3.5. ПРОДОЛЖЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ, И РЕДУКЦИЯ

В программе строгого обоснования общей процедуры построения инвариантных относительно группы решений дифференциальных уравнений имеется одно основное препятствие, которое нужно преодолеть. Вообще говоря, если система дифференциальных уравнений Δ определена на открытом подмножестве $M \subset X \times U$ пространства независимых и зависимых переменных, на котором регулярно действует группа симметрий G, то редуцированная система дифференциальных уравнений Δ/G для G-инвариантных решений будет естественно определена на фактормногообразии M/G. Трудность состоит в том, что, хотя M/G обладает структурой гладкого многообразия, оно, вообще говоря, не будет открытым подмножеством никакого евклидова пространства, и поэтому наши предыдущие построения пространств струй и продолжения действия групп больше неприменимы. На практике, однако, мы работаем в локальных координатных картах и поэтому можем сделать более скромное предположение, что существует $p+q-s$ функционально независимых инвариантов на M, $\eta^1(x,u), \ldots, \eta^{p+q-s}(x,u)$, определяющих глобальные координаты на фактормногообразии M/G, которое можно поэтому рассматривать как открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^{p+q-s}$. Здесь s обозначает размерность орбит группы G. В этот момент появляется вторая трудность, состоящая в том, что, вообще говоря, нет естественного способа различить, какие из инвариантов η^j будут новыми независимыми переменными, а какие будут новыми зависимыми переменными. Если группа G действует проектируемо, то, как мы видели, имеется в точности $p-s$ инвариантов, зависящих только от x, которые и можно взять за новые независимые переменные. Оставшиеся q инвариантов становятся новыми зависимыми переменными. В общем случае, однако, нет способа последовательно определить новые независимые и зависимые переменные, и мы вынуждены произвольным образом выбирать среди данных инвариантов $p-s$, назначая их на роль независимых переменных, $y=(y^1, \ldots, y^{p-s})$, а остальные q — на роль зависимых переменных, $v=(v^1, \ldots, v^q)$. Таким образом, мы считаем M/G подмножеством евклидова пространства $Y \times V \simeq \mathbb{R}^{p-s} \times \mathbb{R}^q$ и, следовательно, можем найти явный вид редуцированной системы Δ/G, рассматривая v как функции от y. Уже роли независимых и зависимых переменных перестают быть ясными. Различный выбор инвариантов приведет, казалось бы, к различным выражениям для редуцированной системы, но — и это нужно подчеркнуть — они все будут эквивалентны относительно перемены ролей независимых и зависимых переменных, что напоминает преобразование годографа из гидродинамики.

Все это было бы хорошо для наших целей, если бы не еще одна сложность. Раз мы выбрали для нашей редуцированной системы Δ/G новые независимые переменные y и зависимые переменные v, то нет никакой гарантии, что данная функция $v=h(y)$ будет соответствовать гладкой однозначной функции $u=f(x)$, и, наоборот, может оказаться, что G-инвариантные функции $u=f(x)$ не соответствуют гладким функциям вида $v=h(y)$ относительно данного выбора независимых и зависимых переменных. Проблема в обоих случаях состоит в том, что функция на одном из пространств может привести к «функции» с бесконечными производными или к «многозначной функции» на другом пространстве, и причина, возможно, — в нашем искусственном разделении координат на независимые и зависимые переменные. Быть может это станет яснее, если привести для иллюстрации пример.

Пример 3.24. Положим, $p=2$, $q=1$, так что $M=X\times U$ имеет координаты (x, t, u). Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований G: $(x, t, u)\longmapsto(x, t+\varepsilon, u)$. Предположим, что вместо естественных инвариантов x и u мы, чтобы задать координаты на $M/G=\mathbb{R}^2$, выбрали инварианты $y=x+u$, $v=u$, прнчем y — новая независимая, а v — новая зависимая переменные. Всякая функция $v=h(y)$ на $M/G=Y\times V$ будет определять двумерное G-инвариантное подмногообразие многообразия M, заданное уравнением $u=h(x+u)$, но, если $h'(y)\neq 1$, это уравнение не будет определять u явно как функцию от x (и t). Например, функция $v=y$ на M/G соответствует вертикальной плоскости $\{x=0\}$, которая, очевидно, не является графиком функции $u=f(x, t)$. С другой стороны, G-инвариантная функция $u=-x$ приводит к вертикальной прямой $y=0$, которая не является графиком функции вида $v=h(y)$. Хотя этот пример несколько искусственный, такое явление может быть неизбежным и в более сложных ситуациях.

Главная причина всех этих технических трудностей — наше стремление различить независимые и зависимые переменные, что становится все более непригодным в свете предыдущих рассуждений. Если отказаться от этого «предрассудка», то общая конструкция редуцированной системы для инвариантных относительно группы решений становится очень естественной. Раз построена основная бескоординатная конструкция, с технической стороной, включая введение конкретных независимых и зависимых переменных и на M, и на M/G, можно справиться с минимумом трудностей. Поэтому мы начинаем этот параграф с бескоординатной переформулировки нашей основной конструкции пространства струй, на этот раз справедливой для произвольных многообразий, а не только для окрытых подмножеств евклидова пространства.

Расширенные расслоения струй

Начнем с более тщательного рассмотрения наших предыдущих построений пространства струй $M^{(n)}$ для $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Каждая точка $(x_0, u_0^{(n)}) \in M^{(n)}$ определяется производными гладкой функции $u = f(x)$, график которой проходит через основную точку $z_0 = (x_0, u_0) \in M$, причем $u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0)$. Говорят, что две такие функции *n-эквивалентны* в точке z_0, если они определяют одну и ту же точку в $M^{(n)}|_{z_0} \equiv \{(x, u^{(n)}) : (x, u) = z_0\}$; иными словами, f и $\tilde{f}$ n-эквивалентны в точке (x_0, u_0), если их производные в этой точке до порядка n включительно совпадают:

$$\partial_J f^\alpha (x_0) = \partial_J \tilde{f}^\alpha (x_0), \quad \alpha = 1, \ldots, q, \quad 0 \leqslant \# J \leqslant n.$$

С этой точки зрения пространство струй $M^{(n)}|_{z_0}$ можно рассматривать как множество классов n-эквивалентности на пространстве всех гладких функций $u = f(x)$, графики которых проходят через точку $z_0 = (x_0, u_0)$.

Таким образом, важным объектом является не функция f, а ее график $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$, который представляет собой p-мерное подмногообразие многообразия M. Однако не каждое p-мерное подмногообразие многообразия M является графиком гладкой функции, так что не каждое p-мерное подмногообразие, проходящее через точку $z_0 \in M$, будет определять точку в $M^{(n)}|_{z_0}$. Наша цель здесь — «расширить» пространство струй $M^{(n)}|_{z_0}$ так, чтобы включить эти многообразия с «вертикальными касательными». С помощью теоремы о неявной функции можно выяснить, какие подмногообразия являются графиками гладких функций.

Предложение 3.25. *p-мерное подмногообразие $\Gamma \subset M \subset X \times U$ является графиком гладкой функции $u = f(x)$, если и только если Γ обладает следующими свойствами:*

(a) Трансверсальность. Γ *трансверсально пересекает вертикальное пространство $U_{z_0} = \{(x_0, u) : u \in U\}$ для любой точки $z_0 = (x_0, u_0) \in \Gamma$, что означает $T\Gamma|_{z_0} \cap TU_{z_0}|_{z_0} = \{0\}$.*

(b) Однозначность. Γ *пересекает каждое вертикальное пространство* U_{z_0}, $z_0 \in M$, *не более чем в одной точке.*

Конечно, если мы сделаем замену координат на M, требуемые вертикальные плоскости изменятся, так что подмногообразие, которое было графиком функции в одной системе координат, может не быть таковым в другой. Например, парабола $u = x^2$ является графиком функции, если $x \in \mathbb{R}$ — независимая и $u \in \mathbb{R}$ — зависимая переменные, но если мы возьмем $y = u$ в качестве новой независимой и $v = x$ в качестве новой зависимой переменных, то для этой параболы будут нарушаться условие трансверсальности в начале координат и условие однозначности для всех $y > 0$. Однако, если у нас имеется достаточно малое p-мерное подмногообразие Γ, мы всегда можем снабдить его локальными координатами так, что оно будет графиком функции.

Раз мы допускаем произвольные замены независимых и зависимых переменных, бессмысленно исключать некоторые p-мерные подмногообразия только потому, что в некотором данном множестве координат могут нарушиться условия трансверсальности или однозначности. С этой точки зрения роль функций $u = f(x)$ играют теперь *произвольные* p-мерные подмногообразия $\Gamma \subset M$. Мы видим, что с этого момента освободились от зависимости от евклидовых координат (x, u), и последующие определения будут иметь смысл для произвольных $(p+q)$-мерных многообразий M.

Определение 3.26. Пусть Γ и $\tilde{\Gamma}$ — регулярные p-мерные подмногообразия гладкого многообразия M. Мы говорим, что Γ и $\tilde{\Gamma}$ имеют *касание n-го порядка* в их общей точке $z_0 \in \Gamma \cap \tilde{\Gamma}$, если и только если существует локальная координатная карта W, содержащая $z_0 = (x_0, u_0)$, с координатами $(x, u) = (x^1, \ldots, x^p, u^1, \ldots, u^q)$, такая, что $\Gamma \cap W$ и $\tilde{\Gamma} \cap W$ совпадают с графиками гладких функций $u = f(x)$ и $u = \tilde{f}(x)$, являющихся n-эквивалентными в точке z_0: $\mathrm{pr}^{(n)} f(x_0) = \mathrm{pr}^{(n)} \tilde{f}(x_0)$.

Нетрудно видеть, что свойство иметь касание n-го порядка в точке z_0 не зависит от выбора локальных координат в точке z_0, если только оба подмногообразия трансверсальны вертикальному пространству U_{z_0} и, следовательно, локально являются графиками гладких функций. Очевидно, касание n-го порядка определяет отношение эквивалентности на множестве p-мерных подмногообразий, проходящих через точку.

Определение 3.27. Пусть M — гладкое многообразие и p — фиксированное целое число, $0 < p < \dim M$. *Расширенное пространство струй* $M_*^{(n)}\big|_z$ определяется как множество классов эквивалентности множества всех p-мерных подмногообразий, проходящих через точку z, по отношению эквивалентности касания n-го порядка. *Расширенное расслоение струй* — это объединение всех этих пространств: $M_*^{(n)} = \bigcup\limits_{z \in M} M_*^{(n)}\big|_z$.

Если $\Gamma \subset M$ — произвольное p-мерное подмногообразие и $z \in \Gamma$, то n-е *продолжение* $\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma\,|_z \in M_*^{(n)}\big|_z$ — класс эквивалентности, определяемый подмногообразием Γ. Если Γ и $\tilde{\Gamma}$ имеют касание n-го порядка в точке z_0, они, очевидно, имеют касание k-го порядка для любого $k < n$, так что имеется естественная проекция π_k^n: $M_*^{(n)} \to M_*^{(k)}$, $\pi_k^n(\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma) = \mathrm{pr}^{(k)}\Gamma$. В частности, $M_*^{(0)} \simeq \simeq M$. Следующий результат проясняет, в каком смысле расширенное пространство струй является пополнением обычного пространства струй (в том же смысле, в каком проективное пространство — «пополнение» евклидова пространства).

Теорема 3.28. *Если M — гладкое $(p+q)$-мерное многообразие, то расширенное расслоение струй $M^{(n)}$, определяемое p-мерными подмногообразиями, является гладким $p + q\binom{p+n}{n}$-мерным многообразием. Если $\Gamma \subset M$ — произвольное регулярное p-мерное подмногообразие, то его продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma$ является регулярным p-мерным подмногообразием многообразия $M_*^{(n)}$. Если $\tilde{M} \subset M$ — локальная координатная карта, определяющая локальный выбор независимых и зависимых переменных (x, u), то подпространство*

$$\tilde{M}^{(n)}\,|_z \equiv \{\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma\,|_z\colon\ z \in \Gamma,\ \ T\Gamma\,|_z \cap TU_z\,|_z = \{0\}\},$$

заданное трансверсальными подмногообразиями Γ, проходящими через точку z, является открытым всюду плотным подмножеством расширенного пространства струй $M_*^{(n)}\big|_z$. Более того, объединение всех таких подпространств $\tilde{M}^{(n)}$ изоморфно обычному евклидову пространству струй: $\tilde{M}^{(n)} \simeq \tilde{M} \times U_1 \times \ldots \times U_n = \{(x, u^{(n)})\colon (x, u) \in \tilde{M}\}$. Если $\Gamma \subset \tilde{M}$ совпадает с графиком гладкой функции $u = f(x)$, то при указанном отождествлении его продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma \subset \tilde{M}^{(n)} \subset \tilde{M}_*^{(n)}$ совпадает с графиком продолжения функции f: $\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma = \{(x, \mathrm{pr}^{(n)}f(x))\}$.

Таким образом, исключая особое подмногообразие $\mathscr{V}^{(n)}\big|_z \equiv \equiv \tilde{M}_*^{(n)}\big|_z \setminus \tilde{M}^{(n)}\big|_z$, состоящее из продолжений нетрансверсальных подмногообразий, расширенное пространство струй выглядит в точности как обычное пространство струй, обсуждавшееся в гл. 2. Доказательство этой теоремы не составляет труда; иллюстративный пример должен показать, как можно восстановить детали в общем случае.

Пример 3.29. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ открыто, и пусть $p = 1$, так что мы рассматриваем одномерные подмногообразия (кривые) в M. Две кривые задают одну и ту же точку в $M_*^{(n)}\big|_{z_0}$, если и только если в некоторых локальных координатах вблизи точки $z_0 = (x_0, y_0)$ они задаются как графики функций $u = f(x)$, $u = \tilde{f}(x)$ с одинаковыми производными в точке x_0 до порядка n включительно:

$$u_0 = f(x_0) = \tilde{f}(x_0), \quad f'(x_0) = \tilde{f}'(x_0), \ \ldots, \ f^{(n)}(x_0) = \tilde{f}^{(n)}(x_0).$$

Тогда в случае $n = 1$ кривые Γ и $\tilde{\Gamma}$ имеют в точке z_0 касание первого порядка, если и только если они касаются в точке z_0. Таким образом, $M_*^{(1)}\big|_{z_0}$ задается множеством всех касательных к кривым, проходящим через точку z_0. Поскольку каждая такая прямая определяется углом θ, который она составляет с горизонталью, меняющимся от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$, мы можем отождествить $M_*^{(1)}\big|_{z_0}$ с окружностью S^1, где «угловая» координата удовлетворяет условию $0 \leqslant \theta < \pi$. Топологически тогда $M^{(1)} \simeq M \times S^1$. Выбирая координаты (x, u) на M, мы получаем, что евклидово пространство струй $M^{(1)}\big|_{z_0}$ является подмножеством пространства $M_*^{(1)}\big|_{z_0}$, заданным теми кривыми, касательные к которым не вертикальны, т. е. $\theta \neq \pi/2$. Мы можем отождествить это подмножество с обычным пространством струй $\{(x, u, u_x)\}$, полагая $u_x = \operatorname{tg}\theta$.

Обращаясь к случаю $n = 2$, мы видим, что две кривые Γ и $\tilde{\Gamma}$ имеют касание второго порядка в точке z_0, если и только если они соприкасаются в точке z_0, т. е. имеют там одну и ту же касательную и одинаковую кривизну. Таким образом, $M_*^{(2)}\big|_{z_0}$ можно отождествить с множеством всех окружностей положительного радиуса, проходящих через точку z_0, включая вырожденные прямые. Я утверждаю, что это пространство топологически эквивалентно листу Мёбиуса! Естественное проектирование $\pi_1^2\colon M_*^{(2)}\big|_{z_0} \to M_*^{(1)}\big|_{z_0} \simeq S^1$ ставит в соответствие общую касательную каждой паре соприкасающихся кривых, так что прообраз точки $\theta \in S^1$ (т. е. касательной, проходящей через точку z_0) изоморфен $\mathbb{R}$; дополнительная координата указывает кривизну кривой, имеющей данное направление касательной. Таким образом, локально $M_*^{(2)}|_{z_0}$ выглядит как декартово произведение дуги S^1 на $\mathbb{R}$. Однако если мы фиксируем кривизну, а θ будет возрастать от 0 до π, то по существу мы повернем данную кривую на угол π. В результате получится кривая с той же касательной, но кривизна ее изменит знак! Таким образом, когда мы обходим окружность S^1, экземпляр $\mathbb{R}$ над каждой точкой поворачивается один раз, и мы получаем лист Мёбиуса. В локальных

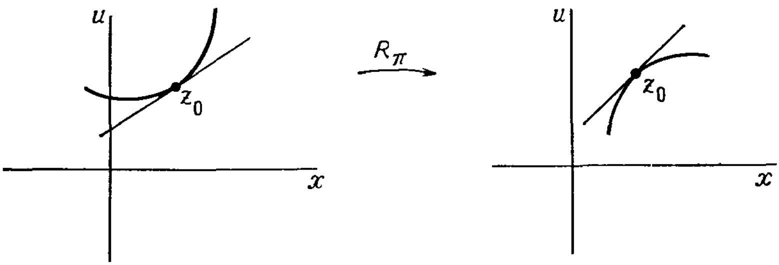

Рис. 9. Расширенное пространство струй M_*^2 для $M \subset \mathbb{R}$.

координатах (x, u) открытое всюду плотное подмножество $M^{(2)}|_{z_0} \subset M_*^{(2)}|_{z_0}$ получается разрезанием листа вдоль линии $\theta = \pi/2$. Получаемое в результате подмножество изоморфно двумерной плоскости $U_1 \times U_2 = \{(u_x, u_{xx})\}$.

Дальнейшие результаты о структуре расширенного пространства струй приводятся в упражнениях.

Дифференциальные уравнения

Определение 3.30. Пусть M — гладкое многообразие с расширенным расслоением струй $M_*^{(n)}$, заданным p-мерными подмногообразиями. *Система дифференциальных уравнений* над M определяется замкнутым алгебраическим подмногообразием $\mathcal{S}_\Delta^* \subset M_*^{(n)}$. *Решение* системы — это p-мерное подмногообразие Γ, продолжение которого целиком лежит внутри упомянутого выше алгебраического подмногообразия: $\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma \subset \mathcal{S}_\Delta^*$.

Если выбрать локальную координатную карту $\tilde{M} \subset M$ и сосредоточить внимание на подмножестве $\tilde{M}^{(n)} \subset \tilde{M}_*^{(n)}$, то мы придем к нашему первоначальному понятию системы дифференциальных уравнений: $\mathcal{S}_\Delta = \mathcal{S}_\Delta^* \cap \tilde{M}^{(n)} = \{(x, u^{(n)}): \Delta(x, u^{(n)}) = 0\}$ для некоторого множества гладких функций Δ: $\tilde{M}^{(n)} \to \mathbb{R}^l$. Подмногообразие Γ, являющееся графиком гладкой функции $u = f(x)$, будет решением в указанном смысле, если и только если соответствующая функция f — решение в традиционном смысле: $\Delta(x, \mathrm{pr}^{(n)}f(x)) = 0$. В дополнение мы предполагаем возможность и многозначных решений, и решений с вертикальными касательными (бесконечными производными), рассматривая их в некотором смысле как «пределы» классических решений. Всякая «традиционная» система дифференциальных уравнений, определенная на открытом подмножестве M евклидова пространства $X \times U$, всегда может быть превращена в такую «расширенную» систему — нужно взять замыкание ее алгебраического подмногообразия в $M_*^{(n)}$: $\mathcal{S}_\Delta^* = \overline{\mathcal{S}}_\Delta$.

Пример 3.31. Рассмотрим нелинейное волновое уравнение $u_t + uu_x = 0$. Здесь основное пространство $M \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ с координатами (x, t, u), а уравнение определяет алгебраическое подмногообразие в пространстве 1-струй $M^{(1)} \simeq \mathbb{R}^5$ с координатами $(x, t; u; u_x, u_t)$. Расширенное пространство струй $M_*^{(1)}|_z$, как и в предыдущем примере, эквивалентно множеству всех плоскостей, проходящих через точку $z = (x, t, u)$. Каждая плоскость единственным образом определяется своим направлением нормали $\mathbf{n} = (\lambda, \mu, \nu)$, а два ненулевых вектора нормали $\mathbf{n}$, $\tilde{\mathbf{n}}$ определяют одну и ту же плоскость, если и только если они являются скалярными кратными: $\tilde{\lambda} = \varkappa\lambda$, $\tilde{\mu} = \varkappa\mu$, $\tilde{\nu} = \varkappa\nu$. Величины $[\lambda, \mu, \nu]$, отвечающие вектору нормали, доставляют, таким образом, «однородные» координаты на $M_*^{(1)}|_z$ (которое изоморфно $\mathbb{RP}^2$).

Функция $u = f(x, t)$ определяет двумерное подмногообразие Γ_f с нормалью $\mathbf{n} = (-f_x, -f_t, 1)$, так что $\lambda = -f_x$, $\mu = -f_t$, $\nu = 1$ образуют множество однородных координат для $\mathrm{pr}^{(1)}\Gamma_f$. Подмногообразие более общего вида $\Gamma = \{F(x, t, u) = 0\}$ имеет нормаль $\mathbf{n} = \nabla F$, и, следовательно, в наших координатах $\mathrm{pr}^{(1)}\Gamma = \{(x, t; u; [F_x, F_t, F_u])\}$. В частности, Γ и Γ_f имеют одну и ту же касательную плоскость, если и только если их однородные координаты эквивалентны: $F_x = -\varkappa f_x$, $F_t = -\varkappa f_t$, $F_u = \varkappa$, откуда мы выводим известные формулы $u_x = -F_x/F_u$, $u_t = -F_t/F_u$. Следовательно, $M^{(1)}|_z$ является открытым подмножеством пространства $M_*^{(1)}|_z$, где третья однородная координата ν не обращается в нуль, и в этом случае $u_x = -\lambda/\nu$, $u_t = -\mu/\nu$.

Если мы подставим эти выражения в исходное уравнение, мы получим явную формулу для расширенного подмногообразия

$$\mathcal{S}_\Delta^* = \{(x, t; u; [\lambda, \mu, \nu]) \colon \lambda + u\mu = 0\}.$$

Решением тогда будет двумерное подмногообразие $\Gamma = \{F(x, t, u) = 0\}$, такое, что $\mathrm{pr}^{(1)}\Gamma \subset \mathcal{S}_\Delta^*$. Это означает, что $\partial_t F + u\partial_x F =$

$= 0$ ($\Delta F \neq 0$). Это уравнение теперь можно решить непосредственно методом характеристик § 2.1. Мы получим общее решение $F = F(x - tu, u)$. Иначе, мы можем использовать преобразование типа годографа и выбрать новые независимые переменные t и u и новую зависимую переменную x. Заметим, что $x_t = -\mu/\lambda$, $x_u = -\nu/\lambda$, так что в координатах (t, u; x; x_t, x_u) на $M_*^{(1)}$ уравнение принимает вид $x_t = u$, а это уравнение элементарно решается: $x = tu + h(u)$, где h — произвольная функция от u. Заметим, что, хотя такой выбор координат приводит к глобально определенным решениям, в исходных координатах (x, t; u) решения могут стать многозначными, что приводит к известному явлению разрушения волн. (В нашей теперешней интерпретации эти многозначные функции *остаются* решениями, тогда как в физических приложениях нужно заменить их решениями, содержащими ударные волны.)

Действия групп

Если g: $M \to M$ — произвольный диффеоморфизм и $\Gamma \subset M$ — некоторое p-мерное подмногообразие, то $g \cdot \Gamma = \{g \cdot x: x \in \Gamma\}$ также является p-мерным многообразием. Кроме того, g сохраняет отношение эквивалентности касания n-го порядка, так что имеется индуцированный диффеоморфизм $\mathrm{pr}^{(n)} g$ расширенного пространства струй $M_*^{(n)}$:

$$\mathrm{pr}^{(n)} g\,(\mathrm{pr}^{(n)} \Gamma\,|_z) = \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot \Gamma)\,|_{g \cdot z}, \quad z \in \Gamma. \tag{3.31}$$

Таким образом, для всякой локальной группы преобразований G, действующей на M, имеется индуцированное действие n-го *продолжения* $\mathrm{pr}^{(n)} G$ на $M_*^{(n)}$. В произвольной локальной координатной карте $\tilde{M} \subset M$ это действие совпадает с нашим предыдущим понятием продолжения на соответствующее евклидово пространство струй $\tilde{M}^{(n)} \subset \tilde{M}_*^{(n)}$. Особенно подчеркнем, что, поскольку *всякое* p-мерное подмногообразие, трансверсально оно или нет, рассматривается теперь как график «функции», мы не беспокоимся больше об областях определения продолженного действия группы; если g определен на M_g, то $\mathrm{pr}^{(n)} g$ определен на всем $M_{g*}^{(n)}$. В частности, если G — глобальная группа преобразований, ее продолжение на $M_*^{(n)}$ *остается* глобальной группой преобразований. (Ср. это с примером 2.26.)

Если $\mathbf{v}$ — векторное поле на M, его продолжение $\mathrm{pr}^{(n)} \mathbf{v}$ является векторным полем на $M_*^{(n)}$, которое порождает продолжение $\mathrm{pr}^{(n)} [\exp(\varepsilon \mathbf{v})]$ однопараметрической группы, порожденной полем $\mathbf{v}$. Поскольку это согласуется с обычным продолжением на любой координатной карте $\tilde{M} \subset M$, мы немедленно заключаем, что формула для $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ такая же, как в теореме 2.36 на подпространстве $\tilde{M}^{(n)} \subset \tilde{M}_*^{(n)}$. (Заметим, что из этого замечания мы выводим инвариантность (2.38) относительно произвольных замен независимых и зависимых переменных!)

Локально разрешимая система дифференциальных уравнений $\mathcal{S}_\Delta^* \subset M_*^{(n)}$ инвариантна относительно действия группы G, если и только если $\mathrm{pr}^{(n)}G$ сохраняет $\mathcal{S}_\Delta^*$, т. е. $\mathrm{pr}^{(n)}g\,[\mathcal{S}_\Delta^*] \subset \mathcal{S}_\Delta^*$. Соответствующий инфинитезимальный критерий состоит в том, что $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ касается $\mathcal{S}_\Delta^*$, если $\mathbf{v}$ — инфинитезимальная образующая группы G. В локальных координатах на $\tilde{M} \subset M$ это приводит к нашему обычному инфинитезимальному критерию инвариантности (2.25), который является и необходимым, и достаточным, когда $\mathcal{S}_\Delta = \mathcal{S}_\Delta^* \cap \tilde{M}^{(n)}$ и локально разрешимо, и имеет максимальный ранг, а полное подмногообразие $\mathcal{S}_\Delta^* \subset \tilde{M}_*^{(n)}$ в точности является замыканием $\mathcal{S}_\Delta$. (Иначе можно было бы проверить инвариантность в другой системе координат.) Таким образом, теория групп симметрий систем дифференциальных уравнений на расширенном расслоении струй ни в каком существенном аспекте не отличается от нашей предыдущей теории групп симметрий дифференциальных уравнений и на самом деле сводится к ней, как только на M вводятся локальные координаты.

Инвариантное пространство струй

Ключом к геометрическому пониманию конструкции решений, инвариантных относительно группы, является выяснение структуры соответствующих подмножеств пространства струй. Предположим, что группа G действует на гладком многообразии M, на котором задана некоторая система дифференциальных уравнений $\mathcal{S}_\Delta^*$. G-инвариантные решения этой системы будут некоторыми p-мерными подмногообразиями $\Gamma \subset M$, отвечающими графикам функций в локальных координатных картах, являющимися локально инвариантными относительно действия группы G. Вообще говоря, эти G-инвариантные подмногообразия будут заполнять не все пространство струй $M_*^{(n)}$, а только некоторое подпространство $I_*^{(n)} = I_*^{(n)}(G)$, называемое *инвариантным пространством* группы G. Оно определяется как

$$I_*^{(n)}\big|_{z_0} \equiv \Big\{ z_0^{(n)} \in M_*^{(n)}\big|_{z_0} : \text{существует локально } G\text{-инвариантное } p\text{-мерное подмногообразие } \Gamma, \text{ проходящее через точку } z_0, \text{ с продолжением } z_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)}\Gamma\big|_{z_0} \Big\}.$$

В большинстве практически интересных случаев M — открытое подмножество некоторого фиксированного евклидова пространства, а $M^{(n)} \subset M_*^{(n)}$ — обычное пространство струй. Соответствующее инвариантное пространство $I^{(n)} = I_*^{(n)} \cap M^{(n)}$, которое определяется продолжениями G-инвариантных функций $u = f(x)$, имеет вид

$$I^{(n)}\big|_{x_0} = \big\{(x_0, u_0^{(n)}) \in M^{(n)}\colon \text{ существует локально } G\text{-инвариантная функция, определенная в окрестности точки } x_0, \text{ такая, что } u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0)\big\}.$$

Для практических целей больше подходит пространство $I^{(n)}$ — с ним легче работать, тогда как его расширение $I_*^{(n)}$ выдвигается на первый план в теоретических доказательствах.

Пример 3.32. Рассмотрим случай $p = 2$, $q = 1$, так что X имеет координаты (x, t), а U — одну зависимую переменную u. Пусть G — группа сдвигов $(x, t; u) \longmapsto (x + \varepsilon, t; u)$ с инфинитезимальной образующей ∂/∂_x. Функция $y = f(x, t)$ является G-инвариантной, если и только если f не зависит от x. Таким образом,

$$I^{(1)} = \{(x, t; u; u_x, u_t)\colon u_x = 0\},$$

поскольку в каждой точке $u_x = \partial f/\partial x$ обращается в нуль, тогда как $u_t = \partial f/\partial t$ может быть выбрано произвольно. Аналогично,

$$I^{(2)} = \{(x, t; u; u_x, u_t; u_{xx}, u_{xt}, u_{tt})\colon u_x = u_{xx} = u_{xt} = 0\}$$

и т. д. В качестве полезного упражнения в этот момент читателю рекомендуется найти $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ в случае группы вращений $G = SO(2)$ с инфинитезимальной образующей $-t\partial_x + x\partial_t$.

В теореме 3.38 мы дадим явную характеризацию инвариантного пространства в общем случае. Однако мы можем уже доказать большинство важных свойств этого пространства, даже не имея точной формулы.

Предложение 3.33. *Пусть M — гладкое многообразие и G — локальная группа преобразований, действующая на M. Тогда инвариантное пространство струй $I_*^{(n)} \subset M_*^{(n)}$, отвечающее группе G, инвариантно относительно действия $\mathrm{pr}^{(n)} G$ на $M_*^{(n)}$:*

$$\mathrm{pr}^{(n)} g\,[I_*^{(n)}] \subset I_*^{(n)}, \quad g \in G.$$

Доказательство. Пусть $z_0^{(n)}$ — точка в $I_*^{(n)}\big|_{z_0}$, так что по определению существует локально G-инвариантное p-мерное подмногообразие Г, проходящее через точку z_0, такое, что $\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma\big|_{z_0}= z_0^{(n)}$. Если g — произвольный элемент группы G, такой, что определено $g\cdot z_0=\tilde z_0$, то преобразованное подмногообразие $\tilde\Gamma = g\cdot\Gamma=\{g\cdot z\colon z\in\Gamma,\ g\cdot z \text{ определено}\}$ также является локально G-инвариантным. (Почему?) Таким образом, в силу (3.31)

$$\mathrm{pr}^{(n)}g\left(z_0^{(n)}\right)=\mathrm{pr}^{(n)}g\cdot\left[\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma\,|_{z_0}\right]=\mathrm{pr}^{(n)}\tilde\Gamma\,|_{\tilde z_0}.$$

Оно, будучи продолжением локально G-инвариантного подмногообразия, лежит в $I_*^{(n)}\big|_{\tilde z_0}$. Это завершает доказательство. (То же доказательство, очевидно, работает и в случае обычного инвариантного пространства $I^{(n)}\subset M^{(n)}$.) □

Связь с фактормногообразием

Поскольку инвариантное пространство струй $I_*^{(n)}$ для действия группы само является инвариантным относительно продолженного действия группы $\mathrm{pr}^{(n)}G$, мы можем определить факторпространство $I_*^{(n)}/\mathrm{pr}^{(n)}G$, сжимая орбиты продолжения $\mathrm{pr}^{(n)}G$ в $I_*^{(n)}$ в точки. В случае когда G действует на многообразии M регулярно, это «продолженное фактормногообразие» можно отождествить с пространством n-струй соответствующего фактормногообразия M/G. Этот результат, и формулировка, и доказательство которого становятся элементарными на языке расширенных расслоений струй (но заметно усложняются, если мы останемся в обычном пространстве струй, как будет видно впоследствии), немедленно приводит к редуцированной системе дифференциальных уравнений для G-инвариантных решений.

Предложение 3.34. *Пусть G — локальная группа преобразований, действующая регулярно на $(p+q)$-мерном многообразии M с s-мерными орбитами, $s\leqslant p$. Пусть M/G — соответствующее $(p+q-s)$-мерное фактормногообразие. Пусть $M_*^{(n)}$ — расширенное пространство n-струй, порожденное p-мерными подмногообразиями многообразия M, и $I_*^{(n)}\subset M_*^{(n)}$ — соответствующее инвариантное пространство, порожденное G-инвариантными p-мерными подмногообразиями. Тогда имеется естественная проекция $\pi^{(n)}\colon I_*^{(n)}\to(M/G)_*^{(n)}$ на расширенное пространство n-струй, соответствующее $(p-s)$-мерным подмногообразиям фактормногообразия M/G, обладающая следующими свойствами:*

(a) *Если $z\in M$ имеет образ $\pi(z)=w\in M/G$, где $\pi\colon M\to M/G$ — естественная проекция, то*

$$\pi^{(n)}\colon I_*^{(n)}|_z\to(M/G)_*^{(n)}|_w$$

— диффеоморфизм.

(b) *Если* $\Gamma \subset M$ — *произвольное* G-*инвариантное* p-*мерное подмногообразие с образом* $\Gamma/G = \pi[\Gamma] \subset M/G$, *то*

$$\pi^{(n)}[\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma|_z] = \mathrm{pr}^{(n)}(\Gamma/G)|_w \tag{3.32}$$

для любого $z \in \Gamma$ *с образом* $w = \pi(z) \in \Gamma/G$.

(c) *Две точки* $z^{(n)}$ *и* $\tilde{z}^{(n)}$ *из* $I_*^{(n)}$ *имеют один и тот же образ в* $(M/G)_*^{(n)}$ *при отображении* $\pi^{(n)}$, *если и только если они лежат в одной и той же орбите продолжения* $\mathrm{pr}^{(n)}G$. *Таким образом,*

$$I_*^{(n)}/\mathrm{pr}^{(n)}G \simeq (M/G)_*^{(n)},$$

причем $\pi^{(n)}$ *совпадает с естественной проекцией.*

Доказательство. Почти все эти свойства непосредственно вытекают из соответствия между G-инвариантными p-мерными подмногообразиями многообразия M и общими $(p-s)$-мерными подмногообразиями фактормногообразия M/G, описанного в предложении 3.21, а также из следующей леммы.

Лемма 3.35. *Пусть* Γ *и* $\tilde{\Gamma}$ — *локально* G-*инвариантные подмногообразия многообразия* M *с образами* Γ/G *и* $\tilde{\Gamma}/G$ *в* M/G. *Тогда* Γ *и* $\tilde{\Gamma}$ *имеют касание* n-*го порядка в точке* $z_0 \in M$, *если и только если* Γ/G *и* $\tilde{\Gamma}/G$ *имеют касание* n-*го порядка в точке* $w_0 = \pi(z_0) \in M/G$.

Доказательство. Выберем плоские локальные координаты $(t, y, v) = (t^1, \ldots, t^s, y^1, \ldots, y^{p-s}, v^1, \ldots, v^q)$ вблизи точки $z^0 = (t_0, y_0, v_0)$, так что орбиты группы G будут слоями $\{y = c, v = \tilde{c}\}$, а Γ и $\tilde{\Gamma}$ — графиками функций $v = f(y, t)$, $v = \tilde{f}(y, t)$ соответственно. G-инвариантность Γ и $\tilde{\Gamma}$ влечет за собой независимость f и $\tilde{f}$ от t. Кроме того, в соответствующих локальных координатах (y, v) на M/G подмногообразия Γ/G и $\tilde{\Gamma}/G$ задаются теми же формулами $v = f(y)$ и $v = \tilde{f}(y)$ соответственно. Таким образом, эта лемма тривиальна: касание n-го порядка между Γ и $\tilde{\Gamma}$ означает, что производные до порядка n включительно от f и $\tilde{f}$ по y и t совпадают в точке (y_0, t_0). Но производные по t все тождественно равны нулю, так что это, очевидно, эквивалентно требованию, что производные от f и $\tilde{f}$ по y до порядка n включительно совпадают в точке y_0, а это то же самое, что сказать, что Γ/G и $\tilde{\Gamma}/G$ имеют касание n-го порядка в точке y_0. □

Чтобы доказать предложение 3.34, мы определяем отображение $\pi^{(n)}$, пользуясь формулой (3.32). Как утверждает лемма, это отображение определено корректно. Часть (a) следует из соответствия между G-инвариантными подмногообразиями многообразия M и их образами в M/G. Чтобы доказать ч. (с), предположим, что Γ и $\tilde{\Gamma}$ — локально G-инвариантные подмногообразия, представляющие $z^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)}\,\Gamma\big|_z$ и $\tilde{z}^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)}\,\tilde{\Gamma}\big|_{\pi(\tilde{z})}$. Образы $\pi^{(n)}(z^{(n)}) = \mathrm{pr}^{(n)}(\Gamma/G)\big|_{\pi(z)}$ и $\pi^{(n)}(\tilde{z}^{(n)}) = \mathrm{pr}^{(n)}(\tilde{\Gamma}/G)\big|_{\pi(\tilde{z})}$ совпадают, если и только если Γ/G и $\tilde{\Gamma}/G$ имеют касание n-го порядка в точке $w = \pi(z) = \pi(\tilde{z})$. Мы заключаем, что z и $\tilde{z}$ лежат в одной и той же орбите группы G в M; поэтому в силу предложения 1.24 существуют элементы $g_1, \ldots, g_k \in G$, такие, что $\tilde{z} = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k \cdot z$. Пусть $\Gamma^* = g_1 \cdot \ldots \cdot g_k \cdot \Gamma$. Тогда Γ^* проходит через точку $\tilde{z}$ и имеет ту же проекцию $\Gamma^*/G = \Gamma/G$, что и Γ. По лемме 3.35 Γ^* и $\tilde{\Gamma}$ имеют касание n-го порядка в точке $\tilde{z}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\tilde{z}^{(n)} &= \mathrm{pr}^{(n)}\tilde{\Gamma}\,|_{\tilde{z}} = \mathrm{pr}^{(n)}\Gamma^*\,|_{\tilde{z}} = \mathrm{pr}^{(n)}\,[g_1 \cdot g_2 \cdot \ \ldots \ \cdot g_k \cdot \Gamma]\,|_{\tilde{z}} = \\ &= \mathrm{pr}^{(n)}g_1 \cdot \mathrm{pr}^{(n)}g_2 \cdot \ \ldots \ \cdot \mathrm{pr}^{(n)}g_k\,(\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma\,|_z) = \\ &= \mathrm{pr}^{(n)}g_1 \cdot \ \ldots \ \cdot \mathrm{pr}^{(n)}g_k\,(z^{(n)}),\end{aligned}$$

так что $\tilde{z}^{(n)}$ и $z^{(n)}$ лежат в одной и той же орбите продолжения $\mathrm{pr}^{(n)}G$. □

Редуцированное уравнение

Пусть $\mathcal{S}^*_\Delta \subset M^{(n)}_*$ соответствует системе Δ уравнений с частными производными, допускающей группу симметрий G. Если Γ — график G-инвариантного решения системы Δ, то его продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma$ не только является подмногообразием в $\mathcal{S}^*_\Delta$; оно обязано также лежать в инвариантном пространстве $I^{(n)}_*$. Значит, чтобы найти такие решения, нужно рассмотреть пересечение $\mathcal{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*$ этих двух подмногообразий, инвариантность которого относительно продолжения $\mathrm{pr}^{(n)}G$ гарантируется предложением 3.33. Используя проекцию из предложения 3.34, мы придем тогда к *редуцированной системе* $\mathcal{S}^*_{\Delta/G} = \pi^{(n)}\,[\mathcal{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*]$. Теперь легко сформулировать и доказать основную теорему о построении инвариантных относительно группы решений.

Теорема 3.36. *Пусть G — группа симметрий системы дифференциальных уравнений $\mathcal{S}^*_\Delta \subset M^{(n)}_*$. Тогда p-мерное многообразие $\Gamma \subset M$ является G-инвариантным решением, если и только если соответствующее $(p-s)$-мерное подмногообразие $\Gamma/G \subset M/G$ является решением редуцированной системы*

$$\mathcal{S}^*_{\Delta/G} = \pi^{(n)}\,[\mathcal{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*] \subset (M/G)^{(n)}_*.$$

Доказательство. Если Γ — такое решение, то его продолжение $\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma$ лежит в пересечении $\mathcal{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*$. Тогда в силу предложения 3.34 $\pi^{(n)}[\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma] = \mathrm{pr}^{(n)}(\Gamma/G)$ лежит в $\mathcal{S}^*_{\Delta/G}$, а следовательно, Γ/G — решение редуцированной системы. Для доказательства обратного утверждения заметим сначала, что в силу предложения 3.33 пересечение $\mathcal{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*$ является $\mathrm{pr}^{(n)}G$-инвариантным; следовательно, если $z^{(n)} \in I^{(n)}_*$ обладает проекцией $\pi^{(n)}(z^{(n)}) \in \mathcal{S}^*_{\Delta/G}$, то $z^{(n)} \in \mathcal{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*$. (В самом деле, мы можем найти точку $\tilde{z}^{(n)} \in \mathcal{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*$, лежащую в той же орбите продолжения $\mathrm{pr}^{(n)}G$.) Поэтому, если Γ/G является решением редуцированной системы и $\Gamma = \pi^{-1}(\Gamma/G)$ — соответствующее G-инвариантное подмногообразие многообразия M, то в силу (3.32) $\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma \subset \mathcal{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*$, поскольку $\pi^{(n)}[\mathrm{pr}^{(n)}\Gamma] = \mathrm{pr}^{(n)}(\Gamma/G) \subset \mathcal{S}^*_{\Delta/G}$. Таким образом, Γ — решение. □

Локальные координаты

Теорема 3.36 дала строгое обоснование общего метода построения инвариантных относительно группы решений. Ее почти тривиальное доказательство — хорошая иллюстрация мощи математической абстракции в упрощении и в то же время обобщении, казалось бы, сложных построений. С другой стороны, с более физической точки зрения, такое представление совершенно не конкретно, так что мы вынуждены перенести абстрактные конструкции пространства струй обратно на землю, а это означает ввести снова локальные координаты. Итак, пусть $(x, u) = (x^1, \ldots, x^p, u^1, \ldots, u^q)$ — локальные координаты на многообразии M, которое мы снова можем рассматривать как открытое подмножество евклидова пространства $X \times U$, с пространством струй $M^{(n)} \subset M^{(n)}_*$.

Если G — локальная группа преобразований, действующая на M, то инвариантное пространство $I^{(n)} \subset M^{(n)}$ отличается от расширенного инвариантного пространства $I^{(n)}_* \subset M^{(n)}_*$ в точности на образы нетрансверсальных G-инвариантных подмногообразий Γ. В частности, $I^{(0)} \subset M$ состоит из всех точек $z_0 = (x_0, u_0)$, таких, что существует по крайней мере одна локально G-инвариантная функция $u = f(x)$, график которой проходит через точку z_0. Заметим, что, тогда как имеет место равенство $I^{(0)}_* = M$ (при условии, что размерность s орбит группы G не превосходит p), $I^{(0)}$ не обязательно совпадает с M. Например, в случае группы $G = \mathrm{SO}(2)$, действующей как группа вращений на $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, локально G-инвариантными функциями являются

$u = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$, графики которых — полуокружности. Но таких графиков, проходящих через точки оси x, нет, так что $I^{(0)} = \{(x, u) : u \neq 0\}$ *строго* содержится в $M = X \times U$. Вообще говоря, вне $I^{(0)}$ вообще нет G-инвариантных функций, так что мы можем ограничиться множеством $I^{(0)}$ и с этих пор считать, что $M = I^{(0)}$, — это означает, что через каждую точку из M проходит график некоторой G-инвариантной функции $u = f(x)$. В случае регулярного действия группы имеется простая явная характеризация этого требования.

Предложение 3.37. *Пусть группа G действует регулярно на $M \subset X \times U$. Тогда $z_0 \in M$ лежит в $I^{(0)}$, если и только если орбита группы G, проходящая через точку z_0, трансверсальна вертикальному пространству U_{z_0}. В этом случае говорят, что группа G действует* трансверсально *в точке z_0.*

Доказательство. Необходимость трансверсальности очевидна, поскольку если Γ локально G-инвариантно, то Γ содержит относительно открытое подмножество $W \cap \mathcal{O}$ орбиты $\mathcal{O}$, проходящей через точку z_0, и поэтому трансверсальность подмногообразия Γ влечет за собой трансверсальность орбиты $\mathcal{O}$. Чтобы доказать достаточность, заметим, что по определению группа G действует трансверсально в точке z_0, если и только если

$$\mathfrak{g}|_{z_0} \cap TU_{z_0}|_{z_0} = \{0\}, \qquad (3.33)$$

поскольку $\mathfrak{g}|_{z_0}$ является касательным пространством к орбите, проходящей через точку z_0. Пусть $w_0 = \pi(z_0)$ — образ этой точки в M/G. Из теоремы 3.18 вытекает, что $d\pi\,[TU_{z_0}|_{z_0}] \equiv TU^*|_{w_0}$ является q-мерным подпространством пространства $T(M/G)|_{w_0}$. Пусть $\tilde{\Gamma}$ — произвольное $(p - s)$-мерное подмногообразие, трансверсальное этому подпространству. Это означает, что $T\tilde{\Gamma}|_{w_0} \cap TU^*|_{w_0} = \{0\}$. Тогда легко видеть, что $\Gamma = \pi^{-1}(\tilde{\Gamma})$ является G-инвариантным p-мерным подмногообразием многообразия M, проходящим через точку z_0, трансверсально U_{z_0}. Следовательно, $z_0 \in I^{(0)}$. □

В локальных координатах, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ натянута на векторные поля

$$\mathbf{v}_k = \sum_i \xi^i_k(x, u)\,\partial_{x^i} + \sum_\alpha \varphi^k_\alpha(x, u)\,\partial_{u^\alpha}, \quad k = 1, \ldots, r,$$

то (3.33) равносильно условию, что ранг матрицы размера $p \times r$ с элементами $\xi^i_k(x, u)$ равен в точности размерности s орбиты (в точке $z_0 = (x_0, u_0)$):

$$\operatorname{rank}\left(\xi_k^i(x_0, u_0)\right) = \operatorname{rank}\left(\xi_k^i(x_0, u_0), \varphi_\alpha^k(x_0, u_0)\right) = s. \tag{3.34}$$

Например, действие группы $SO(2)$ на $\mathbb{R}^2$ порождено полем $-u\partial_x + x\partial_u$. Имеем $s = \operatorname{rank}(-u, x) = 1$ при $(x, u) \neq (0, 0)$, тогда как $\operatorname{rank}(-u) = 1$, кроме $u = 0$. Таким образом, группа $SO(2)$ действует трансверсально всюду, кроме оси x, что согласуется с нашими вычислениями, проделанными ранее.

Это проясняет связь между трансверсальностью и существованием G-инвариантных функций, по меньшей мере на локальном уровне. Вопрос о существовании *глобально* определенных G-инвариантных функций значительно более тонок, и существование таких функций не следует даже из выполнения условия локальной трансверсальности всюду. Для примера см. упр. 3.15.

С этого момента мы считаем, что группа G действует трансверсально всюду, так что $I^{(0)} = M$. Тогда инвариантное пространство $I^{(n)}$ можно явно описать через инфинитезимальные образующие группы G.

Теорема 3.38. *Пусть группа Γ действует регулярно и трансверсально на $M \subset X \times U$. Пусть*

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{p} \xi_k^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha^k(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad k = 1, \ldots, r,$$

— базис инфинитезимальных образующих. Тогда n-е инвариантное пространство $I^{(n)} \subset M^{(n)}$ определяется равенствами

$$I^{(n)} = \left\{(x, u^{(n)}):\ D_J Q_\alpha^k(x, u^{(n)}) = 0,\ k = 1, \ldots, r,\ \alpha = 1, \ldots q,\ \#J \leqslant n-1\right\},$$

где $Q_\alpha^k = \varphi_\alpha^k - \sum \xi_k^i u_i^\alpha$ — характеристики векторных полей $\mathbf{v}_k$. (См. (2.48).)

Доказательство. Мы наметим доказательство для $n = 1$, когда $I^{(1)}$ — общее множество нулей характеристик $Q_\alpha^k(x, u^{(1)})$. Распространение этого доказательства на случай произвольного n мы оставляем читателю. Если $u = f(x)$ есть G-инвариантная функция, то для $\alpha = 1, \ldots, q$ равенства

$$0 = \mathbf{v}_k\left(u^\alpha - f^\alpha(x)\right) = \varphi_\alpha^k - \sum_{i=1}^{p} \xi_k^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}$$

должны выполняться для $u = f(x)$. Справа, таким образом, стоят $Q_\alpha^k(x, \mathrm{pr}^{(1)} f(x))$. Поскольку каждая точка в $I^{(1)}$ определяется первым продолжением такой G-инвариантной функции, мы заключаем, что $I^{(1)}$ содержится в множестве, где $Q_\alpha^k = 0$ для всех α, k. Эта часть справедлива для какого бы то ни было действия группы.

Для доказательства обратного мы должны воспользоваться ограничениями на действие группы. Самый простой путь сделать это — ввести специальные локальные координаты $(y, v) = (y^1, \ldots, y^p, v^1, \ldots, v^q)$, в которых орбиты группы G являются слоями $\{y^1 = c_1, \ldots, y^{p-s} = c_{p-s}, v^1 = \hat{c}_1, \ldots, v^q = \hat{c}_q\}$, и, следовательно, в каждой точке (y_0, v_0) пространство инфинитезимальных образующих $\mathfrak{g}|_{(y_0, v_0)}$ порождается касательными векторами $\partial/\partial y^{p-s+1}, \ldots, \partial/\partial y^p$. В этом случае обращение в нуль всех характеристик эквивалентно условиям $\partial v^\alpha/\partial y^k = 0$ для всех $\alpha = 1, \ldots, q$, $k = p - s + 1, \ldots, p$. Каждой точке $(y_0, v_0^{(1)}) \in M^{(1)}$, удовлетворяющей этим уравнениям, легко поставить в соответствие функцию $v = h(y)$, такую, что $v_0^{(1)} = \mathrm{pr}^{(1)} h(y_0)$ (например, h может быть константой!), и, следовательно, справедливо обратное включение, что и доказывает теорему.

Однако при такой замене координат придется иметь дело с двумя техническими моментами. Первый состоит в том, что замена координат не меняет характеристик или, более точно, не меняет их общего множества нулей. Это следует из общей формулы упр. 3.21 для поведения характеристик при заменах переменных. Другой момент состоит в том, что график функции $u = f(x)$, выраженный в координатах (y, v), может перестать быть трансверсальным вертикальному v-пространству и, следовательно, перестать быть графиком корректно определенной функции $v = h(y)$. Это, однако, легко исправить с помощью линейной треугольной замены переменных $\tilde{y} = y + Lv$, $\tilde{v} = v$, где L — некоторая постоянная матрица размера $p \times q$. Координаты $(\tilde{y}, \tilde{v})$ остаются плоскими, а матрицу L всегда можно выбрать так, чтобы график функции $u = f(x)$ снова был трансверсален вертикальному пространству. □

Пример 3.39. В случае группы вращений $SO(2)$ инфинитезимальной образующей будет $\mathbf{v} = -u\partial_x + x\partial_u$, а характеристикой $Q = x + uu_x$. Первое инвариантное пространство в точке (x, u) при $u \neq 0$ — это, таким образом, $I^{(1)} = \{(x, u, u_x) : x + uu_x = 0\}$. Заметим, что даже если $u = 0$, Q не обращается в нуль при $x \neq 0$, так что $I^{(1)}$ описывается как множество нулей характеристики всюду, кроме начала координат $x = u = 0$. Однако там $I^{(1)}$ остается пустым, но $Q \equiv 0$ для всех u_x, так что регулярность действия группы существенна для справедливости теоремы 3.38. Инвариантные пространства высших порядков строятся дифференцированием, так что при $u \neq 0$

$$I^{(2)} = \{(x, u, u_x, u_{xx}):\ x + uu_x = 0,\ 1 + uu_{xx} + u_x^2 = 0\}$$

и т. д.

Чтобы перейти к фактормногообразию, мы сделаем дальнейшее предположение, что существуют $p + q - s$ глобально определенных функционально независимых инвариантов группы G на M, которые мы разделяем на новые независимые переменные $y^i = \eta^i(x, u)$, $i = 1, \ldots, p - s$, и новые зависимые переменные $v^\alpha = \zeta^\alpha(x, u)$, $\alpha = 1, \ldots, q$. (Это всегда можно сделать дальнейшим сужением области M.) Эти новые переменные дают глобальные координаты на фактормногообразии M/G, которое мы можем поэтому рассматривать как открытое подмножество $(p + q - s)$-мерного евклидова пространства $Y \times V$.

Как мы видели в предложении 3.34, проекция $\pi^{(n)}$ задает диффеоморфизм между всем инвариантным пространством $I_*^{(n)}\big|_{z_0}$ в точке $z_0 \in M$ и всем расширенным пространством струй $(M/G)_*^{(n)}\big|_{w_0}$ в образе этой точки $w_0 = \pi(z_0) \in M/G$. Однако при введении локальных координат и на M, и на M/G мы должны наложить требования трансверсальности на соответствующие подмногообразия, чтобы гарантировать, что локально они будут выглядеть как графики гладких функций. В результате основное соответствие между инвариантным пространством $I^{(n)}\big|_{z_0}$ и обычным пространством струй $(M/G)^{(n)}\big|_{w_0}$ теряет большую часть своей изначальной простоты из расширенного варианта теоремы 3.36.

Пример 3.24 показывает, как графики гладких G-инвариантных функций могут проектироваться на нетрансверсальные подмногообразия в M/G или, наоборот, гладкие функции на M/G могут соответствовать нетрансверсальным G-инвариантным подмногообразиям в M. Поэтому чтобы сохранить основное соответствие, мы должны исключить эти патологические случаи и сосредоточиться на тех G-инвариантных функциях на M, которые соответствуют гладким функциям на M/G и наоборот. Подробнее, инвариантное пространство $I^{(n)}\big|_{z_0}$, заметаемое продолжениями G-инвариантных функций $u = f(x)$, отличается от расширенного инвариантного пространства $I_*^{(n)}\big|_{z_0}$ только на точки в «вертикальном» подмногообразии $\mathscr{V}^{(n)}\big|_{z_0} = M_*^{(n)}\big|_{z_0} \setminus M^{(n)}\big|_{z_0}$. Пусть $(\mathscr{V}/G)^{(n)}\big|_{w_0} \equiv \pi^{(n)}\left[\mathscr{V}^{(n)}\big|_{z_0} \cap I_*^{(n)}\big|_{z_0}\right]$ — его образ в $(M/G)_*^{(n)}$; точка в нем представляет продолжение подмногообразия в M/C, проходящего через точку w_0 и *не* соответствующего графику никакой гладкой G-инвариантной функции, проходящей через точку z_0. Дополнение в пространстве струй

$$\widetilde{(M/G)}^{(n)}\Big|_{w_0} = (M/G)^{(n)}\Big|_{w_0} \setminus \widetilde{(\mathscr{V}/G)}^{(n)}\Big|_{w_0}$$

представляет продолжения «хороших» функций $v = h(y)$, соответствующих локально G-инвариантным функциям $u = f(x)$ вблизи точки z_0.

Обратно, обычное пространство струй $(M/G)^{(n)}\big|_{w_0}$ отличается от расширенного пространства струй $(M/G)^{(n)}_{*}\big|_{w_0}$ вертикальным подмногообразием $(\mathscr{V}/G)^{(n)}\big|_{w_0} \equiv (M/G)^{(n)}_{*}\big|_{w_0} \setminus (M/G)^{(n)}\big|_{w_0}$. Пусть $\tilde{\mathscr{V}}^{(n)}\big|_{z_0}$ — его прообраз в $I^{(n)}_{*}\big|_{z_0}$, так что $\pi^{(n)}\big[\tilde{\mathscr{V}}^{(n)}\big|_{z_0}\big] = (\mathscr{V}/G)^{(n)}\big|_{w_0}$. Его точка представляет продолжение G-инвариантного подмногообразия, проходящего через точку z_0, *не* соответствующего графику гладкой функции $v = h(y)$ на M/G. Остаток инвариантного пространства

$$\tilde{I}^{(n)}\big|_{z_0} = I^{(n)}\big|_{z_0} \setminus \tilde{\mathscr{V}}^{(n)}\big|_{z_0}$$

содержит продолжения всех «хороших» G-инвариантных функций $u = f(x)$, соответствующих явным функциям $v = h(y)$ на M/G. Именно на этом пространстве «хороших» продолжений имеется соответствие, аналогичное установленному в предложении 3.34.

Предложение 3.40. *Проекция* $\pi^{(n)}\colon I^{(n)}_{*}\big|_{z_0} \to (M/G)^{(n)}_{*}\big|_{w_0}$ *индуцирует диффеоморфизм* $\tilde{\pi}^{(n)}\colon \tilde{I}^{(n)}\big|_{z_0} \to \widetilde{(M/G)}^{(n)}\big|_{w_0}$, *где* $w_0 = \pi(z_0)$.

Так много геометрии; как же все это вычисляется явно в данных локальных координатах? Функциональная независимость инвариантов η, ζ означает, что матрица Якоби

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \partial\eta^i/\partial x^j & \partial\eta^i/\partial u^\beta \\ \partial\zeta^\alpha/\partial x^j & \partial\zeta^\alpha/\partial u^\beta \end{pmatrix}$$

всюду имеет ранг $p + q - s$. Условие трансверсальности (3.34) вкупе с инфинитезимальным критерием инвариантности η^i, ζ^α требует, чтобы последние q столбцов матрицы J всюду имели ранг q:

$$\operatorname{rank}(\partial\eta^i/\partial u^\beta, \quad \partial\zeta^\alpha/\partial u^\beta)^T = q. \tag{3.35}$$

По теореме о неявной функции мы можем тогда выразить локально все зависимые переменные $u^1, \ldots, u^q$ вместе с $p - s$ независимыми переменными, скажем $\tilde{x} = (x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p-s}})$, через $y = (y^1, \ldots, y^{p-s})$, $v = (v^1, \ldots, v^q)$ и оставшиеся s независимых переменных $\hat{x} = (x^{j_1}, \ldots, x^{j_s})$:

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y, v), \quad u = \delta(\hat{x}, y, v). \tag{3.36}$$

Для любого фиксированного значения y_0, v_0 редуцированных переменных (3.36) определяет орбиту группы G в M, параметризованную «параметрическими переменными» $\hat{x}$.

Если $v = h(y)$ — функция, график которой лежит в M/G, то соответствующее G-инвариантное p-мерное подмногообразие в M задается уравнениями

$$\zeta(x, u) = h[\eta(x, u)], \tag{3.37}$$

полученными заменой y и v их выражениями как инвариантов на M. Это подмногообразие в M будет графиком функции $u = f(x)$, если и только если мы можем выразить из (3.37) u как функцию от x. Для этого требуется, чтобы матрица $\partial\zeta/\partial u - (\partial h/\partial y) \cdot (\partial\eta/\partial u)$ размера $q \times q$ была невырожденна. (Как в § 3.1, символы частных производных означают здесь матрицы Якоби.) Поскольку мы можем отождествить h с v, имеет смысл записать *это* условие трансверсальности в виде

$$\det\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial u}\right) \neq 0. \tag{3.38}$$

Противоположный случай, когда этот детерминант обращается в нуль, будет соответствовать G-инвариантным подмногообразиям в M, *не* трансверсальным вертикальному пространству U_z и, следовательно, определяющим особое подмногообразие $\left.(\overline{\mathscr{V}/G})^{(n)}\right|_w$, которое нам нужно исключить!

Из (3.37) мы можем дифференцированием найти выражения для производных от u по x через производные от v по y. По цепному правилу

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{3.39}$$

Здесь каждая производная снова представляет собой матрицу Якоби подходящего размера. Это можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \tag{3.40}$$

и наше условие трансверсальности (3.38) позволяет нам разрешить это уравнение явно относительно $\partial u/\partial x$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^{-1}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right).$$

Мы получили функцию от x, u и $\partial v/\partial y$. Первые $p+q$ переменных можно заменить их выражениями (3.36), что приводит к формуле

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\delta_1\left(\hat{x},\ y,\ v,\ \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

выражающей производные первого порядка по x от G-инвариантной функции $u=f(x)$ через производные первого порядка ее представителя $v=h(y)$.

Производные высших порядков получаются дальнейшим дифференцированием (3.39). Если мы введем *полные матрицы Якоби* $\mathrm{D}_x\eta$, $\mathrm{D}_x\zeta$ с элементами $D_i\eta^j$, $D_i\zeta^\alpha$ соответственно, то (3.39) приобретет более простой вид

$$\mathrm{D}_x\zeta=\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\mathrm{D}_x\eta.$$

Дифференцируя по x, мы получим (в очевидных обозначениях)

$$\mathrm{D}_x^2\zeta=\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{D}_x^2\eta+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\mathrm{D}_x\eta)^2, \tag{3.41}$$

где

$$\mathrm{D}_x^2\zeta=\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(Мы оставляем читателю расстановку подходящих индексов.) Если мы сгруппируем члены, включающие производные второго порядка от u, то получим выражение вида

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\tilde{\delta}_2\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right).$$

Снова (3.38) позволяет нам обратить матрицу, стоящую слева, и мы можем поэтому выразить $\partial^2u/\partial x^2$ через x, u, $\partial u/\partial x$ и v, $\partial v/\partial y$. Первый набор переменных можно заменить соответствующими выражениями от y, v, $\partial v/\partial y$ и параметрических переменных $\hat{x}$, так что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\delta_2(\hat{x},\ y,\ v^{(2)}),$$

где δ_2 — некоторая корректно определенная функция. Случай производных n-го порядка совершенно аналогичен. Заменяя (3.41), мы получаем формулу вида

$$\mathrm{D}_x^n\xi=\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{D}_x^n\eta+\ \ldots, \tag{3.42}$$

где опущенные члены зависят от полных производных от η более низкого порядка, а также от производных от v по y до порядка n включительно. Далее,

$$\mathrm{D}_x^n\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \ldots,$$

опущенные члены зависят от производных от u порядка $n-1$ и ниже. Таким образом, (3.42) имеет вид

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \tilde{\delta}_n\left(x, u, \ldots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^n v}{\partial y^n}\right).$$

Как и раньше, мы можем обратить матрицу, стоящую слева, и подставить вместо всех производных от u, получающихся в правой части, их ранее вычисленные выражения. Это приводит к явной формуле

$$u^{(n)} = \delta^{(n)}(\hat{x}, y, v^{(n)}) \tag{3.43}$$

для производных n-го порядка от u по x, выраженных через y, v и производные от v по y до порядка n включительно плюс вездесущие параметрические переменные $\hat{x}$.

Эти формулы служат для параметризации инвариантного пространства, так что если z и w связаны соотношением $\pi(z) = w$, то

$$\tilde{I}^{(n)}\big|_z = \{(x, u^{(n)}) \colon u^{(n)} = \delta^{(n)}(\hat{x}, y, v^{(n)}) \text{ для некоторого } (y, v^{(n)}) \in \widetilde{(M/G)}^{(n)}\big|_w\},$$

так что для каждой фиксированной точки $(y, v^{(n)})$, удовлетворяющей условию (3.38), соответствующая орбита продолжения $\mathrm{pr}^{(n)}G$ в $\tilde{I}^{(n)}$ параметризована посредством $\hat{x}$. Кроме того, проекция $\pi^{(n)}(x, u^{(n)})$ такой точки — это просто точка $(y, v^{(n)}) \in (M/G)^{(n)}$, полученная забыванием переменных $\hat{x}$.

Наконец, пусть $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ — система уравнений с частными производными на M, задающая подмногообразие $\mathcal{S}_\Delta \subset M^{(n)}$. Ее G-инвариантные решения (если они существуют) будут иметь продолжения в пересечении $\mathcal{S}_\Delta \cap I^{(n)}$. Если мы, кроме того, потребуем, чтобы каждое такое G-инвариантное решение $u = f(x)$ соответствовало гладкой функции $v = h(y)$ на фактормногообразии, нам придется еще сузить подпространство $I^{(n)}$ и рассматривать $\mathcal{S}_\Delta \cap \tilde{I}^{(n)}$. Поскольку $\tilde{I}^{(n)}$ параметризовано посредством $\hat{x}$, y, $v^{(n)}$, как видно из (3.43), мы можем найти это пересечение, выражая Δ через $\hat{x}$, y, $v^{(n)}$, так что $\tilde{\Delta}(\hat{x}, y, v^{(n)}) = \Delta(x, u^{(n)})$, когда справедлива формула (3.43), и, таким образом,

$$\mathcal{S}_\Delta \cap \tilde{I}^{(n)} = \{(\hat{x}, y, v^{(n)}) \in \tilde{I}^{(n)} \colon \tilde{\Delta}(\hat{x}, y, v^{(n)}) = 0\}.$$

Далее, если G — группа симметрий системы Δ, то $\mathcal{S}_\Delta \cap \tilde{I}^{(n)}$ локально инвариантно относительно продолженного действия

$\mathrm{pr}^{(n)}G$, для которого $(y, v^{(n)})$ образуют полную систему независимых инвариантов. В силу предложения 2.18 имеется эквивалентное множество уравнений, которое мы обозначаем Δ/G, не зависящее от параметрических переменных $\hat{x}$, так что

$$\mathcal{S}_\Delta \cap \tilde{I}^{(n)} = \{(\hat{x}, y, v^{(n)}) \in \tilde{I}^{(n)}: \Delta/G(y, v^{(n)}) = 0\}.$$

Из указанного ранее вида проекции $\pi^{(n)}$ мы немедленно заключаем, что часть редуцированной системы в $(\widetilde{M/G})^{(n)}$, а именно

$$\mathcal{S}_{\Delta/G} = \pi^{(n)}(\mathcal{S}_\Delta \cap \tilde{I}^{(n)}) = \{(y, v^{(n)}): \Delta/G(y, v^{(n)}) = 0\}, \qquad (3.44)$$

задается уравнениями Δ/G. Таким образом, мы полностью обосновали процедуру § 3.1. Теорема 3.36, дополненная предложением 3.40, показывает, что нами доказан следующий строгий способ построения инвариантных относительно группы решений систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Теорема 3.41. *Пусть G — локальная группа преобразований, действующая регулярно и трансверсально на $M \subset X \times U$ с глобально определенными независимыми инвариантами, и, значит, $M/G \subset Y \times V$. Пусть Δ — система уравнений с частными производными, определенная на M, допускающая группу G в качестве своей группы симметрий. Тогда имеется редуцированная система дифференциальных уравнений Δ/G на M/G, заданная* (3.44), *обладающая тем свойством, что всякая G-инвариантная функция $u = f(x)$ на M, соответствующая корректно определенной функции $v = h(y)$ на M/G, будет решением системы Δ, если и только если ее представитель h — решение системы Δ/G.*

(Подходящие замены координат на M/G приведут ко всем G-инвариантным решениям системы Δ, даже к тем, которые изначально были нетрансверсальными при исходном выборе координат.) Это завершает наше развитие теории и обоснования процедуры редукции.

Замечания

Несмотря на многочисленные заявления, что понятие инвариантного относительно группы решения системы уравнений с частными производными не сложилось в полной общности вплоть до 1950 г., на самом деле Ли в одной из своих последних работ Lie [6] ввел изложенный нами общий метод отыскания таких решений. Ли рассматривал решения систем уравнений с частными производными, инвариантные относительно групп