{1}{2} cv^2 + kv + l, \qquad (3.12)$$

где k и l — произвольные постоянные. Общее решение можно записать через эллиптические функции: $u = \mathscr{P}(x - ct + \delta)$, где δ — произвольный сдвиг фазы. Если $u \to 0$ достаточно быстро при $|x| \to \infty$, то в (3.12) $k = l = 0$. Это уравнение имеет вещественные решения

$$v = 3c \operatorname{sch}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c}\, y + \delta\right],$$

если скорость c волны положительна. Они дают знаменитые «односолитонные» решения

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sch}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c}\, (x - ct) + \delta\right]$$

уравнения Кортевега — де Фриза. (При $c = 0$ мы также получаем стационарное решение $u = -12(x + \delta)^{-2}$ с особенностью.) Более общо, если мы требуем лишь, чтобы функция u была ограничена, мы получаем периодические «кноидальные волны»

$$u(x, t) = a \operatorname{cn}^2 [\lambda (x - ct) + \delta] + m,$$

где cn — якобиева эллиптическая функция модуля $k = \sqrt{(r_3 - r_2)}/\sqrt{(r_3 - r_1)}$, $a = r_3 - r_2$, $\lambda = \sqrt{(r_3 - r_1)/6}$, $m = r_2$, где $r_1 < r_2 < r_3$ — корни кубического многочлена, стоящего в правой части (3.12).

(b) *Решения, инвариантные относительно преобразований Галилея.* Рассмотрим, далее, однопараметрическую группу преобразований Галилея, порожденную полем $t\partial_x + \partial_u$. Здесь при $t > 0$ независимыми инвариантами являются $y = t$ и $v = tu - x$, откуда получаем

$$u = y^{-1}(x + v), \quad u_x = y^{-1}, \quad u_{xxx} = 0, \quad u_t = y^{-2}(yv_y - v - x),$$

где x — параметрическая переменная. Редуцированное уравнение — это просто $dv/dy = 0$, так что общее галилеево-инвариантное решение имеет вид $u = (x + \delta)/t$, где δ — произвольная постоянная.

Более интересный класс решений с галилеево-подобной инвариантностью можно получить добавлением к этой группе сдвигов по времени. Образующая $t\partial_x + a\partial_t + \partial_u$, $a \neq 0$, имеет глобальные инварианты

$$y = x - \frac{1}{2}bt^2, \quad v = u - bt,$$

где $b = 1/a$. Тогда

$$u = v + bt, \quad u_x = v_y, \quad u_{xxx} = v_{yyy}, \quad u_t = -btv_y + b,$$

так что редуцированное уравнение имеет вид

$$v_{yyy} + vv_y + b = 0.$$

Оно интегрируется один раз и приводится к уравнению второго порядка

$$v_{yy} + \frac{1}{2}v^2 + by + c = 0,$$

известному как *Пенлеве-I*. Его решения $v = h(y)$ мероморфны на всей комплексной плоскости, но являются существенно новыми функциями, не выражающимися через стандартные специальные функции. Соответствующие решения уравнения Кортевега — де Фриза имеют вид

$$u(x, t) = h\left(x - \frac{1}{2}bt^2\right) + bt.$$

(c) *Автомодельные решения.* Рассмотрим, наконец, группу симметрий растяжения

$$(x, t, u) \longmapsto (\lambda x, \lambda^3 t, \lambda^{-2}u).$$

Инвариантами на верхнем полупространстве $\{t > 0\}$ являются

$$y = t^{-1/3}x, \quad v = t^{2/3}u.$$

Мы находим

$$u_x = t^{-1}v_y, \quad u_{xxx} = t^{-5/3}v_{yyy}, \quad u_t = -\frac{1}{3}t^{-5/3}(yv_y + 2v),$$

так что редуцированное уравнение имеет вид

$$v_{yyy}+vv_y-\frac{1}{3}yv_y-\frac{2}{3}v=0.$$

Отнюдь не очевидно, как решить это обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка непосредственно. Однако, основываясь на преобразовании, открытом Миурой (Miura [1]) для самого уравнения Кортевега — де Фриза (см. упр. 5.11), положим

$$v=\frac{dw}{dy}-\frac{1}{6}w^2.$$

Уравнение для w имеет вид

$$0=w_{yyyy}-\frac{1}{3}ww_{yyy}-\frac{1}{3}ww_y^2-\frac{1}{6}w^2w_{yy}+\frac{1}{18}w^3w_y-$$
$$-\frac{1}{3}yw_{yy}+\frac{1}{9}yww_y-\frac{2}{3}w_y+\frac{1}{9}w^2=$$
$$=\left(D_y-\frac{1}{3}w\right)\left(w_{yyy}-\frac{1}{6}w^2w_y-\frac{1}{3}yw_y-\frac{1}{3}w\right).$$

Поэтому каждое решение «модифицированного» уравнения третьего порядка

$$w_{yyy}-\frac{1}{6}w^2w_y-\frac{1}{3}yw_y-\frac{1}{3}w=0$$

приводит к автомодельному решению уравнения Кортевега — де Фриза при указанном преобразовании. Выписанное выше уравнение можно один раз проинтегрировать:

$$w_{yy}=\frac{1}{18}w^3+\frac{1}{3}yw+k,$$

где k — некоторая постоянная. Это уравнение, называемое *Пенлеве*-II, обладает свойствами, аналогичными свойствам первого из уравнений Пенлеве. См. Ince [1], где обсуждается классификация этих уравнений.

Пример 3.5. Для уравнений Эйлера трехмерного течения идеальной несжимаемой жидкости

$$\mathbf{u}_t+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}=-\nabla p,\qquad \nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{3.13}$$

имеются четыре независимые переменные $\mathbf{x}=(x,y,z)$ и t, так что мы можем обсуждать решения, инвариантные относительно одно-, дву- и трехпараметрических подгрупп полной группы симметрий, полученной в примере 2.45. Здесь мы рассмотрим несколько таких подгрупп, приводящих к решениям, представляющим физический или математический интерес. Во всех случаях группа будет содержать однопараметрическую подгруппу одного из двух видов: независимые от времени сдвиги в фиксированном направлении, которое мы можем считать осью z, или вращения вокруг фиксированной оси, в качестве которой мы снова можем взять ось z.

(а) *Решения, инвариантные относительно сдвига.* Для решений, инвариантных относительно группы сдвигов, порожденной полем ∂_z, трехмерные уравнения Эйлера (3.13) сводятся к их двумерному варианту (эти уравнения имеют тот же вид, но $\mathbf{u} = (u, v)$, p зависит только от $\mathbf{x} = (x, y)$, t) и уравнению

$$w_t + uw_x + vw_y = 0 \tag{3.14}$$

для вертикальной компоненты скорости, которое можно проинтегрировать, решая уравнение для характеристик $dt = dx/u = dy/v$. Конечно, двумерные уравнения Эйлера продолжают оставаться слишком трудными, чтобы найти их точное решение, так что мы рассматриваем решения, инвариантные относительно второй однопараметрической группы.

Для группы G_β сдвигов, зависящих от времени, порожденной полем $\mathbf{v}^\beta = \beta\partial_y + \beta_t\partial_v - \beta_{tt}y\partial_p$, $\beta(t) \neq 0$, инварианты даются следующими функциями:

$$t,\ x,\ \tilde{u} = u, \quad \tilde{v} = v - (\beta_t/\beta)\, y, \quad \tilde{p} = p + \frac{1}{2}(\beta_{tt}/\beta)\, y^2,$$

где t, x — независимые переменные. Редуцированная система

$$\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x = -\tilde{p}_x, \quad \tilde{v}_t = \tilde{u}\tilde{v}_x + (\beta_t/\beta)\,\tilde{v} = 0, \quad \tilde{u}_x + (\beta_t/\beta) = 0 \tag{3.15}$$

быстро решается:

$$\tilde{u} = [-\beta_t x + \sigma_t]/\beta, \quad \tilde{v} = h(\beta x - \sigma)/\beta,$$
$$\tilde{p} = \left[\left(\frac{1}{2}\beta\beta_{tt} - \beta_t^2\right)x^2 + (2\beta_t\sigma_t - \beta\sigma_{tt})\,x + \tau\right]\Big/\beta^2,$$

где $\sigma(t)$, $\tau(t)$ — произвольные функции от t, а h — произвольная функция от единственного инварианта $\beta(t)x - \sigma(t)$ для второго уравнения системы (3.15). Таким образом, мы получаем G_β-инвариантное решение

$$u = [-\beta_t x + \sigma_t]/\beta, \quad v = [\beta_t y + h(\beta x - \sigma)]/\beta,$$
$$p = \left[\left(\frac{1}{2}\beta\beta_{tt} - \beta_t^2\right)x^2 - \frac{1}{2}\beta\beta_{tt}y^2 + (2\beta_t\sigma_t - \beta\sigma_{tt})\,x + \tau\right]\Big/\beta^2$$

двумерных уравнений Эйлера. В частности, если $\beta(t) \equiv 1$, мы можем найти точное решение (3.14) и получить, что

$$u=\sigma_t, \quad v=h(x-\sigma(t)), \quad w=H(x-\sigma(t),\ y-th(x-\sigma(t))),$$
$$p=-\sigma_{tt}x+\tau(t)$$

— трехмерное решение, инвариантное относительно группы сдвигов по направлениям y и z. (Здесь $\sigma(t)$, $\tau(t)$, $h(\xi)$, $H(\xi,\eta)$ — произвольные гладкие функции.)

Хотя выше определены все решения двумерных уравнений Эйлера, инвариантные относительно группы, порожденной $\mathbf{v}_\beta$, поучительно посмотреть, что происходит, если мы пытаемся найти более специализированные решения, инвариантные относительно двупараметрической группы, порожденной полем $\mathbf{v}_\beta$ и полем $\mathbf{v}_\alpha=\alpha\partial_x+\alpha_t\partial_u-\alpha_{tt}x\partial_p$. Инвариантами являются

$$\tilde u=u-(\alpha_t/\alpha)x, \quad \tilde v=v-(\beta_t/\beta)y, \quad \tilde p=p+(\alpha_{tt}/2\alpha)x^2+(\beta_{tt}/2\beta)y^2.$$

Это функции от одной оставшейся независимой переменной t. Редуцированная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\tilde u_t+(\alpha_t/\alpha)\tilde u=0=\tilde v_t+(\beta_t/\beta)\tilde v \tag{3.16a}$$

плюс условие нулевой дивергенции

$$(\alpha_t/\alpha)+(\beta_t/\beta)=0. \tag{3.16b}$$

Важный момент здесь состоит в том, что *если* $\alpha(t)$ не равно $k/\beta(t)$ ни для какой постоянной k, то (3.16b) выполняться не может, и редуцированные уравнения *не* имеют решений. Иными словами, вообще говоря, нет никаких гарантий, что редуцированная система дифференциальных уравнений для некоторой группы симметрий будет совместна, и, следовательно, нет никаких гарантий, что такие решения существуют.

(b) *Решения, инвариантные относительно вращений.* Для группы вращений вокруг оси z, порожденной векторным полем $-y\partial_x+x\partial_y-v\partial_u+u\partial_v$, инвариантами являются $r=\sqrt{x^2+y^2}$, z, t, p и цилиндрические компоненты скорости $\hat u=u\cos\theta+v\sin\theta$, $\hat v=-u\sin\theta+v\cos\theta$, $\hat w=w$. Редуцированные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\hat u_t+\hat u\hat u_r+\hat w\hat u_z-r^{-1}\hat v^2=-p_r,\\
&\hat v_t+\hat u\hat v_r+\hat w\hat v_z+r^{-1}\hat u\hat v=0,\\
&\hat w_t+\hat u\hat w_r+\hat w\hat w_z=-p_z,\\
&(r\hat u)_r+(r\hat w)_z=0,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

ср. Berker [1]. Если мы, кроме того, предположим инвариантность относительно сдвигов ∂_z, то $\hat u$, $\hat v$, $\hat w$, p не зависят от z, и поэтому мы можем точно решить (3.17):

$$\hat{u}=\sigma_t/r,\quad \hat{v}=r^{-1}h\left[\frac{1}{2}r^2-\sigma(t)\right],\quad \hat{w}=\tilde{h}\left[\frac{1}{2}r^2-\sigma(t)\right],$$

$$p=-\sigma_{tt}\ln r-\frac{1}{2}r^{-2}\sigma_t^2+\int_0^r s^{-3}h\left[\frac{1}{2}s^2-\sigma(t)\right]^2 ds+\tau(t),$$

где $\sigma(t)$, $\tau(t)$ и $h(\xi)$, $\tilde{h}(\xi)$ — произвольные функции. Это наиболее общие решения, зависящие только от t и цилиндрического радиуса r.

Рассмотрим решения, полностью инвариантные относительно вращений, т. е. инвариантные относительно всей группы $SO(3)$. Хотя группа $SO(3)$ действует проектируемо на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$: $(\mathbf{x},\mathbf{u})\longmapsto(R\mathbf{x},R\mathbf{u})$, $R\in SO(3)$, и регулярно с трехмерными орбитами на любом открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, проекция действия группы $\mathbf{x}\longmapsto R\mathbf{x}$ на $\mathbb{R}^3$ имеет лишь двумерные орбиты. В этом случае условия трансверсальности (3.34) нарушаются и мы не в состоянии построить редуцированную систему $\Delta/SO(3)$. Другой способ увидеть это — рассмотреть инварианты группы $SO(3)$, которыми являются t, $|\mathbf{x}|$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, p, и заметить, что для осуществления процедуры редукции слишком много независимых и слишком мало зависимых переменных. Таким образом, $SO(3)$-инвариантных решений не существует.

В качестве последнего примера рассмотрим систему (3.17) эйлеровых уравнений в цилиндрических координатах. Эта система обладает несколькими группами симметрий, и большинство из них происходят из групп симметрий полных уравнений Эйлера (3.13). Имеется, однако, одна дополнительная образующая $\mathbf{v}^*=r^{-2}(\hat{v}^{-1}\partial_{\hat{v}}-\partial_p)$, которая не происходит из симметрии уравнения (3.13)! Таким образом, редукция системы Δ с помощью известной группы симметрий G может привести к системе Δ/G, обладающей *дополнительными* свойствами симметрии, которых не было у исходной системы. Рассмотрим решения, инвариантные относительно однопараметрической группы, порожденной инфинитезимальной образующей $\partial_t-\mathbf{v}^*$, инвариантами которой являются r, z, $\hat{u}$, $\hat{w}$, $\omega=r^2\hat{v}^2/2+t$, $q=p-r^{-2}t$. Они удовлетворяют редуцированной системе

$$\begin{aligned}\hat{u}\hat{u}_r+\hat{w}\hat{u}_z-2r^{-3}\omega&=-q_r,\\ \hat{u}\omega_r+\hat{w}\omega_z&=1,\\ \hat{u}\hat{w}_r+\hat{w}\hat{w}_z&=-q_z,\\ (r\hat{u})_r+(r\hat{w})_z&=0.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Эта система, вообще говоря, все еще слишком сложна, чтобы решать ее; однако, следуя Капитанскому [1], мы будем искать решение в виде

$$\hat{u}=\hat{u}(r), \quad \omega=\omega(r), \quad \hat{w}=\xi(r)z+\eta(r).$$

Из первого и последнего уравнений (3.18) вытекает, что

$$\xi=-\hat{u}_r-r^{-1}\hat{u}, \quad q_r=-\hat{u}\hat{u}_r+2r^{-3}\omega.$$

Дифференцируя третье уравнение по r, мы находим условие совместности

$$0=-q_{rz}=(\hat{u}\xi_r+\xi^2)_r z+(\hat{u}\eta_r+\xi\eta)_r;$$

следовательно, $\hat{u}\xi_r+\xi^2=k$, $\hat{u}\eta_r+\xi\eta=l$ — константы. Пользуясь предыдущей формулой для ξ, мы находим, что $\hat{u}$ должно удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\hat{u}\hat{u}_{rr}-\hat{u}_r^2-r^{-1}\hat{u}\hat{u}_r-2r^{-2}\hat{u}^2+k=0.$$

Это уравнение допускает двупараметрическую группу симметрий, порожденную векторными полями $\mathbf{w}=r\partial_r+u\partial_u$, $\tilde{\mathbf{w}}=r^{-1}\partial_r-r^{-2}\hat{u}\partial_{\hat{u}}$ и, следовательно, может быть проинтегрировано с помощью методов § 2.5. При $k<0$ имеем

$$\hat{u}(r)=ar^{-1}\operatorname{ch}(br^2+\delta),$$

a, b, δ — произвольные постоянные, следовательно,

$$\omega(r)=-\frac{\operatorname{arctg}\exp(br^2+\delta)}{2ab^2}, \quad \xi(r)=-2ab\operatorname{sh}(br^2+\delta),$$

$$q(r,\ z)=-\frac{1}{2}kz^2-lz-\frac{1}{2}[\hat{u}(r)]^2+\int_{r_0}^{r}2s^{-3}\omega(s)\,ds,$$

и из последнего уравнения (3.18)

$$\eta(r)=-2b\operatorname{sh}(br^2+\delta),$$

и $l=-4ab^2$. Таким образом, общее решение имеет вид

$$\hat{u}=\hat{u}(r), \quad \hat{v}=r^{-1}\sqrt{2\omega(r)-2t}, \quad \hat{w}=\xi(r)z+\eta(r),$$
$$p=tr^{-2}+q(r,\ z),$$

где $\hat{u}$, ω, ξ, η, q такие, как выше. Капитанский замечает, что, поскольку $\hat{v}$ задается квадратным корнем, из этих решений можно получить решения уравнений Эйлера в цилиндрических областях, «взрывающиеся» за конечное время ($|\nabla\mathbf{u}|\to\infty$), даже хотя нормальная компонента $\mathbf{u}$ на границе гладка для всех t. Причина, конечно, состоит в том, что особенность $\omega(r)=t$ можно устроить так, что она будет проходить границу, не затрагивая нормальную компоненту $\mathbf{u}$. (Поведение аналогичного рода можно получить и для более простых решений, инвариантных относительно сдвигов.) Это наблюдение поэтому не решает известную задачу о том, могут ли за конечное время появиться особенности у гладкнх решений трехмерных уравнений Эйлера.

3.3. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ

Вообще говоря, каждой s-параметрической подгруппе H полной группы симметрий G системы дифференциальных уравнений от $p > s$ независимых переменных будет соответствовать семейство решений, инвариантных относительно группы. Поскольку почти всегда имеется бесконечно много таких подгрупп, обычно невозможным оказывается перечислить все решения системы, ннвариантные относительно группы. Нам нужны эффективные систематические средства классификации этих решений, приводящие к «оптимальной системе» инвариантных относительно группы решений, из которой можно было бы получить любое другое такое решение. Поскольку элементы $g \in G$, не принадлежащие подгруппе H, будут переводить H-инвариантное решение в решение, инвариантное относительно некоторой другой группы, в нашей оптимальной системе нужно будет перечислить только те решения, которые не связаны между собой таким способом. Осиовной результат следующий:

Предложение 3.6. *Пусть G — группа симметрий системы дифференциальных уравнений Δ, и пусть $H \in G$ есть s-параметрическая подгруппа. Если $u=f(x)$ есть G-инвариантное решение системы Δ и $g \in G$ — любой элемент группы G, не содержащийся в H, то преобразованная функция $u=\tilde{f}(x)=g\cdot f(x)$ является $\tilde{H}$-инвариантным решением, где $\tilde{H}=gHg^{-1}$ — подгруппа, сопряженная с подгруппой H при помощи элемента g.*

Доказательство непосредственно следует из упр. 2.3, если в качестве инвариантного подмножества взять график Γ_f. Как следствие этого результата задача о классификации решений, инвариантных относительно группы, сводится к задаче о классификации подгрупп полной группы симметрий G относительно сопряжения. Таким образом, нам нужно подробно изучить отображение сопряжения $h \longmapsto ghg^{-1}$ на группе Ли, после чего мы вернемся к иашей исходной классификационной задаче.