ботах Овсянникова [2; § 86] и [3; § 20]. Последняя из них содержит больше подробностей о том, как провести классификацию подгрупп группы Ли относительно присоединенного действия. Дальнейшее развитие этот метод получил в работе Patera, Winternitz, Zassenhaus [1], где указано также множество примеров оптимальных систем подгрупп групп Ли, играющих важную роль в математической физике. Классификация алгебр Ли симметрий для уравнения теплопроводности дана впервые в работе Weisner [1] при исследовании связей между группами Ли и специальными функциями. См. также Kalnins, Miller [1], где эта классификация применяется к вопросу о разделении переменных.

Обобщение понятия решения, инвариантного относительно группы, так называемое частично инвариантное решение, было введено Овсянниковым [2; § 17], [3; гл. 6]. В сущности частично инвариантное решение — это решение, график которого, хотя и не является полностью инвариантным относительно преобразований из рассматриваемой группы, должен оставаться в подмногообразии размерности, строго меньшей, чем $p+r$. Здесь p — число независимых переменных, а r — размерность орбит группы G. (Заметим, что график общей функции должен был бы отображаться в $(p+r)$-мерное многообразие под действием всей группы преобразований.) В определенных случаях такие решения также можно найти точно с помощью решения редуцированной системы дифференциальных уравнений с меньшим числом независимых переменных, но промежуточные вычисления значительно более сложны, чем в полностью инвариантном случае. Читателя, интересующегося полным развитием этой теории, мы отсылаем к упомянутым выше работам Овсянникова.

Другое возможное обобщение было предложено в работе Bluman, Cole [1] и в книге Ames [1; v. 2, § 2.10]. Оно называется «неклассическим методом» для решений, инвариантных относительно группы. Здесь не требуется, чтобы все подмногообразие $\mathscr{S}^*_\Delta$ было $\mathrm{pr}^{(n)}G$-инвариантным. Нужно лишь, чтобы $\mathrm{pr}^{(n)}G$-инвариантным было его пересечение с инвариантным пространством $\mathscr{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*$. Этот метод, хотя и приводит к редуцированным уравнениям, несколько *слишком* общий. Дело в том, что, поскольку мы допускаем продолжения уравнений, *каждая* группа преобразований на M удовлетворяет этому требованию, и обратно, *каждое* решение системы может быть получено таким путем. См. упр. 3.20 и указанную там работу на эту тему.

Упражнения

3.1. Рассмотрим волновое уравнение $u_{tt} - u_{xx} + (u/x) = 0$ с осевой симметрией.

(а) Какие у него группы симметрий?

(b) Найдите и расклассифицируйте его решения, инвариантные относительно группы.

(c) Каково фундаментальное решение этого уравнения?

3.2. Уравнение ББМ $u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$ возникает как модельное уравнение для однонаправленного распространения длинных волн на мелкой воде.

(a) Какова группа симметрий этого уравнения?

(b) Найдите решения, инвариантные относительно группы, соответствующие различным однопараметрическим подгруппам, которые вы нашли в п. (a). (McLeod, Olver [1].)

3.3. Определите инвариантные относительно растяжений решения задачи Больцмана $u_t = (uu_x)_x$, решения которой описывают диффузию некоторого вещества в среде, причем коэффициент диффузии пропорционален концентрации вещества. Какие существуют другие типы решений, инвариантных относительно группы? (Dresner [1; § 4.1].)

*3.4. Обсудите инвариантные относительно группы решения двумерного волнового уравнения. Можете ли вы их классифицировать?

3.5. Обсудите инвариантные относительно растяжений решения двумерных уравнений Эйлера для потока идеальной жидкости. (Редуцированные уравнения, насколько мне известно, *не* разрешимы в явном виде.)

3.6. Предположим, что сопротивление жидкости объекту определяется плотностью жидкости ρ, скоростью объекта v, размером объекта d и сжимаемостью $\rho^{-2}d\rho/dp$ жидкости. Пусть $c^2 = dp/d\rho$ обозначает скорость звука. Докажите, что $D = \rho v^2 \cdot d^2 f(M)$, где $M = v/c$ — число Маха рассматриваемой жидкости. ($M < 1$ соответствует дозвуковому течению, а $M > 1$ — сверхзвуковому течению.) (Birkhoff [2; с. 126].)

3.7. В 1947 г. Тейлор определил энергию, выделившуюся при первом атомном взрыве в Нью-Мехико, применяя методы подобия к фотографии этого взрыва. При распространении сферической ударной волны радиус R будет зависеть от времени t, выделившейся энергии E, плотности окружающего воздуха ρ_0 и давления p_0. В предположении, что все величины выражены в одной системе единиц, докажите, что

$$R = \left(\frac{t^2 E}{\rho_0}\right)^{1/5} h\left[p_0\left(\frac{t^6 E^2}{\rho_0^3}\right)^{1/5}\right]$$

для некоторой функции $h(\zeta)$. (При малых t аргумент ζ функции h мал, так что можно приблизить $R \simeq h_0 t^{2/5} E^{1/5} \rho_0^{-1/5}$, $h_0 = h(0)$; это соотношение было использовано Тейлором.) (Taylor [1], [2].)

*3.8. Найдите орбиты присоединенного представления евклидовых групп E(2) и E(3). (См. упр. 1.29.)

*3.9. Докажите, что каждая подалгебра алгебры симметрий (2.68) уравнения Кортевега — де Фриза эквивалентна в точности одной подалгебре оптимальной системы, состоящей из 0, одномерных подалгебр (3.25), подалгебр, порожденных

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4\},\ \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\},\ \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\},\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\},\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\},$$
$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\},\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\},\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\},\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\},\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\},$$

и самой полной алгебры симметрий.

3.10. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\Delta[u] = u_{xy} = 0$ на $M = X \times U \simeq \mathbb{R}^3$.

(a) Докажите, что однопараметрическая группа G сдвигов в направлении x: $(x, y, u) \longmapsto (x + \varepsilon, y, u)$ является группой симметрий.

(b) Покажите, что приведенное уравнение Δ/G на M/G пусто, так что всякая функция на M/G определяет G-инвариантное решение системы Δ.

(c) Более общо, докажите, что если G — регулярная группа симметрий системы дифференциальных уравнений Δ и ее инвариантное пространство $I^{(n)}$ является подмножеством соответствующего подмногообразия $\mathcal{S}_\Delta \subset M^{(n)}$, то *каждая* функция на M/G приводит к G-инвариантному решению системы Δ. Как можно на практике проверить условие $I^{(n)} \subset \mathcal{S}_\Delta \subset M^{(n)}$? (См. также упр. 3.18.)

3.11. (a) Пусть G — группа симметрий системы Δ и $H \subset G$ — нормальная подгруппа, регулярно действующая на $M \subset X \times U$. Докажите, что приведенная система Δ/H инвариантна относительно факторгруппы G/H, действующей на M/H.

(b) Пусть $p=2$, $q=1$ и $\Delta(x, u^{(n)})=0$ — одно уравнение с частными производными n-го порядка. Докажите, что если Δ инвариантно относительно $(n+1)$-параметрической разрешимой группы Ли, то все инвариантные относительно группы решения, соответствующие отдельной однопараметрической подгруппе, могут быть найдены с помощью квадратуры.

3.12. Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле на гладком многообразии M и $\dot{x}=\xi(x)$ — система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поток поля $\mathbf{v}$. Пусть группа G действует на M регулярно и является группой симметрий этой системы. Докажите, что на фактормногообразии M/G имеется индуцированное векторное поле $\tilde{\mathbf{v}} = d\pi(\mathbf{v})$, поток которого соответствует потоку поля $\mathbf{v}$ на M. Обсудите, как применить этот результат к теореме 2.66.

3.13. Пусть G — группа Ли и $H \subset G$ — ее замкнутая подгруппа, которая действует на G правыми сдвигами: $g \longmapsto g \cdot h$, $h \in H$. Докажите, что факторпространство G/H является гладким многообразием. Каким будет G/H в случае, когда $G = \mathrm{SO}(3)$ и $H \simeq \mathrm{SO}(2)$ — однопараметрическая подгруппа вращений вокруг фиксированной оси?

3.14. (a) Рассмотрим группу растяжений G: $(x, y) \longmapsto (\lambda x, \lambda^{-1} y)$, регулярно действующую на $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Докажите, что соответствующее фактормногообразие нехаусдорфово и обсудите его структуру.

(b) Решите ту же задачу для группы растяжений, являющихся симметриями уравнения Кортевега—де Фриза. (Olver [2].)

3.15. Пусть $p=2$, $q=1$. Рассмотрим однопараметрическую группу G: $(x, y, u) \longmapsto (x+\varepsilon, y+\varepsilon u, u)$. Докажите, что G действует всюду трансверсально, но не существует непостоянных глобально определенных G-инвариантных функций.

3.16. p-грассманово расслоеие над m-мерным многообразием M, $m \geqslant p$, определяется так, что над каждой точкой $x \in M$ Grass $(p, M)]_x$ = Grass $(p, TM|_x)$ — грассманово многообразие p-мерных плоскостей в касательном пространстве $TM|_x$. (См. упр. 1.2.) Докажите, что это то же самое, что и первое расширенное расслоение струй: Grass $(p, M) \simeq M_*^{(1)}$. (Olver [2].)

3.17. Пусть G — группа преобразований, действующая на $M \subset X \times U$, продолжение $\mathrm{pr}^{(n)} G$ которой действует на $M^{(n)}$.

(a) Докажите, что размерность орбит продолжения $\mathrm{pr}^{(n)} G$ больше или равна размерности орбит группы G. Приведите пример, когда имеет место строгое неравенство.

(b) Докажите, что если G есть r-параметрическая группа и G имеет r-мерные орбиты, то то же верно и для $\mathrm{pr}^{(n)} G$.

(c) Докажите, что если группа G имеет r-мерные орбиты, то $I^{(n)} = (I^{(1)})^{(n-1)}$, где $(I^{(1)})^{(n-1)}$ обозначает $(n-1)$-е продолжение инвариантного пространства $I^{(1)} \subset M^{(1)}$ (см. определение 2.81). Интерпретируйте следствие 2.54 в свете этого результата.

*3.18. *Явная характеризация инвариантного пространства.*

(a) Пусть $p = q = 1$. Пусть G — регулярная однопараметрическая группа преобразований, действующая на $M \subset X \times U$ и имеющая единственный глобальный инвариант $\zeta(x, u)$. Докажите, что инвариантное пространство $I^{(n)} \subset M^{(n)}$ определяется уравнениями

$$I^{(n)} = \left\{(x, u^{(n)}): D_x^k \zeta = 0, k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

(b) Пусть $q = 1$, а p произвольное. Пусть G — регулярная однопараметрическая группа преобразований, действующая на M и имеющая глобальные инварианты $\eta^1(x, u), \ldots, \eta^p(x, u)$. Докажите, что

$$I^{(1)} = \{(x, u^{(1)}): \mathrm{D}(\eta^1, \ldots, \eta^p)/\mathrm{D}(x^1, \ldots, x^p) = 0\},$$

где определяющее уравнение представляет собой «полный якобиан»:

$$\frac{\mathrm{D}(\eta^1, \ldots, \eta^p)}{\mathrm{D}(x^1, \ldots, x^p)} = \det(D_i \eta^j).$$

Что будет в случае, если G есть r-параметрическая группа?

(c) Обобщите п. (b) и дайте явную характеризацию инвариантного пространства $I^{(n)}$ в общем случае.

(d) Как этот результат соотносится с теоремой 3.38?

3.19. Покажите, что векторное поле $\mathbf{v} = 2t\partial_x + \partial_t + 8t\partial_u$ не является симметрией уравнения $u_{tt} = uu_{xx}$, но тем не менее можно применить метод этой главы, чтобы найти решения, инвариантные относительно однопараметрической группы, порожденной полем $\mathbf{v}$. Покажите, что никакое из них не появляется среди стандартных решений, инвариантных относительно группы. Объясните это. (См. следующее упражнение.) (Olver, Rosenau [1].)

3.20. *Неклассический метод для решений, инвариантных относительно группы.* В работе Bluman, Cole [1] предлагается следующий метод для нахождения решений, инвариантных относительно группы, в качестве обобщения метода редукции.

(a) Пусть Δ — система уравнений с частными производными n-го порядка на M с соответствующим подмногообразием $\mathscr{S}_\Delta^* \subset M_*^{(n)}$. Пусть G — регулярная группа преобразований, действующая на M, с инвариантным пространством $I_*^{(n)} \subset M_*^{(n)}$. Докажите, что если пересечение $\mathscr{S}_\Delta^* \cap I_*^{(n)}$ инвариантно относительно $\mathrm{pr}^{(n)} G$, то на фактормногообразии M/G имеется редуцированная система дифференциальных уравнений Δ/G, такая, что все решения системы Δ/G приводят к G-инвариантным решениям системы Δ и наоборот. (Особо отметим, что само $\mathscr{S}_\Delta^*$ *не* обязано быть инвариантным относительно $\mathrm{pr}^{(n)} G$, так что эти группы более общие, чем группы симметрий, определенные в гл. 2.)

(b) Интерпретируйте упр. 3.19 в свете этого результата.

(c) Пусть Δ — *произвольная* система дифференциальных уравнений и G — *произвольная* (регулярная) группа преобразований. Докажите, что подходящее продолжение пересечения $\mathscr{S}_\Delta^* \cap I_*^{(n)}$ (согласно определению 2.81) всегда является $\mathrm{pr}^{(n)} G$-инвариантным. Таким образом, можно использовать любую группу, чтобы осуществить редукцию п. (a). (*Указание.* Воспользуйтесь формулой продолжения (2.50) и характеризацией инвариантного пространства из теоремы 3.37.)

(d) Обратно, покажите, что если $u = f(x)$ — любое решение системы Δ, то существует группа G, которая методом редукции п. (a) приводит к этому решению.
(Olver, Rosenau, [1].)

3.21. Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле на $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Пусть $Q = (Q_1, \ldots, Q_q)$ — характеристика поля $\mathbf{v}$ в координатах (x, u), ср. (2.48). Пусть $y = Y(x, u)$, $v = \Psi(x, u)$ — замена координат на M, и пусть $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_q)$ — характеристика поля $\mathbf{v}$ в новых координатах (y, v) на M. Докажите, что $\tilde{Q}$ и Q связаны формулой замены переменных

$$\tilde{Q}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha \left(\frac{\partial \Psi^\beta}{\partial u^\alpha} - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial Y^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial v^\beta}{\partial y^j} \right), \quad \beta = 1, \ldots, q.$$