$\mathrm{pr}^{(n)}G$, для которого $(y, v^{(n)})$ образуют полную систему независимых инвариантов. В силу предложения 2.18 имеется эквивалентное множество уравнений, которое мы обозначаем Δ/G, не зависящее от параметрических переменных $\hat{x}$, так что

$$\mathcal{S}_\Delta \cap \tilde{I}^{(n)} = \{(\hat{x}, y, v^{(n)}) \in \tilde{I}^{(n)}\colon \Delta/G(y, v^{(n)}) = 0\}.$$

Из указанного ранее вида проекции $\pi^{(n)}$ мы немедленно заключаем, что часть редуцированной системы в $(\widetilde{M/G})^{(n)}$, а именно

$$\mathcal{S}_{\Delta/G} = \pi^{(n)}(\mathcal{S}_\Delta \cap \tilde{I}^{(n)}) = \{(y, v^{(n)})\colon \Delta/G(y, v^{(n)}) = 0\}, \qquad (3.44)$$

задается уравнениями Δ/G. Таким образом, мы полностью обосновали процедуру § 3.1. Теорема 3.36, дополненная предложением 3.40, показывает, что нами доказан следующий строгий способ построения инвариантных относительно группы решений систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Теорема 3.41. *Пусть G — локальная группа преобразований, действующая регулярно и трансверсально на $M \subset X \times U$ с глобально определенными независимыми инвариантами, и, значит, $M/G \subset Y \times V$. Пусть Δ — система уравнений с частными производными, определенная на M, допускающая группу G в качестве своей группы симметрий. Тогда имеется редуцированная система дифференциальных уравнений Δ/G на M/G, заданная* (3.44), *обладающая тем свойством, что всякая G-инвариантная функция $u = f(x)$ на M, соответствующая корректно определенной функции $v = h(y)$ на M/G, будет решением системы Δ, если и только если ее представитель h — решение системы Δ/G.*

(Подходящие замены координат на M/G приведут ко всем G-инвариантным решениям системы Δ, даже к тем, которые изначально были нетрансверсальными при исходном выборе координат.) Это завершает наше развитие теории и обоснования процедуры редукции.

Замечания

Несмотря на многочисленные заявления, что понятие инвариантного относительно группы решения системы уравнений с частными производными не сложилось в полной общности вплоть до 1950 г., на самом деле Ли в одной из своих последних работ Lie [6] ввел изложенный нами общий метод отыскания таких решений. Ли рассматривал решения систем уравнений с частными производными, инвариантные относительно групп контактных преобразований, однако его результаты включают локальные варианты теперешних теорем редукции. В § 65 вышеупомянутой работы он доказал, что все решения уравнения с частными производными от двух независимых переменных, инвариантные относительно однопараметрической группы, можно найти путем решения связанного с исходным обыкновенного дифференциального уравнения. Обобщение на системы уравнений с частными производными, инвариантные относительно многопараметрических групп, т. е. наша теорема 3.41, сформулировано и доказано в § 76 той же работы, но, насколько мне известно, на нее ранее не было никаких ссылок ни в какой литературе на эту тему!

Ли умер прежде, чем смог найти какие бы то ни было приложения своего открытия. Много позже в работах Morgan A. [1], Michal [1] заново был получен результат Ли для случая однопараметрических групп симметрий. Впоследствии Овсянников [1], [2] рассмотрел общий случай, также не зная более ранней работы Ли. До этих переоткрытий в литературе время от времени появлялись различные частные примеры решений, инвариантных относительно группы, в особенности автомодельных, но без всякого указания на то, что это частные случаи гораздо более общей теории. Первое такое построение, о котором мне известно, проводится в работе Boltzmann [1]. На рубеже столетий автомодельные решения широко появляются в работе Прандтля, Мейера и Блазиуса и позже в работе Фолкнера и Скэна по пограничному слою в механике жидкости: см. Birkhoff [2; гл. 5], где приводятся эти и другие ссылки, а также обсуждается история Пи-теоремы 3.22 из теории размерностей. Работа Седова [1] дала сильный толчок к применению групп растяжений и получающихся таким образом автомодельных решений в теории размерностей для сложных систем. (Хорошее современное введение в использование методов подобия в инженерных приложениях представляет собой книга Seshadri, Na [1].) На долю Биркгофа (Birkhoff [2]) выпала борьба за использование более общих симметрий для построения точных решений уравнений с частными производными, и, таким образом, он непосредственно стимулировал переоткрытие метода Ли.

С тех пор как Овсянников начал свои широкие исследования, метод редукции для построения инвариантных относительно группы решений стал средоточием большой исследовательской активности сначала в Советском Союзе, а впоследствии в Европе и Соединенных Штатах. К настоящему моменту имеется много советских работ о свойствах симметрий и точных решениях уравнений механики жидкости, включая новые работы Капитанского [1], [2], упомянутые в тексте; см. Овсянников [3;

с. 391], где приведена полная библиография. (Другую технику для построения точных решений в механике жидкости можно найти в работе Berker [1].) Появление дополнительных симметрий после выполнения редукции по группе, замеченное Капитанским, рассмотрено также в работе Rosen [2].

Инвариантные относительно группы решения с большим эффектом были использованы в описании асимптотического поведения гораздо более широких классов решений систем уравнений с частными производными. Книга Баренблата [1] дает хорошее введение в применения к гиперболическим уравнениям. В том же духе в работе Ablowitz, Kodama [1] дан строгий анализ асимптотического поведения решений уравнения Кортевега — де Фриза, доказывающий, что всякое решение, стремящееся к нулю на $\pm\infty$, в конечном счете распадается в конечное число различных солитонов (бегущих волн) плюс диспергирующий хвост, убывающий, как решение описанного здесь второго уравнения Пенлеве[1]). Полная классификация инвариантных относительно группы решений уравнений Кортевега — де Фриза появилась впервые в работе Костина [1]. Похожие идеи возникают в задаче Сент-Венана в теории упругости — см. Ericksen [1].

Предположение об общей связи между вполне интегрируемыми (солитонными) уравнениями, такими, как уравнение Кортевега — де Фриза, и обыкновенными дифференциальными уравнениями типа Пенлеве, использующей механизм групповой инвариантности, было впервые высказано в работе Ablowitz, Ramani, Segur [1]. Доказательства некоторых частных случаев этого общего предположения, дающего вполне полезный тест на «интегрируемость», были приведены в работах Ablowitz, Ramani, Segur [2], McLeod, Olver [1]. (Недавно этот метод был значительно расширен в работе Weiss, Tabor, Carnevale [1].)

Строгое обоснование общего метода построения инвариантных относительно группы решений, основанное на монографии Palais [1] и понятии фактормногообразия, впервые появилось в работе Olver [2]. Здесь же впервые было предложено определение расширенного расслоения струй. Наше изложение является сильно упрощенным вариантом этой теории. (См. также Виноградов [5].) Расширенные расслоения струй, по-видимому, должны найти более широкое применение в дифференциальной геометрии, особенно, когда нужно иметь дело с дифференциальными уравнениями с многозначными решениями.

Присоединенное представление группы Ли на ее алгебре Ли было известно Ли. Использование его для классификации инвариантных относительно группы решений было предложено в ра-

[1]) Этот результат содержится в работе А. Б. Шабата [1**]. — *Прим. ред.*

ботах Овсянникова [2; § 86] и [3; § 20]. Последняя из них содержит больше подробностей о том, как провести классификацию подгрупп группы Ли относительно присоединенного действия. Дальнейшее развитие этот метод получил в работе Patera, Winternitz, Zassenhaus [1], где указано также множество примеров оптимальных систем подгрупп групп Ли, играющих важную роль в математической физике. Классификация алгебр Ли симметрий для уравнения теплопроводности дана впервые в работе Weisner [1] при исследовании связей между группами Ли и специальными функциями. См. также Kalnins, Miller [1], где эта классификация применяется к вопросу о разделении переменных.

Обобщение понятия решения, инвариантного относительно группы, так называемое частично инвариантное решение, было введено Овсянниковым [2; § 17], [3; гл. 6]. В сущности частично инвариантное решение — это решение, график которого, хотя и не является полностью инвариантным относительно преобразований из рассматриваемой группы, должен оставаться в подмногообразии размерности, строго меньшей, чем $p+r$. Здесь p — число независимых переменных, а r — размерность орбит группы G. (Заметим, что график общей функции должен был бы отображаться в $(p+r)$-мерное многообразие под действием всей группы преобразований.) В определенных случаях такие решения также можно найти точно с помощью решения редуцированной системы дифференциальных уравнений с меньшим числом независимых переменных, но промежуточные вычисления значительно более сложны, чем в полностью инвариантном случае. Читателя, интересующегося полным развитием этой теории, мы отсылаем к упомянутым выше работам Овсянникова.

Другое возможное обобщение было предложено в работе Bluman, Cole [1] и в книге Ames [1; v. 2, § 2.10]. Оно называется «неклассическим методом» для решений, инвариантных относительно группы. Здесь не требуется, чтобы все подмногообразие $\mathscr{S}^*_\Delta$ было $\mathrm{pr}^{(n)}G$-инвариантным. Нужно лишь, чтобы $\mathrm{pr}^{(n)}G$-инвариантным было его пересечение с инвариантным пространством $\mathscr{S}^*_\Delta \cap I^{(n)}_*$. Этот метод, хотя и приводит к редуцированным уравнениям, несколько *слишком* общий. Дело в том, что, поскольку мы допускаем продолжения уравнений, *каждая* группа преобразований на M удовлетворяет этому требованию, и обратно, *каждое* решение системы может быть получено таким путем. См. упр. 3.20 и указанную там работу на эту тему.

Упражнения

3.1. Рассмотрим волновое уравнение $u_{tt} - u_{xx} + (u/x) = 0$ с осевой симметрией.

(a) Какие у него группы симметрий?