образом, указанные решения составляют оптимальную систему инвариантных относительно групп решений уравнения теплопроводности, и любое другое инвариантное относительно группы решение можно найти, преобразуя одно из этих решений с помощью подходящего элемента этой группы.

Когда мы в прошлый раз столкнулись с этой задачей (пример 3.3), мы определили инвариантные решения для пары подгрупп, не появившихся в оптимальной системе (3.27). В силу общей теории эти решения можно получить из имеющихся подходящими преобразованиями из группы. Например, поскольку

$$\mathrm{Ad}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}c\mathbf{v}_5\right)\right](\mathbf{v}_2+c\mathbf{v}_1)=\mathbf{v}_2+\frac{1}{4}c^2\mathbf{v}_3,$$

мы могли бы найти бегущие волны, преобразуя решения, инвариантные относительно $\mathbf{v}_2+a\mathbf{v}_3$, $a=c^2/4$, с помощью преобразования Галилея $\exp((1/2)c\mathbf{v}_5)$, и на самом деле $u=ke^{\sqrt{a}x+at}+\tilde{k}e^{-\sqrt{a}x+at}$ переходит в бегущую волну $u=k+\tilde{k}e^{-c(x-ct)}$ при $a=c^2/4$.

3.4. ФАКТОРМНОГООБРАЗИЯ

Чтобы строго сформулировать основной метод для нахождения инвариантных относительно группы решений систем дифференциальных уравнений, намеченный в § 3.1, нам нужно достичь лучшего понимания геометрического основания этих конструкций. Понятие фактормногообразия гладкого многообразия по регулярной группе преобразований доставит естественную среду для всех инвариантных относительно этой группы объектов. В конце концов мы увидим, как естественно на фактормногообразии возникает редуцированная система дифференциальных уравнений для инвариантных относительно этой группы решений. Мы начинаем с общего обсуждения фактормногообразий.

Пусть G — локальная группа преобразований, действующая на гладком многообразии M. На точках многообразия M имеется индуцированное отношение эквивалентности: точки x и y эквивалентны, если они лежат в одной орбите группы G. Пусть M/G обозначает множество классов эквивалентности или, что равносильно, множество орбит группы G. Проекция $\pi\colon M\to M/G$ ставит в соответствие каждой точке x из M ее класс эквивалентности $\pi(x)\in M/G$, который можно отождествить с орбитой группы G, проходящей через точку x. В частности, $\pi(g\cdot x)=\pi(x)$ для любого $g\in G$, такого, что $g\cdot x$ определено. Обратно, для данной точки $w\in M/G$ множество $\pi^{-1}\{w\}$ будет орбитой, определяемой точкой w, реализованной как подмножество многообразия M. Факторпространство M/G обладает естественной топологией; мы требуем, чтобы проекция $\pi[U]$ любого открытого множества $U \subset M$ была открытой в M/G.

Вообще говоря, факторпространство M/G будет исключительно сложным топологическим пространством, структуру которого понять нелегко. Однако если мы в дальнейшем потребуем, чтобы группа G действовала на многообразии M *регулярно*, то мы можем наделить M/G структурой гладкого многообразия. Если M есть m-мерное многообразие, а группа G имеет s-мерные орбиты, то фактормногообразие M/G будет иметь размерность $m-s$[1]). Таким образом, конструкция фактормногообразия приводит к понижению размерности на s, т. е. на размерность орбит группы G.

Раз мы построили фактормногообразие, общее соображение состоит в том, что всякий объект на многообразии M, инвариантный относительно действия группы G, будет иметь естественный эквивалент на фактормногообразии M/G меньшей размерности, свойства которого полностью характеризуют исходный объект на M. В качестве первого примера рассмотрим G-инвариантную функцию F: $M \to \mathbb{R}^l$. Поскольку $F(g\cdot x)=F(x)$, если $g\cdot x$ определено, функция F является постоянной вдоль орбит группы G. Поэтому корректно определена функция $\tilde{F}=F/G$: $M/G \to \mathbb{R}^l$, такая, что $\tilde{F}(\pi(x))=F(x)$ при $x \in M$. Обратно, если $\tilde{F}$: $M/G \to \mathbb{R}^l$, то функция F: $M \to \mathbb{R}^l$, определенная формулой $F(x)=\tilde{F}(\pi(x))$, $x \in M$, очевидно, будет G-инвариантной функцией на M. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между G-инвариантными функциями на M и произвольными функциями на M/G. Заметим далее, что в любой локальной координатной карте функции, определенные на M/G, зависят от на s меньшего числа переменных, чем их эквиваленты на M (просто потому, что мы понизили размерность на s при факторизации). Таким образом, проектирование на фактормногообразие приводит к понижению числа степеней свободы на s — размерность орбит действия группы.

Теорема 3.18. *Пусть M — гладкое m-мерное многообразие. Предположим, что G — локальная группа преобразований, регулярно действующая на M с s-мерными орбитами. Тогда существуют гладкое $(m-s)$-мерное многообразие, называемое* фактормногообразием *многообразия M по группе G и обозначаемое M/G, и проекция π: $M \to M/G$, которые обладают следующими свойствами:*

---

[1]) Оно может, однако, не быть хаусдорфовым многообразием; см. последующее обсуждение.

(a) *Проекция π — гладкое отображение многообразий.*

(b) *Точки x и y из M лежат в одной орбите группы G, если и только если $\pi(x)=\pi(y)$.*

(c) *Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли инфинитезимальных образующих действия группы G, то линейное отображение*

$$d\pi\colon TM|_x \to T(M/G)|_{\pi(x)}$$

есть отображение «на» с ядром $\mathfrak{g}|_x=\{\mathbf{v}|_x\colon \mathbf{v}\in\mathfrak{g}\}$.

Доказательство. Как и выше, M/G — это просто множество всех орбит группы G на M. Координатные карты на M/G строятся с помощью специальных локальных координатных карт на M (по теореме Фробениуса 1.43), учитывая регулярность группы G. Локальные координаты $y_\alpha=(y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^m)$ на такой карте U_α таковы, что каждая орбита пересекает U_α не больше, чем по одному слою $\mathcal{O}\cap U_\alpha=\{y_\alpha^1=c_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^{m-s}=c_\alpha^{m-s}\}$, причем постоянные $c_\alpha^1, \ldots, c_\alpha^{m-s}$ единственным образом определяют орбиту $\mathcal{O}$. Соответствующая координатная карта V_α на M/G определяется как множество всех орбит, имеющих непустое пересечение с U_α, так что

$$V_\alpha=\{w\in M/G\colon \pi^{-1}\{w\}\cap U_\alpha\neq\varnothing\}.$$

Локальные координаты на V_α определяются координатами $y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^{m-s}$ слоя; иными словами, координатное отображение $\tilde{\chi}_\alpha\colon V_\alpha\to\mathbb{R}^{m-s}$ определено так, что $\tilde{\chi}_\alpha(w)=(c_\alpha^1, \ldots, c_\alpha^{m-s})$, когда $\pi^{-1}\{w\}$ пересекает U_α в слое, заданном $y_\alpha^1=c_\alpha^1, \ldots$ $\ldots, y_\alpha^{m-s}=c_\alpha^{m-s}$. Очевидно, что проекция $\pi\colon M\to M/G$ является в этих координатах гладкой, поскольку $\pi(y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^m)=(y_\alpha^1, \ldots$ $\ldots, y_\alpha^{m-s})$ для $y_\alpha\in U_\alpha$. Далее,

$$d\pi\left[\frac{\partial}{\partial y_\alpha^i}\right]=\begin{cases}\partial/\partial y_\alpha^i, & i=1, \ldots, m-s,\\ 0, & i=m-s+1, \ldots, m,\end{cases}$$

так что $d\pi\colon TM|_{y_\alpha}\to T(M/G)|_{\pi(y_\alpha)}$ — отображение «на» с ядром, натянутым на $\partial/\partial y_\alpha^{m-s+1}, \ldots, \partial/\partial y_\alpha^m$, а это то же самое пространство, которое порождается инфинитезимальными образующими алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G в точке y_α.

Единственное, что осталось доказать, — это то, что функции перехода $\tilde{\chi}_\beta\circ\tilde{\chi}_\alpha^{-1}$ являются гладкими на пересечении $V_\alpha\cap V_\beta$ двух локальных координатных карт на M/G. Это более или менее ясно, если соответствующие специальные координатные карты U_α и U_β достаточно малы и пересекаются на M, но это последнее условие не обязано выполняться. Однако здесь можно применить довольно прямое рассуждение, основанное на связности орбит группы G, и это позволяет завершить доказательство; детали приведены в работе Palais [1]. □

Для того чтобы немного лучше разобраться, что означают локальные координаты на фактормногообразии, рассмотрим некоторые общие локальные координаты $x=(x^1, \ldots, x^m)$ на M. Из теоремы 2.17 следует, что, сужая, возможно, координатную карту, мы можем найти полное множество функционально независимых инвариантов $\eta^1(x), \ldots, \eta^{m-s}(x)$, таких, что каждая

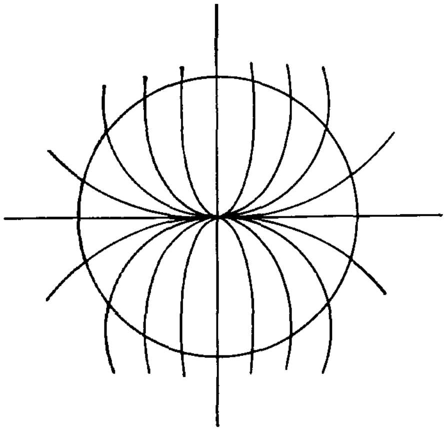

Рис. 7. Фактормногообразие $\mathbb{R}^2/G^2$.

орбита пересекает эту карту не больше, чем по одной связной компоненте, являющейся множеством уровня $\{\eta^1(x)=c_1, \ldots$ $\ldots, \eta^{m-s}(x)=c_{m-s}\}$. Постоянные $c_1, \ldots, c_{m-s}$ единственным образом определяют орбиту, и, следовательно, их можно выбрать в качестве новых локальных координат на фактормногообразии M/G, причем эти координаты согласованы с множеством специальных координат, которые использовались в доказательстве теоремы 3.18. Таким образом, *локальные координаты на фактормногообразии M/G задаются полным множеством функционально независимых инвариантов действия группы*:

$$y^1=\eta^1(x), \quad \ldots, \quad y^{m-s}=\eta^{m-s}(x).$$

Пример 3.19. Рассмотрим группу растяжений

$$G^2\colon (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 y), \quad \lambda > 0.$$

Ее действие регулярно на $M=\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, а орбиты — полупараболы $y=kx^2$ при $x>0$ или при $x<0$, а также положительная и отрицательная полуоси оси y. Поскольку каждая орбита единственным образом определяется ее точкой пересечения с единичной окружностью $S^1=\{x^2+y^2=1\}$, мы можем отождествить M/G^2 с S^1. Локальная координата на M/G^2 задается групповым инвариантом y/x^2 для $x>0$ или $x<0$ или же x^2/y, если $y>0$ или $y<0$, что дает четыре пересекающиеся карты на M/G. (Может быть, лучше выбрать в качестве координаты на M/G многозначный «угловой» инвариант $\theta=\operatorname{arctg}(y/x^2)$.) Очевидно, что в этом случае нельзя найти глобальную координатную карту для всех ненулевых (x, y).

Такая же конструкция работает для произвольной двумерной группы растяжений G^α: $(x, y)\longmapsto(\lambda x, \lambda^\alpha y)$, $\alpha>0$. «Угловой» инвариант $\theta=\operatorname{arctg}(y/x^\alpha)$ обеспечивает отождествление $M/G^\alpha\simeq S^1$. (Случай $\alpha<0$ обсуждается в упр. 3.14.)

Как отмечалось ранее, одна из технических трудностей состоит в том, что фактормногообразие M/G может не удовлетворять условию отделимости Хаусдорфа. Поэтому мы естественно приходим к рассмотрению более общего понятия многообразия, чем обычно. Иными словами, хотя M/G всегда будет удовлетворять требованиям (a) и (b) определения 1.1, на M/G могут существовать различные точки y и $\tilde{y}$, которые нельзя «разделить» открытыми окрестностями, т. е. если U — *произвольная* окрестность точки y и $\tilde{U}$ — *произвольная* окрестность точки $\tilde{y}$, то $U\cap\tilde{U}\neq\varnothing$. Можно развить целую теорию многообразий без аксиомы отделимости Хаусдорфа, и в этом случае, как показал Пале (Palais [1]), в той же «категории» сохраняется конструкция фактормногообразия. Другой подход, который чаще принимается на практике, состоит в том, что нехаусдорфовы «особенности» убираются с фактормногообразия M/G тем, что мы ограничиваем наше внимание достаточно малым открытым подмногообразием $\tilde{M}$ исходного многообразия M, таким, что $\tilde{M}/G\subset M/G$ — открытое хаусдорфово подмногообразие. Например, $\tilde{M}$ может быть координатной картой, на которой мы строим полное множество функционально независимых инвариантов. В этом случае $\tilde{M}/G$ будет обладать глобальными координатами, заданными этими инвариантами, и, таким образом, это фактормногообразие может быть реализовано как открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^{m-s}$.

Пример 3.20. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{v}=(x^2+y^2)\partial_x$ на $\mathbb{R}^2$. Порожденная им однопараметрическая группа G имеет вид $(\tilde{x}, \tilde{y})=\exp(\varepsilon\mathbf{v})(x, y)$, где $\tilde{y}=y$ и

$$\tilde{x}=\begin{cases} y\operatorname{tg}(\varepsilon y+\operatorname{arctg}(x/y)), & y\neq0,\\ x/(1-\varepsilon x), & y=0.\end{cases}$$

Орбиты группы G состоят из

(a) начала координат $(0, 0)$,

(b) горизонтальных прямых $\{y = c\}$, $c \neq 0$,

(c) положительной полуоси оси x $\{y = 0, x > 0\}$,

(d) отрицательной полуоси оси x $\{y = 0, x < 0\}$.

Таким образом, группа G действует регулярно на $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Фактормногообразие M/G одномерно и выглядит как экземпляр вещественной прямой, но с двумя «бесконечно близкими» началами координат! В самом деле, единственный инвариант группы G — координата y, каждая орбита, не лежащая на оси x; единственным образом определяется своим вертикальным смещением. Таким образом, для точек из M/G, определенных горизонтальными прямыми (b), координаты вводятся посредством

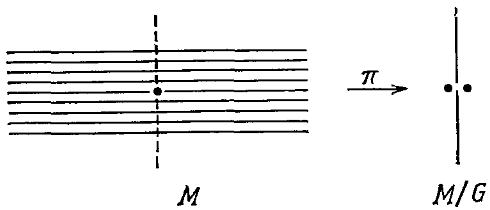

Рис. 8. Нехаусдорфово фактормногообразие.

$\pi(x, y) = y$, $y \neq 0$, так что мы можем отождествить эту часть фактормногообразия M/G с положительной и отрицательной вещественными полуосями, соответствующими образам верхней и нижней полуплоскостей соответственно при проектировании π: $M \to M/G$. Однако, на M/G должны быть *две* точки, отвечающие положительной и отрицательной полуосям оси x в $\mathbb{R}^2$; мы обозначаем их 0_+ и 0_- соответственно. Их нужно рассматривать как два различных, но бесконечно близких начала координат фактормногообразия M/G, которое в остальном выглядит в точности как экземпляр вещественной прямой

$$M/G = \{y > 0\} \cup \{y < 0\} \cup \{0_+\} \cup \{0_-\}.$$

Базисная окрестность «начала координат» 0_+ есть в точности $U_+ = \{y\colon\ y = 0_+$ либо $0 < |y| < \delta_+\}$ для некоторой константы $\delta_+ > 0$, а типичная окрестность точки 0_- — это $U_- = \{y\colon\ y = 0_-$ либо $0 < |y| < \delta_-\}$, $\delta_- > 0$. Очевидно, что $U_+ \cap U_- \neq \varnothing$ независимо от того, каковы δ_+ и δ_-, так что точки 0_+ и 0_- не удовлетворяют условию отделимости Хаусдорфа. (Более уместный физически пример нехаусдорфова факторпространства дают группы растяжений G^α примера 3.19 при $\alpha < 0$; см. упр. 3.14.)

Предложение 3.21. *Пусть группа G регулярно действует на многообразии M с s-мерными орбитами.*

(a) *Гладкая функция F: $M \to \mathbb{R}^l$ является G-инвариантной тогда и только тогда, когда найдется такая гладкая функция $\tilde{F} = F/G$: $M/G \to \mathbb{R}^l$, что $\tilde{F}(x) = F[\pi(x)]$ для всех $x \in M$.*

(b) *Гладкое n-мерное подмногообразие $N \subset M$ является G-инвариантным тогда и только тогда, когда существует гладкое $(n-s)$-мерное подмногообразие $\tilde{N} = N/G \subset M/G$, такое, что $\tilde{N} = \pi[N]$ и, следовательно, $N = \pi^{-1}[\tilde{N}]$.*

(c) *Алгебраическое подмногообразие $\mathcal{S}_F = \{x: F(x) = 0\}$, определенное гладкой функцией F: $M - \mathbb{R}^l$, является G-инвариантным тогда и только тогда, когда найдется гладкое алгебраическое подмногообразие $\mathcal{S}_{\tilde{F}} = \{y : \tilde{F}(y) = 0\}$, определенное функцией $\tilde{F}$: $M/G \to \mathbb{R}^l$, такое, что $\mathcal{S}_{\tilde{F}} = \pi\left[\mathcal{S}_F\right]$. (В этом случае не обязательно $\tilde{F} = F \circ \pi$, если сама функция F не является G-инвариантной.)*

Это предложение — в точности глобальная переформулировка теоремы 2.17 и предложения 2.18, и мы оставляем детали читателю.

Теория размерностей

В случае групп растяжений предыдущие конструкции делают простым доказательство так называемой Пи-теоремы, являющейся основанием метода теории размерностей. В любой физической задаче имеются определенные фундаментальные физические величины, такие, как длина, время, масса и т. д., которые можно растягивать независимо друг от друга. Пусть $z^1, \ldots, z^r$ обозначают эти величины, так что рассматриваемая группа осуществляет такие преобразования:

$$(z^1, \ldots, z^r) \mapsto (\lambda_1 z^1, \ldots, \lambda_r z^r),$$

где масштабные множители $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ — произвольные положительные вещественные числа. Таким образом, соответствующая группа — это в точности декартово произведение r экземпляров мультипликативной группы $\mathbb{R}^+$ положительных вещественных чисел. Кроме того, существуют определенные производные физические величины, такие, как скорость, сила, плотность жидкости и т. д., которые также растягиваются при растяжении фундаментальных физических единиц. Если обозначить эти величины через $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и предположить, что все они выражены через одни и те же фундаментальные единицы, то действие нашей группы растяжений на эти производные величины принимает вид

$$\lambda\cdot(x^1,\ \ldots,\ x^m)=\left(\lambda_1^{\alpha_{11}}\lambda_2^{\alpha_{21}}\ldots\lambda_r^{\alpha_{r1}}x^1,\ \ldots,\ \lambda_1^{\alpha_{1m}}\lambda_2^{\alpha_{2m}}\ \ldots\ \lambda_r^{\alpha_{rm}}x^m\right),\tag{3.28}$$

где показатели α_{ij}, $i=1,\ \ldots,\ r$, $j=1,\ \ldots,\ m$, предписаны физической завнсимостью величин x^j от фундаментальных единиц y^i. Например, если y^1 обозначает длину, y^2 — время и y^3 — массу, то изменение скорости v, равной отношению длины ко времени, и плотности ρ, равной отношению массы к объему (или к кубу длины), задается формулами

$$\lambda\cdot v=\lambda_1\lambda_2^{-1}v,\quad \lambda\cdot\rho=\lambda_1^{-3}\lambda_3\rho.$$

Если некоторая величина остается неизменной при данных растяжениях, то она называется *безразмерной*. В первой части Пи-теоремы утверждается, что число независимых безразмерных величин определяется числом независимых инвариантов соответствующего действия группы.

Вообще говоря, возникают некоторые функциональные соотношения вида $F(x^1,\ \ldots,\ x^m)=0$ между физическими величинами. Например, для поверхностных волн в глубокой воде скорость v является функцией от длины волны l и гравитационного ускорения g. (В этой простой модели мы пренебрегаем поверхностным натяжением и другими эффектами). Такое соотношение называется *масштабно инвариантным*, если оно не меняется при изменении масштабов измерения основных величин. Масштабно инвариантные соотношения часто имеют большое значение в физике. Вторая часть Пи-теоремы утверждает, что всякое такое соотношение можно выразить только через безразмерные комбинации физическнх величин. Например, в рассмотренном нами примере, если $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ — коэффициенты растяжения длины, времени и массы соответственно, то

$$\lambda\cdot(v,\ l,\ g)=\left(\lambda_1\lambda_2^{-1}v,\ \lambda_1 l,\ \lambda_1\lambda_2^{-2}g\right).$$

Очевидно, что единственная безразмерная величина здесь — это число Фруда v^2/lg или его степени. Таким образом, всякое масштабно инвариантное соотношение, определяющее скорость волны как функцию от длины волны и гравитацнонного ускорения, должно иметь вид

$$v=c\sqrt{lg}.$$

Здесь остается определить только константу c. Теперь мы приведем Пи-теорему полностью.

Теорема 3.22. *Пусть $z^1,\ \ldots,\ z^r$ — фундаментальные физические величины, масштабы измерений которых меняются независимо: $z^i\longmapsto\lambda_i z^i$. Пусть $x^1,\ \ldots,\ x^m$ — производные величины, изменяю-*

щиеся в соответствии с формулой (3.28), *где* $A=(\alpha_{ij})$ — *некоторая матрица размера* $r\times m$, *элементы которой — константы. Пусть* s — *ранг матрицы* A. *Тогда существует* $m-s$ *независимых безразмерных «степенных произведений»*

$$\pi^k=(x^1)^{\beta_{1k}}(x^2)^{\beta_{2k}}\ldots(x^m)^{\beta_{mk}},\quad k=1,\ \ldots,\ m-s, \tag{3.29}$$

обладающих тем свойством, что всякая другая безразмерная величина может быть записана как функция от $\pi^1,\ \ldots,\ \pi^{m-s}$. *Если* $F(x^1,\ \ldots,\ x^m)=0$ — *произвольное масштабно инвариантное соотношение на данные производные величины, то существует эквивалентное соотношение* $\bar{F}(x^1,\ \ldots,\ x^m)=0$, *которое может быть выражено только через указанные безразмерные степенные произведения*:

$$\tilde{F}=\tilde{F}(\pi^1,\ \ldots,\ \pi^{m-s})=0.$$

Доказательство. Рассмотрим положительный октант в $\mathbb{R}^m$ $M=\{x=(x^1,\ \ldots,\ x^m)\colon\ x^i>0,\ i=1,\ \ldots,\ m\}$. Если $G=\mathbb{R}^+\times\ldots\times\mathbb{R}^+$ есть r-кратное декартово произведение мультипликативной группы $\mathbb{R}^+$ на себя, то (3.28) определяет глобальное действие группы G на M. Инфинитезимальные образующие этого действия получаются дифференцированием (3.28) по λ_i и подстановкой $\lambda_1=\ldots=\lambda_r=1$. Тогда

$$\mathbf{v}_i=\alpha_{i1}x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\alpha_{i2}x^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\ldots+\alpha_{im}x^m\frac{\partial}{\partial x^m}$$

будет образующей, соответствующей i-му экземпляру $\mathbb{R}^+$ в G. Размерность линейной оболочки векторов $\mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_r$ в точке $x\in M$, очевидно, такая же, как ранг матрицы $A=(\alpha_{ij})$, а именно s, следовательно, орбиты группы G s-мерны. Глобальные инварианты для G на всем октанте M даются степенными произведениями вида (3.29), если $\mathbf{v}_i(\pi^k)=0$, $i=1,\ \ldots,\ r$. Это выполняется, если и только если показатели степени β_{jk} в (3.29) удовлетворяют линейной системе

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{jk}=0,\quad i=1,\ \ldots,\ r. \tag{3.30}$$

$m-s$ линейно независимых решений этой системы приводят к $m-s$ функционально независимым степенным произведениям. Кроме того, эти степенные произведения однозначно определяют орбиты группы G на M. В самом деле, если $\pi^k(x)=\pi^k(\tilde{x})$ для всех k, положим $x^j=e^{t_j}\tilde{x}^j$, $j=1,\ \ldots,\ m$. Показатели степени t_j удовлетворяют линейной системе $\sum_j t_j\beta_{jk}=0$, $k=1,\ \ldots,\ r$. Поскольку мы построили базис нуль-пространства матрицы A, это верно, если и только если существуют вещественные числа $s_1, \ldots, s_r$, такие, что $t_j = \sum_i s_i a_{ij}$. Но тогда $x = \lambda \cdot \tilde{x}$, где $\lambda_i = e^{s_i}$, и, следовательно, x и $\tilde{x}$ лежат в одной и той же орбите группы G. Таким образом, поскольку каждая орбита представляет собой общее множество уровня глобальных инвариантов $\pi^1, \ldots, \pi^{m-s}$, действие группы G автоматически является регулярным и $\pi^1, \ldots, \pi^{m-s}$ доставляют глобальные координаты на факторнмногообразии G/M, которое можно отождествить с положительным октантом пространства $\mathbb{R}^{m-s}$. Вторая часть теоремы теперь непосредственно следует из ч. (с) предложения 3.21. □

Пример 3.23. Предположим, что сопротивление D объекта, помещенного в жидкость, определяется безразмерной функцией от плотности жидкости ρ, скорости жидкости v, диаметра объекта d и вязкости жидкости μ. Обозначая через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ коэффициенты растяжения длины, времени и массы соответственно, мы получаем, что соответствующие физические величины изменяются следующим образом:

$$\lambda \cdot (\rho, v, d, \mu, D) = (\lambda_1^{-3}\lambda_3\rho, \lambda_1\lambda_2^{-1}v, \lambda_1 d, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3\mu, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3 D).$$

(Например, сопротивление D имеет размерность длина $\times$ $\times$ масса/(время)^2 и т. д.) Матрица A в этом случае принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и имеет ранг 3. Таким образом, имеется $5 - 3 = 2$ независимых безразмерных степенных произведения. Чтобы отыскать их, нам нужно в соответствии с (3.30) проанализировать нуль-пространство матрицы A, которое натянуто на вектор-столбцы $(1, 1, 1, -1, 0)^T$, $(-1, -2, -2, 0, 1)^T$. Они соответствуют независимым степенным произведениям

$$\pi_1 = R = \frac{\rho v d}{\mu}, \quad \pi_2 = K = \frac{D}{\rho v^2 d^2},$$

первое из которых — *число Рейнольдса* для течения. В соответствии с Пи-теоремой масштабно инвариантное соотношение между нашими пятью величинами должно иметь вид $F(R, K) = 0$; разрешая его относительно K, получаем, что сопротивление задается формулой $D = \rho v^2 d^2 h(R)$, где h — функция, вид которой нужно найти.