хотя нормальная компонента $\mathbf{u}$ на границе гладка для всех t. Причина, конечно, состоит в том, что особенность $\omega(r)=t$ можно устроить так, что она будет проходить границу, не затрагивая нормальную компоненту $\mathbf{u}$. (Поведение аналогичного рода можно получить и для более простых решений, инвариантных относительно сдвигов.) Это наблюдение поэтому не решает известную задачу о том, могут ли за конечное время появиться особенности у гладких решений трехмерных уравнений Эйлера.

3.3. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ

Вообще говоря, каждой s-параметрической подгруппе H полной группы симметрий G системы дифференциальных уравнений от $p>s$ независимых переменных будет соответствовать семейство решений, инвариантных относительно группы. Поскольку почти всегда имеется бесконечно много таких подгрупп, обычно невозможным оказывается перечислить все решения системы, инвариантные относительно группы. Нам нужны эффективные систематические средства классификации этих решений, приводящие к «оптимальной системе» инвариантных относительно группы решений, из которой можно было бы получить любое другое такое решение. Поскольку элементы $g \in G$, не принадлежащие подгруппе H, будут переводить H-инвариантное решение в решение, инвариантное относительно некоторой другой группы, в нашей оптимальной системе нужно будет перечислить только те решения, которые не связаны между собой таким способом. Основной результат следующий:

Предложение 3.6. *Пусть G — группа симметрий системы дифференциальных уравнений Δ, и пусть $H \subset G$ есть s-параметрическая подгруппа. Если $u=f(x)$ есть G-инвариантное решение системы Δ и $g \in G$ — любой элемент группы G, не содержащийся в H, то преобразованная функция $u=\tilde{f}(x)=g\cdot f(x)$ является $\tilde{H}$-инвариантным решением, где $\tilde{H}=gHg^{-1}$ — подгруппа, сопряженная с подгруппой H при помощи элемента g.*

Доказательство непосредственно следует из упр. 2.3, если в качестве инвариантного подмножества взять график Γ_f. Как следствие этого результата задача о классификации решений, инвариантных относительно группы, сводится к задаче о классификации подгрупп полной группы симметрий G относительно сопряжения. Таким образом, нам нужно подробно изучить отображение сопряжения $h \mapsto ghg^{-1}$ на группе Ли, после чего мы вернемся к нашей исходной классификационной задаче.

Присоедииенное представление

Пусть G — группа Ли. Для каждого $g \in G$ сопряжение $K_g(h) \equiv ghg^{-1}$, $h \in G$, определяет диффеоморфизм группы G. Кроме того, $K_g \circ K_{g'} = K_{gg'}$, $K_e = \mathbb{1}_G$, так что K_g определяет глобальное действие группы G на себе, причем каждое отображение сопряжения K_g является групповым гомоморфизмом: $K_g(hh') = K_g(h) K_g(h')$ и т. д. Легко видеть, что дифференциал $dK_g : TG|_h \to TG|_{K_g(h)}$ сохраняет правую инвариантность векторных полей и, следовательно, определяет линейное отображение на алгебре Ли группы G, называемое *присоединенным представлением*:

$$\operatorname{Ad} g(\mathbf{v}) \equiv dK_g(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \mathfrak{g}. \tag{3.19}$$

Заметим, что присоединенное представление дает линейное глобальное действие группы G на алгебре $\mathfrak{g}$:

$$\operatorname{Ad}(g \cdot g') = \operatorname{Ad} g \cdot \operatorname{Ad} g', \quad \operatorname{Ad} e = \mathbb{1}.$$

Если $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ порождает однопараметрическую подгруппу $H = \{\exp(\varepsilon\mathbf{v}) : \varepsilon \in \mathbb{R}\}$, то в силу (1.22), как легко видеть, $\operatorname{Ad} g(\mathbf{v})$ порождает сопряженную однопараметрическую подгруппу $K_g(H) = gHg^{-1}$. Это замечание легко обобщить на подгруппы высших размерностей, пользуясь тем фактом, что они полностью определяются своими однопараметрическими подгруппами.

Предложение 3.7. *Пусть H и $\tilde{H}$ — связные s-мерные подгруппы Ли группы Ли G, $\mathfrak{h}$ и $\tilde{\mathfrak{h}}$ — соответствующие подалгебры Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Тогда $\tilde{H} = gHg^{-1}$ — сопряженные подгруппы, если и только если $\tilde{\mathfrak{h}} = \operatorname{Ad} g(\mathfrak{h})$ — сопряженные подалгебры.*

Присоединенное представление группы Ли на ее алгебре Ли часто бывает легче построить по ее инфинитезимальным образующим. Если $\mathbf{v}$ порождает однопараметрическую подгруппу $\{\exp(\varepsilon\mathbf{v})\}$, то мы определяем $\operatorname{ad}\mathbf{v}$ как векторное поле на $\mathfrak{g}$, порождающее соответствующую однопараметрическую группу присоединенных преобразований:

$$\operatorname{ad}\mathbf{v}|_{\mathbf{w}} \equiv \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \operatorname{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}))\,\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathfrak{g}. \tag{3.20}$$

Основной факт состоит в том, что инфинитезимальное присоединенное действие согласовано со скобкой Ли на $\mathfrak{g}$:

Предложение 3.8. *Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Для каждого $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ присоединенный вектор* $\operatorname{ad}\mathbf{v}$ *в* $\mathbf{w} \in \mathfrak{g}$ *равен*

$$\operatorname{ad}\mathbf{v}|_{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \tag{3.21}$$

где мы воспользовались отождествлением касательного пространства $T\mathfrak{g}|_{\mathbf{w}}$ в $\mathbf{w}$ *с самой алгеброй* $\mathfrak{g}$, *поскольку* $\mathfrak{g}$ — *векторное пространство.*

Доказательство. Мы отождествляем $\mathfrak{g} \simeq TG|_e$. Пользуясь (3.20), определением (3.19) присоединенного представления и правой инвариантностью вектора $\mathbf{w}$, мы находим

$$\operatorname{ad}\mathbf{v}|_{\mathbf{w}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left\{dK_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})}\left[\mathbf{w}|_e\right] - \mathbf{w}|_e\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left\{d\exp(e\mathbf{v})\left[\mathbf{w}|_{\exp(-\varepsilon\mathbf{v})}\right] - \mathbf{w}|_e\right\}.$$

Если заменить ε на $-\varepsilon$, то последнее выражение получится таким же, как в определении (1.57) производной Ли от $\mathbf{w}$ по $\mathbf{v}$, так что (3.21) следует из предложения 1.64. □

Замечание. В литературе обычно присоединенное отображение $\operatorname{ad}\mathbf{v}|_{\mathbf{w}}$ имеет другой знак: $+[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$. Причина в том, что мы выбрали в гл. 1 правоинвариантные векторные поля для определения алгебры Ли вместо более традиционных левоинвариантных векторных полей. Причины такого выбора обсуждались в упр. 1.33. В этой книге мы постоянно будем пользоваться формулой (3.21) для инфинитезимального присоединенного действия.

В случае когда $G \subset \mathrm{GL}(n)$ — матричная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$, эти формулы особенно легко проверить. Поскольку $K_A(B) = ABA^{-1}$, где $A, B \in G$ — матрицы размера $n \times n$, присоединенное отображение также задается сопряжением:

$$\operatorname{Ad} A(X) = AXA^{-1}, \quad A \in G, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Полагая $A = e^{\varepsilon Y}$, $Y \in \mathfrak{g}$, и дифференцируя по ε, мы получаем

$$\operatorname{ad} Y|_X = YX - XY = [X, Y],$$

что совпадает со скобкой на $\mathfrak{gl}(n)$.

Пример 3.9. Пусть $G = \mathrm{SO}(3)$ — группа вращений в $\mathbb{R}^3$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ натянута на матрицы

$$A^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

порождающие однопараметрические подгруппы

$$R_\theta^x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad R_\theta^y=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$R_\theta^z=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

вращений вокруг координатных осей против часовой стрелки. Присоединенное действие, скажем, R_θ^x на образующую A^y можно найти, дифференцируя произведение $R_\theta^x R_\varepsilon^y R_{-\theta}^x$ по ε и полагая затем $\varepsilon=0$; мы получаем

$$\operatorname{Ad} R_\theta^x(A^y)=\begin{pmatrix}0 & -\sin\theta & \cos\theta\\ \sin\theta & 0 & 0\\ -\cos\theta & 0 & 0\end{pmatrix}=\cos\theta\cdot A^y+\sin\theta\cdot A^z$$

и, аналогично,

$$\operatorname{Ad} R_\theta^x(A^x)=A^x,\quad \operatorname{Ad} R_\theta^x(A^z)=-\sin\theta\cdot A^y+\cos\theta\cdot A^z.$$

Таким образом, присоединенное действие подгруппы R_θ^x вращений вокруг оси x в физическом пространстве такое же, как и группы вращения вокруг оси A^x в пространстве алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$. Аналогичные замечания применяются и к другим подгруппам, так что если $R\in \mathrm{SO}(3)$ — произвольная матрица вращения в данных координатах (x, y, z) в $\mathbb{R}^3$, то ее присоединенное отображение $\operatorname{Ad} R$, действующее на $\mathfrak{so}(3)\simeq\mathbb{R}^3$, имеет то же матричное представление R в индуцированном базисе $\{A^x, A^y, A^z\}$. (Тот факт, что присоединенное представление группы $\mathrm{SO}(3)$ согласовано с ее естественным физическим представлением, случаен и *не* справедлив для других матричных групп Ли.) Наконец, инфинитезимальные образующие присоединенного действия получаются дифференцированием; например,

$$\operatorname{ad} A^x\big|_{A^y}=\frac{d}{d\theta}\bigg|_{\theta=0}\operatorname{Ad}(R_\theta^x)\,A^y=A^z,$$

что совпадает с коммутатором

$$[A^y,\ A^x]=A^xA^y-A^yA^x=A^z.$$

Обратно, если нам известно присоединенное действие $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на себе, мы можем построить присоединенное представление $\operatorname{Ad} G$ соответствующей группы Ли, либо интегрируя систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\varepsilon} = \operatorname{ad}\mathbf{v}|_{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \tag{3.22}$$

с решением

$$\mathbf{w}(\varepsilon) = \operatorname{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}))\,\mathbf{w}_0,$$

либо (возможно, это более простой способ) суммируя ряды Ли (ср. (1.19)):

$$\operatorname{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}))\,\mathbf{w}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (\operatorname{ad}\mathbf{v})^n (\mathbf{w}_0) =$$

$$= \mathbf{w}_0 - \varepsilon[\mathbf{v}, \mathbf{w}_0] + \frac{\varepsilon^2}{2}[\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}_0]] - \ldots . \tag{3.23}$$

(Сходимость ряда (3.23) следует из того, что (3.22) — линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой (3.23) — соответствующая матричная экспонента.)

Пример 3.10. Алгебра Ли, натянутая на векторы $\mathbf{v}_1 = \partial_x$, $\mathbf{v}_2 = \partial_t$, $\mathbf{v}_3 = t\partial_x + \partial_u$, $\mathbf{v}_4 = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u$, порождает группу симметрий уравнения Кортевега — де Фриза. Чтобы вычислить присоединенное представление, мы воспользуемся рядами Ли (3.23). Например,

$$\operatorname{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}_2))\,\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_4 - \varepsilon[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4] + \frac{1}{2}\varepsilon^2[\mathbf{v}_2, [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4]] - \ldots =$$

$$= \mathbf{v}_4 - 3\varepsilon\mathbf{v}_2.$$

Таким образом мы строим таблицу

Ad	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4 - \varepsilon\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3 - \varepsilon\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_4 - 3\varepsilon\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2 + \varepsilon\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4 + 2\varepsilon\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$e^{\varepsilon}\mathbf{v}_1$	$e^{3\varepsilon}\mathbf{v}_2$	$e^{-2\varepsilon}\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$

(3.24)

где на (i, j)-м месте указано $\operatorname{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}_i))\,\mathbf{v}_j$.

Классификация подгрупп и подалгебр

Определение 3.11. Пусть G — группа Ли. *Оптимальная система* s-параметрических подгрупп — это список неэквивалентных относительно сопряжения s-параметрических подгрупп, обладающий тем свойством, что всякая другая подгруппа сопряжена в точности одной группе этого списка. Аналогично, список s-параметрических подалгебр образует *оптимальную систему*, если каждая s-параметрическая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ эквивалентна единственному члену этого списка посредством некоторого элемента присоединенного представления: $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h})$, $g \in G$.

Предложение 3.7 утверждает, что задача отыскания оптимальной системы подгрупп эквивалентна задаче отыскания оптимальной системы подалгебр, и поэтому мы сосредоточимся на последней. К сожалению, эта задача может остаться слишком сложной, и на этот раз инфинитезимальная техника, видимо, не будет очень уж полезной.

Для одномерных подалгебр эта классификационная задача в сущности то же самое, что задача классификации орбит присоединенного представления, поскольку каждая одномерная подалгебра определяется ненулевым вектором из алгебры $\mathfrak{g}$. Хотя для алгебр Ли с дополнительной структурой применима некоторая изощренная техника, мы приступаем к этой задаче с помощью наивного подхода, состоящего в том, что мы берем общий элемент $\mathbf{v}$ из $\mathfrak{g}$ и подвергаем его различным присоединенным преобразованиям так, чтобы «упростить» его настолько, насколько это возможно. Приведем два иллюстративных примера.

Пример 3.12. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{g}$ симметрий уравнения Кортевега — де Фриза, присоединенное представление которой было описано в примере 3.10. Наша задача — упростить, насколько возможно, коэффициенты a_i данного ненулевого вектора

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4$$

посредством разумных применений к $\mathbf{v}$ присоединенных отображений.

Предположим сначала, что $a_4 \neq 0$. Растянув, если нужно, вектор $\mathbf{v}$, мы можем считать $a_4 = 1$. В соответствии с таблицей (3.24), если на такой вектор подействовать преобразованием $\mathrm{Ad}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}a_3\mathbf{v}_3\right)\right)$, мы можем сделать коэффициент при $\mathbf{v}_3$ нулем:

$$\mathbf{v}' = \mathrm{Ad}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}a_3\mathbf{v}_3\right)\right)\mathbf{v} = a_1'\mathbf{v}_1 + a_2'\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4,$$

где a_1', a_2' — некоторые числа, зависящие от a_1, a_2, a_3. Далее, мы действуем на вектор $\mathbf{v}'$ преобразованием $\mathrm{Ad}\left(\exp\left(\frac{1}{3}\cdot a_2'\mathbf{v}_2\right)\right)$, чтобы обратить в нуль коэффициент при $\mathbf{v}_2$. Это приводит к вектору $\mathbf{v}''=a_1'\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_4$, и, наконец, преобразование $\mathrm{Ad}(\exp(a_1'\mathbf{v}_1))$ обращает в нуль оставшийся коэффициент, так что вектор $\mathbf{v}$ эквивалентен относительно присоединенного представления вектору $\mathbf{v}_4$. Иными словами, каждая одномерная подалгебра, порожденная вектором $\mathbf{v}$ с $a_4\neq 0$, эквивалентна подалгебре, порожденной вектором $\mathbf{v}_4$.

Остальные одномерные подалгебры порождаются векторами указанного выше вида с $a_4=0$. Если $a_3\neq 0$, мы можем растяжением сделать $a_3=1$, а затем подействовать на вектор $\mathbf{v}$ преобразованием $\mathrm{Ad}(\exp(a_1\mathbf{v}_2))$, так что вектор $\mathbf{v}$ эквивалентен вектору $\mathbf{v}'=a_2'\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ для некоторого a_2'. Мы можем далее подействовать на вектор $\mathbf{v}'$ группой, порожденной $\mathbf{v}_4$; это приведет лишь к растяжению коэффициентов при $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}''=\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}_4))\,\mathbf{v}'=a_2'e^{3\varepsilon}\mathbf{v}_2+e^{-2\varepsilon}\mathbf{v}_3.$$

Это скалярное кратное вектора $\mathbf{v}'''=a_2'e^{5\varepsilon}\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$, так что, в зависимости от знака a_2', мы можем сделать коэффициент при $\mathbf{v}_2$ равным $+1$, -1 или 0. Таким образом, всякая одномерная подалгебра, порожденная вектором $\mathbf{v}$ с $a_4=0$, $a_3\neq 0$, эквивалентна подалгебре, порожденной либо $\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_2$, либо $\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2$, либо $\mathbf{v}_3$. Аналогично можно показать, что в остальных случаях ($a_3= =a_4=0$) вектор $\mathbf{v}$ эквивалентен либо $\mathbf{v}_2$ ($a_2\neq 0$), либо $\mathbf{v}_1$ ($a_2=a_3=a_4=0$). Читатель может проверить, что дальнейшее упрощение невозможно.

Итак, мы нашли оптимальную систему одномерных подалгебр — это подалгебры, порожденные векторами

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a}) && \mathbf{v}_4=x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u,\\
&(\mathrm{b}_1) && \mathbf{v}_3+\mathbf{v}_2=t\partial_x+\partial_t+\partial_u,\\
&(\mathrm{b}_2) && \mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2=t\partial_x-\partial_t+\partial_u,\\
&(\mathrm{b}_3) && \mathbf{v}_3=t\partial_x+\partial_u,\\
&(\mathrm{c}) && \mathbf{v}_2=\partial_t,\\
&(\mathrm{d}) && \mathbf{v}_1=\partial_x.
\end{aligned}\tag{3.25}$$

Этот список можно немного сократить, если использовать дискретную симметрию $(x,t,u)\longmapsto(-x,-t,u)$, которая не принадлежит связной компоненте единицы всей группы симметрий. Эта симметрия отображает $\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2$ в $\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_2$, и поэтому число неэквивалентных подалгебр уменьшается до пяти.

Пример 3.13. Рассмотрим шестимерную алгебру $\mathfrak{g}$ симметрий уравнения теплопроводности (2.55), порожденную векторными полями

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_t, \quad \mathbf{v}_3 = u\partial_u, \quad \mathbf{v}_4 = x\partial_x + 2t\partial_t,$$
$$\mathbf{v}_5 = 2t\partial_x - xu\partial_u, \quad \mathbf{v}_6 = 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u.$$

(Сейчас мы игнорируем тривиальную бесконечномерную подалгебру, проистекающую из линейности этого уравнения.) Из таблицы коммутаторов для этой алгебры мы получаем следующую таблицу:

Ad	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$e^{\varepsilon}\mathbf{v}_1$	$e^{2\varepsilon}\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_1 - \varepsilon\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_2 + 2\varepsilon\mathbf{v}_1 - \varepsilon^2\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_1 + 2\varepsilon\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_2 - 2\varepsilon\mathbf{v}_3 + 4\varepsilon\mathbf{v}_4 + 4\varepsilon^2\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_3$

Ad	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_4 - \varepsilon\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_5 + \varepsilon\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_6 - 2\varepsilon\mathbf{v}_5 - \varepsilon^2\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_4 - 2\varepsilon\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_5 - 2\varepsilon\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_6 - 4\varepsilon\mathbf{v}_4 + 2\varepsilon\mathbf{v}_3 + 4\varepsilon^2\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_4$	$e^{-\varepsilon}\mathbf{v}_5$	$e^{-2\varepsilon}\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_4 + \varepsilon\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_4 + 2\varepsilon\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$

где на (i, j)-м месте стоит $\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}_i))\mathbf{v}_j$.

Пусть $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_6\mathbf{v}_6$ — элемент алгебры $\mathfrak{g}$, который мы попытаемся упростить, используя подходящие присоединенные отображения. Ключевое наблюдение здесь состоит в том, что функция $\eta(\mathbf{v}) = (a_4)^2 - 4a_2a_6$ является инвариантом полного присоединенного действия: $\eta(\mathrm{Ad}\, g(\mathbf{v})) = \eta(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$, $g \in G$. Обнаружение такого инварианта имеет важное значение, поскольку он определяет ограничения на то, насколько мы можем надеяться упростить $\mathbf{v}$. Например, если $\eta(\mathbf{v}) \neq 0$, то мы не сможем одновременно обратить в нуль a_2, a_4 и a_6 посредством присоединенных отображений; если $\eta(\mathbf{v}) < 0$, то мы не сможем сделать нулем ни a_2, ни a_6!

Чтобы приступить к процедуре классификации, мы сосредоточимся на коэффициентах a_2, a_4, a_6 поля $\mathbf{v}$. Если поле $\mathbf{v}$ такое, как написано выше, то поле

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{6} \tilde{a}_i \mathbf{v}_i = \mathrm{Ad}(\exp(\alpha\mathbf{v}_6)) \circ \mathrm{Ad}(\exp(\beta\mathbf{v}_2))\,\mathbf{v}$$

имеет коэффициенты

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= a_2 - 2\beta a_4 + 4\beta^2 a_6, \\ \tilde{a}_4 &= 4\alpha a_2 + (1 - 8\alpha\beta)\, a_4 - 4\beta(1 - 4\alpha\beta)\, a_6, \\ \tilde{a}_6 &= 4\alpha^2 a_2 + 2\alpha(1 - 4\alpha\beta)\, a_4 + (1 - 4\alpha\beta)^2 a_6. \end{aligned} \tag{3.26}$$

В зависимости от знака инварианта η имеются три случая:

Случай 1. Если $\eta(\mathbf{v}) > 0$, то мы в качестве β берем один из вещественных корней квадратного уравнения $4a_6\beta^2 - 2a_4\beta + a_2 = 0$ и $\alpha = a_6/8(\beta a_6 - 2a_4)$ (оно всегда корректно определено). Тогда $\tilde{a}_2 = \tilde{a}_6 = 0$, а $\tilde{a}_4 = \sqrt{\eta(\mathbf{v})} \neq 0$, так что $\mathbf{v}$ эквивалентно кратному поля $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_4 + \tilde{a}_1\mathbf{v}_1 + \tilde{a}_3\mathbf{v}_3 + \tilde{a}_5\mathbf{v}_5$. Действуя затем присоединенными отображениями, порожденными соответственно $\mathbf{v}_5$ и $\mathbf{v}_1$, мы можем добиться обращения в нуль коэффициентов при $\mathbf{v}_5$ и $\mathbf{v}_1$ в $\tilde{\mathbf{v}}$. Поэтому всякий элемент с $\eta(\mathbf{v}) > 0$ эквивалентен кратному поля $\mathbf{v}_4 + a\mathbf{v}_3$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Дальнейшие упрощения невозможны.

Случай 2. Если $\eta(\mathbf{v}) < 0$, положим $\beta = 0$, $\alpha = -a_4/4a_2$, чтобы сделать $\tilde{a}_4 = 0$. Действуя на $\mathbf{v}$ группой, порожденной $\mathbf{v}_4$, мы можем сделать коэффициенты при $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_6$ равными, так что $\mathbf{v}$ эквивалентно скалярному кратному поля $\tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_6) + \tilde{a}_1\mathbf{v}_1 + \tilde{a}_3\mathbf{v}_3 + \tilde{a}_5\mathbf{v}_5$. Использование далее групп, порожденных полями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_5$, показывает, что поле $\tilde{\mathbf{v}}$ пропорционально $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_6 + a\mathbf{v}_3$ при некотором $a \in \mathbb{R}$.

Случай 3. Если $\eta(\mathbf{v}) = 0$, имеется два подслучая. Если не все коэффициенты a_2, a_4, a_6 равны нулю, то мы можем выбрать α и β в (3.26), так что $\tilde{a}_2 \neq 0$, а $\tilde{a}_4 = \tilde{a}_6 = 0$, так что поле $\mathbf{v}$ эквивалентно кратному поля $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + \tilde{a}_1\mathbf{v}_1 + \tilde{a}_3\mathbf{v}_3 + \tilde{a}_5\mathbf{v}_5$. Предположим, что $\tilde{a}_5 \neq 0$. Тогда мы можем сделать коэффициенты при $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_3$ равными нулю, используя группы, порожденные $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_3$, а группа, порожденная полем $\mathbf{v}_4$, независимо растягивает коэффициенты при $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_5$. Таким образом, поле $\mathbf{v}$ эквивалентно кратному либо поля $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5$, либо поля $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_5$. Если, с другой стороны, $\tilde{a}_5 = 0$, то группа, порожденная полем $\mathbf{v}_5$, может быть использована, чтобы привести $\mathbf{v}$ к вектору вида $\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3$, $a \in \mathbb{R}$.

Последний оставшийся случай, для которого наши предыдущие упрощения излишни, возникает, когда $a_2 = a_4 = a_6 = 0$. Если $a_1 \neq 0$, то с помощью групп, порожденных $\mathbf{v}_5$ и $\mathbf{v}_6$, мы можем сделать вектор $\mathbf{v}$ кратным $\mathbf{v}_1$. Если $a_1 = 0$, а $a_5 \neq 0$, мы можем сначала подействовать любым отображением $\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon\mathbf{v}_2))$, чтобы получить ненулевой коэффициент перед $\mathbf{v}_1$ и свести этот случай к предыдущему. Остальные векторы кратны вектору $\mathbf{v}_3$, на котором присоединенное представление действует тривиально.

Итак, оптимальная система одномерных подалгебр алгебры симметрий уравнения теплопроводности состоит из алгебр, порожденных

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \mathbf{v}_4 + a\mathbf{v}_3, & \eta > 0,\ a \in \mathbb{R}, \\ \text{(b)} & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_6 + a\mathbf{v}_3, & \eta < 0,\ a \in \mathbb{R}, \\ \text{(c1)} & \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_5, & \eta = 0, \\ \text{(c2)} & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5, & \eta = 0, \\ \text{(d)} & \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3, & \eta = 0,\ a \in \mathbb{R}, \\ \text{(e)} & \mathbf{v}_1, & \eta = 0, \\ \text{(f)} & \mathbf{v}_3, & \eta = 0. \end{array} \tag{3.27}$$

Снова дискретная симметрия $(x, t, u) \mapsto (-x, t, u)$ переводит $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_5$ в $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5$ и список уменьшается на один элемент.

Включение дополнительной бесконечномерной алгебры симметрий $\{\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x, t)\partial_u\}$, где α — решение уравнения теплопроводности, не внесет существенных изменений в эту классификацию. Если $\mathbf{v} + \mathbf{v}_\alpha$ лежит в этой бóльшей алгебре, где $\mathbf{v} \neq 0$ лежит в рассмотренной шестимерной алгебре, то мы всегда можем найти поле $\mathbf{v}_\beta = \beta(x, t)\partial_u$, такое, что $\mathrm{Ad}(\exp(\mathbf{v}_\beta))(\mathbf{v} + \mathbf{v}_\alpha) = \mathbf{v}$. Например, если $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = \partial_x$, то

$$\beta(x, t) = -\int_0^x \alpha(y, t)\, dy - \int_0^t \alpha_x(0, s)\, ds.$$

(Читателю следовало бы проверить, что β — решение уравнения теплопроводности.) Таким образом, векторы, не эквивалентные никаким векторам из шестимерной алгебры, имеют вид $\mathbf{v}_\alpha$. Мы не будем пытаться классифицировать эти векторы, поскольку они *не* приводят к инвариантным относительно группы решениям уравнения теплопроводности.

Раз мы расклассифицировали одномерные подалгебры алгебры Ли, мы можем продолжить поиск оптимальных систем для подалгебр высших размерностей. Недостаток места мешает нам здесь продолжить изучение этой интересной задачи, так что мы отсылаем читателя к книге Овсянникова [3; § 14.8], где изложена полезная техника.

Классификация решений, инвариантных относительно группы

Определение 3.14. *Оптимальная система* инвариантных относительно s-параметрических групп решений системы дифференциальных уравнений — это набор решений $u = f(x)$, обладающий следующими свойствами:

(i) Каждое решение списка инвариантно относительно некоторой s-параметрической группы симметрий этой системы дифференциальных уравнений.

(ii) Если $u = \tilde{f}(x)$ — любое другое решение, инвариантное относительно s-параметрической группы симметрий, то существует такая симметрия g системы, которая отображает $\tilde{f}$ в решение $f = g \cdot \tilde{f}$ из этого списка.

Предложение 3.15. *Пусть G — полная группа симметрий системы Δ уравнений с частными производными. Пусть $\{H_\alpha\}$ — оптимальная система s-параметрических подгрупп группы G. Тогда набор всех H_α-инвариантных решений, где H_α — подгруппа из этой оптимальной системы, образует оптимальную систему инвариантных относительно s-параметрических групп решений системы Δ.*

Доказательство немедленно следует из предложения 3.6. Кроме того, наша предыдущая классификация подалгебр теперь непосредственно применима к классификации инвариантных относительно группы решений.

Пример 3.16. В наших предыдущих исследованиях в примере 3.4 нами уже проделана вся работа, чтобы дать полный список инвариантных решений для уравнения Кортевега — де Фриза. В самом деле, в соответствии с нашей оптимальной системой одномерных подалгебр (3.25) полной алгебры симметрий нам нужно только найти инвариантные относительно группы решения для однопараметрических подгрупп, порожденных (a) $\mathbf{v}_4$ — растяжениями; (b) $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2$ — модифицированными преобразованиями Галилея; (c) $\mathbf{v}_3$ — преобразованиями Галилея; (d) $\mathbf{v}_2$ — сдвигами по времени; (e) $\mathbf{v}_1$ — сдвигами в пространстве. Все они, кроме последнего, были найдены в примере 3.4, к которому мы и отсылаем читателя. Решения, инвариантные относительно сдвигов в пространстве, все являются константами, и, следовательно, тривиальным образом появляются среди других решений. Таким образом, любое другое инвариантное относительно группы решение уравнения Кортевега — де Фриза можно найти, преобразуя одно из решений примера 3.4 с помощью подходящего элемента этой группы.

Например, бегущие волны, соответствующие группе симметрий, порожденной полем $\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_1 = \partial_t + c\partial_x$, можно получить из стационарных решений $u = f(x)$, инвариантных относительно группы, порожденной полем $\mathbf{v}_2 = \partial_t$. Обращаясь к табл. (3.24), мы видим, что

$$\mathrm{Ad}(\exp(c\mathbf{v}_3))\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_1,$$

где $\mathbf{v}_3 = t\partial_x + \partial_u$ порождает однопараметрическую галилееву группу симметрий уравнения Кортевега — де Фриза. В соответствии с предложением 3.6, если $u = f(x)$ — произвольное стационарное решение, то $\tilde{f} = \exp(c\mathbf{v}_3)f$ будет бегущей волной, распространяющейся со скоростью c. Из (2.68) мы видим, что

$$\tilde{f}(x, t) = f(x - ct) + c,$$

где $f(x)$ — произвольная эллиптическая функция, удовлетворяющая условию

$$f''' + ff' = 0.$$

В частности, если

$$u = f_0(x) = 3c\,\mathrm{sch}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}\,x + \delta\right) - c,$$

а это, как может проверить читатель, — стационарное решение уравнения Кортевега — де Фриза для любого $c > 0$, мы получаем односолитонное решение со скоростью c.

Пример 3.17. Наконец, рассмотрим классификацию инвариантных относительно группы решений уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Построение инвариантных относительно группы решений для каждой из одномерных подгрупп оптимальной системы (3.27) получается тем же способом, что в примере 3.3, и мы просто перечисляем результаты.

(a) $$\mathbf{v}_4 + a\mathbf{v}_3 = x\partial_x + 2t\partial_t + 2au\partial_u.$$

Инвариантами являются $y = x/\sqrt{t}$, $v = t^{-a}u$; редуцированное уравнение имеет вид $v_{yy} + \frac{1}{2}yv_y - av = 0$, а инвариантные решения — это полученные ранее функции параболического цилиндра

$$u(x, t) = t^a e^{-x^2/8t}\left\{kU\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{x}{\sqrt{2t}}\right) + \tilde{k}V\left(2a + \frac{1}{2}, \frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\right\}.$$

(b) $$\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_6 + a\mathbf{v}_3 = 4tx\partial_x + (4t^2 + 1)\partial_t - (x^2 + 2t - a)u\partial_u.$$

Инвариантами являются

$$y=(4t^2+1)^{-1/2}x,$$
$$v=(4t^2+1)^{1/4}u\cdot\exp\left\{(4t^2+1)^{-1}tx^2+\frac{a}{2}\operatorname{arctg}(2t)\right\}.$$

Редуцированное уравнение имеет вид

$$v_{yy}+(a+y^2)\,v=0.$$

Инвариантные решения выражаются через функции параболического цилиндра от чисто мнимых аргументов (Abramowitz, Stegun [1; § 19.17])

$$u(x,\ t)=(4t^2+1)^{-1/4}\left\{kW\left(-\frac{a}{2},\ \frac{x}{\sqrt{8t^2+2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\tilde{k}W\left(-\frac{a}{2},\ \frac{-x}{\sqrt{8t^2+2}}\right)\right\}\exp\left\{\frac{-tx^2}{4t^2+1}-\frac{a}{2}\operatorname{arctg}(2t)\right\}.$$

(c) $$\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_5=\partial_t-2t\partial_x+xu\partial_u.$$

Инвариантами являются

$$y=x+t^2,\quad v=u\exp\left(-xt-\frac{2}{3}t^3\right).$$

Редуцированное уравнение — это уравнение Эйри

$$v_{yy}=yv.$$

Решения записываются через функции Эйри

$$u(x,\ t)=\{k\operatorname{Ai}(x+t^2)+\tilde{k}\operatorname{Bi}(x+t^2)\}\exp\left(xt+\frac{2}{3}t^3\right).$$

Соответствующие инвариантные решения для $\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_5$ получаются заменой x на $-x$.

(d) $$\mathbf{v}_2+a\mathbf{v}_3=\partial_t+au\partial_u.$$

Инвариантами являются x, $v=e^{-at}u$, и редуцированное уравнение $v_{xx}=av$ приводит к решениям

$$u(x,\ t)=\begin{cases} ke^{at}\operatorname{ch}(\sqrt{a}x+\delta), & a>0,\\ kx+\tilde{k}, & a=0,\\ ke^{at}\cos(\sqrt{-a}\,x+\delta), & a<0.\end{cases}$$

Что касается двух оставшихся подалгебр, то подалгебра, порожденная полем $\mathbf{v}_1$, имеет в качестве инвариантных решений лишь константы, а они уже появились в (d), а подалгебра, порожденная полем $\mathbf{v}_3$, не имеет инвариантных решений. Таким образом, указанные решения составляют оптимальную систему инвариантных относительно групп решений уравнения теплопроводности, и любое другое инвариантное относительно группы решение можно найти, преобразуя одно из этих решений с помощью подходящего элемента этой группы.

Когда мы в прошлый раз столкнулись с этой задачей (пример 3.3), мы определили инвариантные решения для пары подгрупп, не появившихся в оптимальной системе (3.27). В силу общей теории эти решения можно получить из имеющихся подходящими преобразованиями из группы. Например, поскольку

$$\mathrm{Ad}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}c\mathbf{v}_5\right)\right](\mathbf{v}_2+c\mathbf{v}_1)=\mathbf{v}_2+\frac{1}{4}c^2\mathbf{v}_3,$$

мы могли бы найти бегущие волны, преобразуя решения, инвариантные относительно $\mathbf{v}_2+a\mathbf{v}_3$, $a=c^2/4$, с помощью преобразования Галилея $\exp((1/2)c\mathbf{v}_5)$, и на самом деле $u=ke^{\sqrt{a}x+at}+\tilde{k}e^{-\sqrt{a}x+at}$ переходит в бегущую волну $u=k+\tilde{k}e^{-c(x-ct)}$ при $a=c^2/4$.

3.4. ФАКТОРМНОГООБРАЗИЯ

Чтобы строго сформулировать основной метод для нахождения инвариантных относительно группы решений систем дифференциальных уравнений, намеченный в § 3.1, нам нужно достичь лучшего понимания геометрического основания этих конструкций. Понятие фактормногообразия гладкого многообразия по регулярной группе преобразований доставит естественную среду для всех инвариантных относительно этой группы объектов. В конце концов мы увидим, как естественно на фактормногообразии возникает редуцированная система дифференциальных уравнений для инвариантных относительно этой группы решений. Мы начинаем с общего обсуждения фактормногообразий.

Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на гладком многообразии M. На точках многообразия M имеется индуцированное отношение эквивалентности: точки x и y эквивалентны, если они лежат в одной орбите группы G. Пусть M/G обозначает множество классов эквивалентности или, что равносильно, множество орбит группы G. Проекция $\pi\colon M\to M/G$ ставит в соответствие каждой точке x из M ее класс эквивалентности $\pi(x)\in M/G$, который можно отождествить с орбитой группы G, проходящей через точку x. В частности, $\pi(g\cdot x)=\pi(x)$ для любого $g\in G$, такого, что $g\cdot x$ определено. Обратно, для данной точки $w\in M/G$ множество $\pi^{-1}\{w\}$ будет орбитой, определяемой точкой w, реализованной как подмножество