4. Группы симметрий и законы сохранения

При анализе основных свойств решений систем дифференциальных уравнений важную роль играет понятие закона сохранения, являющегося математической формулировкой известных физических законов сохранения энергии, сохранения импульса и т. д. В 1918 г. Эмми Нётер доказала замечательный результат для систем, возникающих из вариационного принципа: каждый закон сохранения такой системы происходит из соответствующего свойства симметрии[1]). Например, инвариантность вариационной задачи относительно группы сдвигов по времени влечет за собой сохранение энергии для решений соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа, а инвариантность относительно пространственных сдвигов влечет за собой сохранение импульса. Этот основной принцип представляет собой первый фундаментальный результат в изучении классических или квантовомеханических систем с предписанными группами симметрий. Более того, метод Нётер является единственной действительно систематической процедурой построения законов сохранения для сложных систем уравнений с частными производными.

Чтобы применять теорему Нётер, в рассматриваемой системе нужна вариационная структура некоторого вида. Первый параграф этой главы дает элементарное введение в соответствующие аспекты вариационного исчисления. Наиболее важным из них является построение уравнений Эйлера — Лагранжа, характеризующих минимумы вариационной задачи. Помимо этого потребуется не много результатов из вариационного исчисления, так что заинтересованным в дальнейшем изучении этой важной области математики мы бы посоветовали обратиться к любому стандартному учебнику по этому предмету. Не каждая группа симметрий системы уравнений Эйлера — Лагранжа приведет к закону сохранения; нужно, чтобы группа удовлетворяла дополнительному «вариационному» условию — оставляла вариа-

[1]) Сейчас имеется доступный английский перевод работы Noether [1]. Мы *настоятельно* советуем читателю изучить эту весьма важную работу.

ционный интеграл в некотором смысле инвариантным. В § 4.2 развивается теория вариационных симметрий; там имеется ряд иллюстрирующих примеров. В случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений в вариационной форме вариационный характер группы симметрий *удваивает* эффективность процедуры редукции, рассмотренной в § 2.5, так что система уравнений Эйлера — Лагранжа, обладающая однопараметрической группой вариационных симметрий, допускает понижение порядка на две единицы.

Третий параграф этой главы посвящен систематическому развитию теории законов сохранения систем дифференциальных уравнений. Важное осложнение здесь связано с существованием тривиальных законов сохранения, которые выполняются для произвольной системы дифференциальных уравнений и в сущности не дают новой информации о поведении решений рассматриваемой системы. Мы в состоянии полностью характеризовать такие тривиальные законы (с точностью до некоторых доказательств, приведенных в конце гл. 5). Каждый нетривиальный закон сохранения для нормальных систем дифференциальных уравнений однозначно определяется некоторой функцией, называемой его характеристикой. Используя эту связь между законами сохранения и их характеристиками, мы немедленно получаем доказательство так называемой «классической формы» теоремы Нётер. Во второй части § 4.4 мы применяем конструкции, воплощенные в теореме Нётер, чтобы определить законы сохранения для некоторых физически важных систем. Недостаток места, однако, мешает нам применить эти законы сохранения для непосредственного изучения свойств решений этих систем, таких, как глобальные теоремы существования, оценки затухания, теория рассеяния, задачи распространения трещин и дислокаций, устойчивость решений и т. д. (соответствующие работы обсуждаются кратко в конце главы).

4.1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Как обычно, для простоты мы будем работать в евклидовом пространстве, причем $X = \mathbb{R}^p$ с координатами $x = (x^1, \ldots, x^p)$, представляющими независимые переменные, и $U = \mathbb{R}^q$ с координатами $u = (u^1, \ldots, u^q)$, представляющими зависимые переменные нашей задачи. (Распространение локальных результатов на вариационные задачи для гладких многообразий не вызывает затруднений; однако глобальные результаты требуют введения топологической техники — см. Anderson, Duchamp [1] или Виноградов [1].) Пусть $\Omega \subset X$ — открытое связное подмножество с гладкой границей $\partial\Omega$. *Вариационная задача* формулируется как задача об отыскании экстремумов (максимумов или минимумов) *функционала*

$$\mathscr{L}[u] = \int_{\Omega} L(x, u^{(n)})\, dx$$

в некотором классе функций $u = f(x)$, определенных на Ω. Подынтегральное выражение $L(x, u^{(n)})$, называемое *лагранжианом* вариационной задачи $\mathscr{L}$, является гладкой функцией от x, u и различных производных от u. Точное описание класса функций, на котором ищется экстремум функционала $\mathscr{L}$, будет зависеть и от граничных условий, которые могут относиться к физической задаче, и от условий дифференцируемости, накладываемых на экстремали $u = f(x)$.

В качестве простого примера рассмотрим задачу отыскания кривой наименьшей длины, соединяющей две точки (a, b) и (c, d) на плоскости. Эта задача в вариационной форме выглядит следующим образом. Предположим, что минимизирующая кривая задается графиком функции $u = f(x)$. Длина такой кривой равна

$$\mathscr{L}[u] = \int_{a}^{c} \sqrt{1 + u_x^2}\, dx.$$

Вариационная задача состоит в минимизации $\mathscr{L}$ на пространстве, скажем, дифференцируемых функций $u = f(x)$, таких, что $b = f(a)$ и $d = f(c)$.

Точная степень гладкости, требующаяся для экстремалей данной вариационной задачи, пространство функций, на котором нужно искать экстремали, и подходящая норма (или нормы) — это, вообще говоря, довольно деликатные вопросы, требующие развитого нелинейного функционального анализа. Сложные проблемы, возникающие здесь, не имеют, однако, прямого отношения к нашей непосредственной области исследования. Поэтому для упрощения мы рассматриваем лишь гладкие (C^{∞}) экстремали вариационной задачи. Распространение наших результатов на группы симметрий и законы сохранения для более общих типов функций должно учитывать специфику конкретной задачи.

Вариационная производная

В конечных размерностях экстремумы гладкой вещественнозначной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, определяются рассмотрением точек, в которых градиент $\nabla f(x)$ обращается в нуль. Чтобы найти сам градиент, нужно выяснить, как меняется f при малом изменении x:

$$\langle \nabla f(x), y\rangle = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon y),$$

где $\langle x, y\rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Для функционалов $\mathscr{L}[u]$ роль градиента играет «вариационная производная» от $\mathscr{L}$. Чтобы построить этот объект, мы смотрим, как меняется $\mathscr{L}$ при малых «вариациях» функции u. Скалярное произведение $\langle\cdot, \cdot\rangle$ в $\mathbb{R}^m$ заменяется скалярным произведением в L^2

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{q} f^\alpha(x) g^\alpha(x)\,dx$$

двух векторнозначных функций $f, g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Это приводит к следующему определению:

Определение 4.1. Пусть $\mathscr{L}[u]$ — вариационный функционал. *Вариационная производная* функционала $\mathscr{L}$ — это единственный набор из q функционалов

$$\delta\mathscr{L}[u] = (\delta_1\mathscr{L}[u], \ldots, \delta_q\mathscr{L}[u]),$$

обладающий тем свойством, что

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathscr{L}[f+\varepsilon\eta] = \int_\Omega \delta\mathscr{L}[f(x)]\cdot\eta(x)\,dx. \tag{4.1}$$

Здесь $u = f(x)$ — гладкая функция, определенная на Ω, а $\eta(x) = (\eta^1(x), \ldots, \eta^q(x))$ — гладкая функция с компактным носителем в Ω, так что $f+\varepsilon\eta$ все еще удовлетворяет любым граничным условиям, которые могут быть наложены на пространство функций, на котором ищется экстремум функционала $\mathscr{L}$. Компонента $\delta_\alpha\mathscr{L} = \delta\mathscr{L}/\delta u^\alpha$ — *вариационная производная от* $\mathscr{L}$ *по* u^α.

Предложение 4.2. *Если $u = f(x)$ — экстремаль вариационного функционала $\mathscr{L}[u]$, то*

$$\delta\mathscr{L}[f(x)] = 0, \quad x\in\Omega. \tag{4.2}$$

Доказательство. Поскольку f — экстремаль, для любой функции η с компактным носителем в Ω функция $f+\varepsilon\eta$ лежит в том же функциональном пространстве, так что как функция от ε $\mathscr{L}[f+\varepsilon\eta]$ должна иметь экстремум в точке $\varepsilon = 0$. Поэтому из элементарного математического анализа получаем, что (4.1) должно обращаться в нуль для всех η с компактным носителем в Ω. Следовательно, (4.2) должно быть справедливо всюду. (То же рассуждение доказывает единственность $\delta\mathscr{L}$.) □

Нетрудно получить общую формулу для вариационной производной. Прежде всего, меняя порядок дифференцирования и интегрирования (это допускается при нашем предположении о гладкости), получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathscr{L}[f+\varepsilon\eta] = \int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} L(x,\ \mathrm{pr}^{(n)}(f+\varepsilon\eta)(x))\,dx =$$
$$= \int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha,J} \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha}(x,\ \mathrm{pr}^{(n)} f(x)) \cdot \partial_J \eta^\alpha(x) \right\} dx,$$

где u_J^α — обычные частные производные от u^α, а $\partial_J\eta^\alpha$ — соответствующие производные от η^α. Поскольку η имеет компактный носитель, мы можем воспользоваться теоремой о дивергенции, чтобы проинтегрировать последнее выражение по частям, причем граничные члены на $\partial\Omega$ обратятся в нуль. Каждая частная производная $\partial/\partial x^j$, примененная к производным $\partial L/\partial u_J^\alpha$ лагранжиана, превращается в полную производную D_j, поскольку L зависит от x также и через функцию $u = f(x)$ — см. определение 2.34. Поэтому

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathscr{L}[f+\varepsilon\eta] = \int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha=1}^{q} \left[\sum_J (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha}(x,\ \mathrm{pr}^{(n)} f(x)) \right] \eta^\alpha(x) \right\} dx,$$

где для $J = (j_1, \ldots, j_k)$

$$(-D)_J = (-1)^k D_J = (-D_{j_1})(-D_{j_2}) \ldots (-D_{j_k}).$$

Оператор, появившийся в предыдущей формуле, играет ключевую роль в вариационном исчислении.

Определение 4.3. Для $1 \leqslant \alpha \leqslant q$ *оператор Эйлера* с номером α задается формулой

$$\mathrm{E}_\alpha = \sum_J (-D)_J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \tag{4.3}$$

Сумма берется по всем мультииндексам $J = (j_1, \ldots, j_k)$ с $1 \leqslant j_\varkappa \leqslant p$, $k \geqslant 0$. Заметим, что для применения E_α к произвольной данной функции $L(x, u^{(n)})$ от u и их производных нужно просуммировать лишь конечное число слагаемых, поскольку L зависит лишь от конечного числа производных u_J^α.

Таким образом, согласно нашему вычислению, вариационная производная от $\mathscr{L}[u]=\int_\Omega L(x, u^{(n)})\,dx$ находится применением оператора Эйлера к лагранжиану: $\delta\mathscr{L}[u]=\mathsf{E}(L)$, где $\mathsf{E}(L)=(\mathsf{E}_1(L), \ldots, \mathsf{E}_q(L))$. Предложение 4.2 дает классические необходимые условия для гладких экстремалей вариационной задачи. (Конечно, не каждое решение уравнений Эйлера — Лагранжа является экстремалью. Другие решения доставляют другие типы критических точек функционала.)

Теорема 4.4. *Если $u=f(x)$ — гладкая экстремаль вариационного функционала $\mathscr{L}(u)=\int_\Omega L(x, u^{(n)})\,dx$, то она должна быть решением* уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\mathsf{E}_\nu(L)=0, \quad \nu=1, \ldots, q.$$

Пример 4.5. Рассмотрим частный случай $p=q=1$, так что мы рассматриваем одну функцию $u=f(x)$ одной независимой переменной. Оператор Эйлера в этом случае принимает вид

$$\mathsf{E}=\sum_{j=0}^{\infty}(-D_x)^j\frac{\partial}{\partial u_j}=\frac{\partial}{\partial u}-D_x\frac{\partial}{\partial u_x}+D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}-\ldots,$$

где D_x — полная производная по x, а $u_j=d^ju/dx^j$. Уравнение Эйлера — Лагранжа для вариационной задачи n-го порядка с

$$\mathscr{L}[u]=\int_a^b L(x, u^{(n)})\,dx$$

имеет вид

$$0=\mathsf{E}(L)=\frac{\partial L}{\partial u}-D_x\frac{\partial L}{\partial u_x}+D_x^2\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}-\ldots+(-1)^n D_x^n\frac{\partial L}{\partial u_n}.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2n$, если только L удовлетворяет условию невырожденности $\partial^2L/\partial u_n^2\neq 0$. В частности, для вариационной задачи первого порядка $L=L(x, u, u_x)$ мы приходим к хорошо известному уравнению Эйлера — Лагранжа второго порядка

$$0=\frac{\partial L}{\partial u}-D_x\frac{\partial L}{\partial u_x}=\frac{\partial L}{\partial u}-\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial u_x}-u_x\frac{\partial^2 L}{\partial u\,\partial u_x}-u_{xx}\frac{\partial^2 L}{\partial u_x^2}.$$

Таким образом, для нашей задачи нахождения кривой минимальной длины уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$-D_x\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)=-\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}=0.$$

Его решения — прямые $u=mx+k$, и это единственные гладкие претенденты для задачи минимизации.

Пример 4.6. Возможно, наиболее известная вариационная задача проистекает из принципа Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Здесь мы полагаем

$$\mathscr{L}[u] = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p u_i^2 \, dx,$$

где $u_i = \partial u/\partial x^i$ и $\Omega \subset X \simeq \mathbb{R}^p$. Уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$0 = \mathsf{E}(L) = \sum_{i=1}^p (-D_i) \frac{\partial L}{\partial u_i} = -\sum_{i=1}^p D_i(u_i) = -\Delta u$$

и совпадает с уравнением Лапласа с точностью до знака. Дальнейшие примеры появятся в этой главе позже.

Нулевые лагранжианы и дивергенции

Бывает, что для данной вариационной задачи уравнения Эйлера — Лагранжа обращаются в нуль тождественно, и, значит, каждая функция является возможной экстремалью задачи. Например, если

$$\mathscr{L}[u] = \int_a^b u u_x \, dx,$$

то

$$\delta\mathscr{L} = u_x - D_x(u) \equiv 0$$

для всех u. В этом случае вариационная задача тривиальна, поскольку в силу основной теоремы анализа

$$\mathscr{L}[u] = \int_a^b D_x\left(\frac{1}{2} u^2\right) dx = \frac{1}{2} u^2 \Big|_{x=a}^b,$$

так что каждая функция $u = f(x)$, удовлетворяющая подходящим граничным условиям, даст то же самое значение для $\mathscr{L}$.

Эта ситуация легко обобщается на случай нескольких независимых переменных. Если $x = (x^1, \ldots, x^p)$ и $P(x, u^{(n)}) = (P_1(x, u^{(n)}), \ldots, P_p(x, u^{(n)}))$ — набор из p гладких функций от x, u и производных от u, мы определяем *полную дивергенцию* от P как функцию

$$\operatorname{Div} P = D_1 P_1 + D_2 P_2 + \ldots + D_p P_p, \tag{4.4}$$

где каждая D_j — полная производная по x^j. Например, если $p = 2$ и $P = (uu_y, uu_x)$, то

$$\mathbf{Div}\, P = D_x(uu_y) + D_y(uu_x) = 2uu_{xy} + 2u_xu_y.$$

Если лагранжиан $L(x, u^{(n)})$ может быть записан как дивергенция: $L = \mathbf{Div}\, P$ для некоторого P, то по теореме о дивергенции

$$\mathscr{L}[u] = \int_\Omega L\, dx = \int_{\partial\Omega} P \cdot dS$$

для всякой функции $u = f(x)$ и всякой ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Таким образом, $\mathscr{L}[f]$ зависит лишь от поведения функции $u = f(x)$ на границе и не будет меняться при вариациях η, использующихся при определении вариационной производной. Поэтому уравнения Эйлера — Лагранжа для такого функционала тождественно обращаются в нуль. Замечательно, что этим исчерпываются примеры «нулевых лагранжианов».

Теорема 4.7. *Функция $L(x, u^{(n)})$ от x, u и производных от u, определенная всюду на $X \times U^{(n)}$, является* нулевым лагранжианом *(это означает, что для нее уравнения Эйлера — Лагранжа обращаются в нуль тождественно для всех x, u: $\mathsf{E}(L) \equiv 0$), если и только если она является полной дивергенцией: $L = \mathbf{Div}\, P$ для некоторого набора из p функций $P = (P_1, \ldots, P_p)$ от x, u и производных от u.*

Доказательство. Доказательство того, что $\mathsf{E}(\mathbf{Div}\, P) \equiv 0$, следует из сделанных выше замечаний или из непосредственного вычисления; см. § 5.4. Чтобы доказать обратное, предположим, что $L(x, u^{(n)})$ — нулевой лагранжиан, и рассмотрим производную

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(x, \varepsilon u^{(n)}) = \sum_{\alpha, J} u_J^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha}(x, \varepsilon u^{(n)}).$$

Каждый член этой суммы можно проинтегрировать по частям, например,

$$u_i^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} = D_i(u^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} = -u^\alpha D_i \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} + D_i\left(u^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right).$$

Это приводит к выражению вида

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(x, \varepsilon u^{(n)}) = \sum_{\alpha=1} u^\alpha \sum_J (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha}(x, \varepsilon u^{(n)}) + \mathbf{Div}\, \widehat{P}(\varepsilon; x, u^{(2n)}) =$$
$$= u \cdot \mathsf{E}(L)(x, \varepsilon u^{(2)}) + \mathbf{Div}\widehat{P}(\varepsilon; x, u^{(2n)})$$

для некоторого набора $\tilde{P}$ из p функций от x, u и производных от u, явный вид которых не важен. (См., однако, § 5.4.) Поскольку $\mathsf{E}(L) \equiv 0$, мы можем интегрировать по ε,

$$L(x, u^{(n)}) - L(x, 0) = \mathbf{Div}\, \tilde{P},$$

где

$$\tilde{P}(x, u^{(2n)}) = \int_0^1 \hat{P}(\varepsilon; x, u^{(2n)})\, d\varepsilon.$$

Наконец, поскольку L определена на всем $\mathbb{R}^p$, мы всегда можем найти набор $p(x)$ из p обычных функций от x, такой, что $\operatorname{div} p(x) = L(x, 0)$, так что для завершения доказательства осталось положить $P = \tilde{P} + p$. □

Инвариантность оператора Эйлера

Поскольку уравнения Эйлера — Лагранжа определяют экстремали вариационной задачи, множество их решений не должно меняться при заменах переменных. Это наводит на мысль, что сам оператор Эйлера должен быть более или менее инвариантным относительно замены переменных. Здесь мы выводим основную формулу, выражающую этот факт.

Заметим сначала, что если

$$\tilde{x} = \Xi(x, u), \quad \tilde{u} = \Phi(x, u) \tag{4.5}$$

— произвольная замена переменных, то имеется индуцированная замена переменных

$$\tilde{u}^{(n)} = \Phi^{(n)}(x, u^{(n)})$$

для производных, задаваемая продолжением. Таким образом, для данной функции $u = f(x)$ формулы (4.5) неявно определяют преобразованную функцию $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ (если выполнены условия, требуемые теоремой о неявной функции). При этом каждый функционал

$$\mathscr{L}[f] = \int_\Omega L(x, \mathbf{pr}^{(n)} f(x))\, dx$$

будет преобразован к новому виду

$$\tilde{\mathscr{L}}[\tilde{f}] = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{L}(\tilde{x}, \mathbf{pr}^{(n)} \tilde{f}(\tilde{x}))\, d\tilde{x}.$$

В этом последнем интеграле преобразованная область

$$\tilde{\Omega} = \{\tilde{x} = \Xi(x, f(x)) \colon x \in \Omega\}$$

будет зависеть не только от исходной области Ω, но и от конкретной функции $u=f(x)$, на которой вычисляется $\mathscr{L}$. Формула для нового лагранжиана легко получается из формулы замены переменных в кратном интеграле:

$$L(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x)) = \tilde{L}(\tilde{x}, \mathrm{pr}^{(n)} \tilde{f}(\tilde{x})) \det \mathrm{J}(x, \mathrm{pr}^{(1)} f(x)). \tag{4.6}$$

Здесь $(\tilde{x}, \tilde{u})$ заданы формулами (4.5), а J — матрица Якоби, элементы

$$\mathrm{J}^{ij}(x, \mathrm{pr}^{(1)} f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^j}[\Xi^i(x, f(x))] =$$
$$= D_j \Xi^i(x, \mathrm{pr}^{(1)} f(x)), \quad i, j = 1, \ldots, p,$$

которой соответствуют функции f. Здесь мы для простоты предполагаем, что замена переменных сохраняет ориентацию, так что $\det \mathrm{J}(x) > 0$.

Теорема 4.8. *Пусть $L(x, u^{(n)})$ и $\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)})$ — два лагранжиана, связанные формулой* (4.6) *замены переменных. Тогда*

$$\mathrm{E}_{u^\alpha}(L) = \sum_{\beta=1}^{q} \mathrm{F}_{\alpha\beta}(x, u^{(1)}) \mathrm{E}_{\tilde{u}^\beta}(\tilde{L}), \quad \alpha = 1, \ldots, q. \tag{4.7}$$

Здесь $(\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)})$ и $(x, u^{(n)})$ связаны соотношениями (4.5), *а $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ — определитель следующей матрицы размера $(p+1)\times(p+1)$:*

$$\mathrm{F}_{\alpha\beta} = \det \begin{pmatrix} D_1\Xi^1 & \ldots & D_p\Xi^1 & \partial\Xi^1/\partial u^\alpha \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ D_1\Xi^p & \ldots & D_p\Xi^p & \partial\Xi^p/\partial u^\alpha \\ D_1\Phi^\beta & \ldots & D_p\Phi^\beta & \partial\Phi^\beta/\partial u^\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Пусть $u=f(x)$ — данная функция, определенная на области Ω, и пусть $\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x})$, $\tilde{x}\in\tilde{\Omega}$, — соответствующая функция от преобразованных переменных (обычно она корректно определена, пока Ω достаточно мала). Для достаточно малых ε возмущениям $u_\varepsilon = f(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon\eta(x)$, где η имеет компактный носитель в Ω, соответствуют функции вида $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}, \varepsilon)$, которые неявно определяются соотношениями

$$\tilde{x} = \Xi(x, f(x) + \varepsilon\eta(x)), \quad \tilde{u} = \Phi(x, f(x) + \varepsilon\eta(x)). \tag{4.9}$$

Важный момент состоит в том, что, поскольку η имеет компактный носитель в Ω, каждая функция $\tilde{f}(\tilde{x}, \varepsilon) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{\eta}(\tilde{x}, \varepsilon)$ определена на общей области

$$\tilde{\Omega} = \{\tilde{x} = \Xi(x, f(x)) : x \in \Omega\},$$

не зависящей от ε, и $\tilde{\eta}$ имеет компактный носитель в $\tilde{\Omega}$. Вариационная производная от $\mathscr{L}$ определялась дифференцированием $\mathscr{L}[f+\varepsilon\eta]$ по ε при $\varepsilon=0$; аналогично, немного обобщая рас-

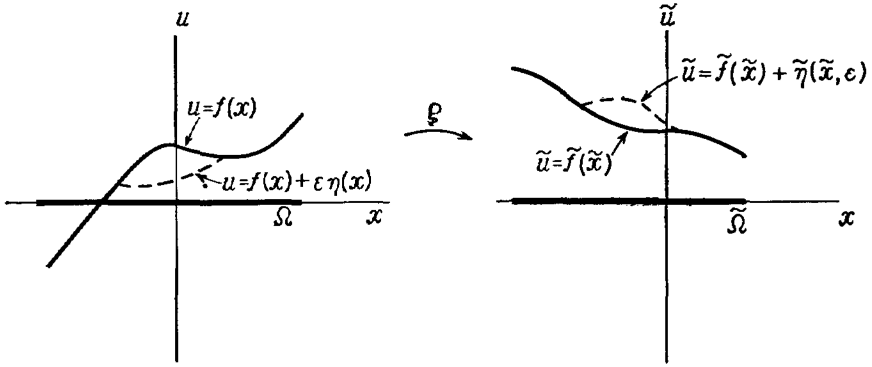

Рис. 10. Замена координат для вариации функционала.

суждение, приведшее нас к формуле (4.3) для оператора Эйлера, мы находим

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\tilde{\mathscr{L}}[\tilde{f}]=\int_{\tilde{\Omega}}\mathsf{E}_{\tilde{u}}(\tilde{L})\cdot\left.\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}d\tilde{x}, \tag{4.10}$$

где $\mathsf{E}_{\tilde{u}}(\tilde{L})$ вычислено при $\tilde{u}=\tilde{f}$. Нам нужно теперь вычислить $\partial\tilde{\eta}/\partial\varepsilon$.

Имея в виду, что при вычислении вариации от $\tilde{\mathscr{L}}$ переменные $\tilde{x}$ не должны зависеть от ε, мы получаем из (4.9), что

$$0=\sum_{j=1}^{p}D_j\Xi^i\,\frac{\partial x^j}{\partial\varepsilon}+\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial\Xi^i}{\partial u^\alpha}\,\eta^\alpha.$$

Следовательно, по правилу Крамера

$$\left.\frac{\partial x^j}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{-1}{\det\mathsf{J}}\sum_{i=1}^{p}K_{ij}\sum_{\alpha=1}^{q}\frac{\partial\Xi^i}{\partial u^\alpha}\,\eta^\alpha,$$

где K_{ij} — алгебраическое дополнение элемента (i,j) матрицы Якоби $\mathsf{J}(x)$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial\tilde{f}^\beta}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\sum_{\alpha=1}^{q}\frac{\partial\Phi^\beta}{\partial u^\alpha}\eta^\alpha+\sum_{j=1}^{p}D_j\Phi^\beta\left.\frac{\partial x^j}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\frac{1}{\det\mathsf{J}}\sum_{\alpha=1}^{q}\left\{\frac{\partial\Phi^\beta}{\partial u^\alpha}\det\mathsf{J}-\sum_{i,j=1}^{p}D_j\Phi^\beta\cdot K_{ij}\frac{\partial\Xi^i}{\partial u^\alpha}\right\}\eta^\alpha.$$

Читатель может узнать в выражении, стоящем в скобках, разложение определителя (4.8) по последнему столбцу, причем промежуточная сумма $\sum_j D_j \Phi^\beta \cdot K_{ij}$ — это разложение по последней строке $(i, p+1)$-го минора. Таким образом,

$$\frac{\partial \tilde{f}^\beta}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{\det \mathrm{J}} \sum_{\alpha=1}^{q} \mathsf{F}_{\alpha\beta} \eta^\alpha.$$

Подставляя в (4.10) и делая замену переменных, приходим к равенству

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \tilde{\mathscr{L}}[\tilde{f}] = \int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^{q} \mathsf{F}_{\alpha\beta} \mathsf{E}_{\tilde{u}^\beta}(\tilde{L}) \cdot \eta^\alpha \right\} dx.$$

С другой стороны, это должно равняться

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathscr{L}[f + \varepsilon\eta] = \int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha=1}^{q} \mathsf{E}_{u^\alpha}(L)\, \eta^\alpha \right\} dx.$$

В силу произвольности η отсюда следует (4.7). □

Пример 4.9. В случае $p = q = 1$

$$L(x, u^{(n)}) = \tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)})\, D_x \Xi(x, u^{(1)})$$

и (4.7) упрощается:

$$\mathsf{E}_u(L) = \frac{\partial(\Xi, \Phi)}{\partial(x, u)} \mathsf{E}_{\tilde{u}}(\tilde{L}), \tag{4.11}$$

где нам нужен лишь якобиан

$$\frac{\partial(\Xi, \Phi)}{\partial(x, u)} = \det \begin{pmatrix} \partial\Xi/\partial x & \partial\Xi/\partial u \\ \partial\Phi/\partial x & \partial\Phi/\partial u \end{pmatrix}$$

частных производных от Ξ и Φ. В самом деле, определитель, возникающий в (4.8):

$$\mathsf{F}_{11}(x) = \det \begin{pmatrix} D_x\Xi & \partial\Xi/\partial u \\ D_x\Phi & \partial\Phi/\partial u \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \partial\Xi/\partial x + u_x \partial\Xi/\partial u & \partial\Xi/\partial u \\ \partial\Phi/\partial x + u_x \partial\Phi/\partial u & \partial\Phi/\partial u \end{pmatrix},$$

равен указанному выше (в силу элементарных свойств определителя). Например, если

$$\mathscr{L}[u] = \int_a^b \frac{1}{2} u_x^2\, dx$$

и мы пользуемся преобразованием годографа $\tilde{x} = u$, $\tilde{u} = x$, то

$$\tilde{\mathscr{L}}[\tilde{u}] = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \frac{1}{2}(\tilde{u}_{\tilde{x}})^{-2}\tilde{u}_{\tilde{x}}\,d\tilde{x} = \int_{a}^{b} (2\tilde{u}_{\tilde{x}})^{-1}\,d\tilde{x}$$

и

$$\mathsf{E}_u(L) = -u_{xx} = -\tilde{u}_{\tilde{x}}^{-3}u_{\tilde{x}\tilde{x}} = -\mathsf{E}_{\tilde{u}}(\tilde{L}),$$

что подтверждает (4.11). Однако, вообще говоря, мы не можем заменить полные производные в (4.8) на частные производные. (См. упр. 4.15.)

4.2. ВАРИАЦИОННЫЕ СИММЕТРИИ

Чтобы применить групповые методы в вариационном исчислении, нам нужно сделать точным понятие группы симметрий функционала

$$\mathscr{L}[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(n)})\,dx. \tag{4.12}$$

Рассматриваемые здесь группы будут локальными группами преобразований G, действующими на открытом подмножестве $M \subset \Omega_0 \times U \subset X \times U$. Как подробно обсуждалось в гл. 2, если $u = f(x)$ — гладкая функция, определенная на подходящей малой подобласти $\Omega \subset \Omega_0$, такая, что ее график лежит в M, то всякое преобразование g из группы G, достаточно близкое к единице, будет преобразовывать f в другую гладкую функцию $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = g \cdot f(\tilde{x})$, определенную на $\tilde{\Omega} \subset \Omega_0$. (Отметим, что если группа G не проектируема, то $\tilde{\Omega}$ будет, вообще говоря, зависеть не только от g, но и от самой функции f.) Группа симметрий G будет, грубо говоря, группой, оставляющей вариационный интеграл $\mathscr{L}$ неизменным для всех таких f.

Определение 4.10. Локальная группа преобразований G, действующая на $M \subset \Omega_0 \times U$, является *группой вариационных симметрий* функционала (4.12), если, каковы бы ни были подобласть Ω, такая, что ее замыкание $\bar{\Omega}$ лежит в Ω_0, гладкая функция $u = f(x)$, определенная на Ω, график которой лежит в M, и элемент $g \in G$, такой, что $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = g \cdot f(\tilde{x})$ — однозначная функция, определенная на $\tilde{\Omega}$, выполняется равенство

$$\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{x}, \mathrm{pr}^{(n)}\tilde{f}(\tilde{x}))\,d\tilde{x} = \int_{\Omega} L(x, \mathrm{pr}^{(n)}f(x))\,dx. \tag{4.13}$$