и мы пользуемся преобразованием годографа $\tilde{x} = u$, $\tilde{u} = x$, то

$$\tilde{\mathscr{L}}[\tilde{u}] = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \frac{1}{2} (\tilde{u}_{\tilde{x}})^{-2} \tilde{u}_{\tilde{x}}\, d\tilde{x} = \int_{a}^{b} (2\tilde{u}_{\tilde{x}})^{-1} d\tilde{x}$$

и

$$\mathrm{E}_u(L) = -u_{xx} = -\tilde{u}_{\tilde{x}}^{-3} u_{\tilde{x}\tilde{x}} = -\mathrm{E}_{\tilde{u}}(\tilde{L}),$$

что подтверждает (4.11). Однако, вообще говоря, мы не можем заменить полные производные в (4.8) на частные производные. (См. упр. 4.15.)

4.2. ВАРИАЦИОННЫЕ СИММЕТРИИ

Чтобы применить групповые методы в вариационном исчислении, нам нужно сделать точным понятие группы симметрий функционала

$$\mathscr{L}[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(n)})\, dx. \tag{4.12}$$

Рассматриваемые здесь группы будут локальными группами преобразований G, действующими на открытом подмножестве $M \subset \Omega_0 \times U \subset X \times U$. Как подробно обсуждалось в гл. 2, если $u = f(x)$ — гладкая функция, определенная на подходящей малой подобласти $\Omega \subset \Omega_0$, такая, что ее график лежит в M, то всякое преобразование g из группы G, достаточно близкое к единице, будет преобразовывать f в другую гладкую функцию $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = g \cdot f(\tilde{x})$, определенную на $\tilde{\Omega} \subset \Omega_0$. (Отметим, что если группа G не проектируема, то $\tilde{\Omega}$ будет, вообще говоря, зависеть не только от g, но и от самой функции f.) Группа симметрий G будет, грубо говоря, группой, оставляющей вариационный интеграл $\mathscr{L}$ неизменным для всех таких f.

Определение 4.10. Локальная группа преобразований G, действующая на $M \subset \Omega_0 \times U$, является *группой вариационных симметрий* функционала (4.12), если, каковы бы ни были подобласть Ω, такая, что ее замыкание $\bar{\Omega}$ лежит в Ω_0, гладкая функция $u = f(x)$, определенная на Ω, график которой лежит в M, и элемент $g \in G$, такой, что $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = g \cdot f(\tilde{x})$ — однозначная функция, определенная на $\tilde{\Omega}$, выполняется равенство

$$\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{x}, \mathrm{pr}^{(n)} \tilde{f}(\tilde{x}))\, d\tilde{x} = \int_{\Omega} L(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x))\, dx. \tag{4.13}$$

Пример 4.11. Рассмотрим случай, когда $X = \mathbb{R}$ и имеется вариационная задача первого порядка

$$\mathscr{L}[u] = \int_a^b L(x, u, u_x)\,dx. \qquad (4.14)$$

Если L не зависит от x, то группа сдвигов $(x, u) \mapsto (x + \varepsilon, u)$ является группой вариационных симметрий для $\mathscr{L}$. В самом деле, поскольку $\tilde{x} = x + \varepsilon$, $\tilde{u} = u$ для любой функции $u = f(x)$, определенной на меньшем подынтервале $[c, d] \subset (a, b)$, функция $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(\tilde{x} - \varepsilon)$ определена на $[\tilde{c}, \tilde{d}] = [c + \varepsilon, d + \varepsilon]$. Для достаточно малых ε это тоже подынтервал интервала (a, b). Проверим (4.13), пользуясь заменой переменной:

$$\int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} L(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}'(\tilde{x}))\,d\tilde{x} = \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} L(f(\tilde{x} - \varepsilon), f'(\tilde{x} - \varepsilon))\,d\tilde{x} = \int_c^d L(f(x), f'(x))\,dx.$$

Инфинитезимальный критерий инвариантности

В соответствии с нашим обычным образом действия мы найдем теперь аналогичный инфинитезимальный критерий инвариантности вариационной задачи относительно группы преобразований. Снова это условие будет необходимым и достаточным для того, чтобы связная группа преобразований была группой симметрий вариационной задачи.

Теорема 4.12. *Связная группа преобразований G, действующая на $M \subset \Omega_0 \times U$, является группой вариационных симметрий функционала* (4.12), *если и только если*

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}(L) + L\,\mathrm{Div}\,\xi = 0 \qquad (4.15)$$

для всех $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$ *и каждой инфинитезимальной образующей*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

группы G. В (4.15) $\mathrm{Div}\,\xi$ *обозначает полную дивергенцию поля* $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^p)$, *ср.* (4.4).

Доказательство. Для каждого $g \in G$ преобразование

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Xi_g(x, u), \Phi_g(x, u))$$

можно рассматривать как замену переменных, так что в силу тех же рассуждений, которые привели к формуле (4.6), мы можем переписать условие (4.13) в виде

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{x}, \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x})) \det \mathrm{J}_g(x, \mathrm{pr}^{(1)} f(x))\, dx = \int\limits_{\Omega} L(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x))\, dx,$$

где элементы матрицы Якоби равны

$$\mathrm{J}_g^{ij}(x, u^{(1)}) = D_i \Xi_g^{j}(x, u^{(1)}).$$

Поскольку это должно быть справедливо для всех подобластей Ω и всех функций $u = f(x)$, подынтегральные функции должны совпадать поточечно:

$$L(\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x, u^{(n)}) \det \mathrm{J}_g(x, u^{(1)}) = L(x, u^{(n)}) \qquad (4.16)$$

для всех $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$. Чтобы получить инфинитезимальный вариант равенства (4.16), мы полагаем $g = g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ и дифференцируем по ε. Нам нужна формула

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\det \mathrm{J}_{g_\varepsilon}(x, u^{(1)})\right] = \mathrm{Div}\, \xi\, (\mathrm{pr}^{(1)} g_\varepsilon \cdot (x, u^{(1)})) \det \mathrm{J}_{g_\varepsilon}(x, u^{(1)}), \qquad (4.17)$$

выражающая тот факт, что дивергенция векторного поля измеряет скорость изменения объема при соответствующем векторному полю перемещении. Действительно, если мы заменим u функцией $f(x)$, то (4.17) сводится к тождеству из упр. 1.36 для редуцированиого векторного поля $\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, f(x))\, \partial/\partial x^i$.

Пользуясь формулами (4.17) и (2.21), находим производиую от (4.16) по ε при $g = g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$:

$$(\mathrm{pr}^{(n)} \mathbf{v}(L) + L\, \mathrm{Div}\, \xi) \det J_{g_\varepsilon} = 0, \qquad (4.18)$$

где выражение в скобках вычислено в точке $(\tilde{x}, \tilde{u}_\varepsilon^{(n)}) = \mathrm{pr}^{(n)} g_\varepsilon(x, u^{(n)})$. В частности, при $\varepsilon = 0$ g_ε — тождественное отображение, и мы доказали необходимость условия (4.15) для того, чтобы группа G была группой вариационных симметрий. Обратно, если условие (4.15) выполнено всюду, то (4.18) справедливо для достаточно малых ε. Левая часть равенства (4.18), однако же, — это производная левой части равенства (4.16) (при $g = g_\varepsilon$) по ε; поэтому, интегрируя от 0 до ε, мы доказываем формулу (4.16) для g, достаточно близких к единице. Обычные соображения связности завершают доказательство формулы (4.16) для всех $g \in G$, а следовательно, и теоремы. □

Пример 4.13. В качестве легкой иллюстрации теоремы 4.12 мы снова выведем результат примера 4.11. Инфинитезимальная образующая группы горизонтальных сдвигов есть ∂_x с продолжением $\mathrm{pr}^{(1)}\partial_x = \partial_x$. Кроме того, $\xi(x, u) = 1$, так что $D_x\xi = 0$. Таким образом, для $\mathscr{L} = \int_a^b L(u, u_x)\,dx$ мы получаем тривиальное соотношение

$$\mathrm{pr}^{(1)}\partial_x(L) + LD_x\xi = 0,$$

так что (4.15) выполняется. Другой простой пример — интеграл длины дуги $\mathscr{L}_0[u] = \int_a^b \sqrt{1 + u_x^2}\,dx$ и $\mathbf{v} = -u\partial_x + x\partial_u$ — образующая группы вращений. Имеем

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = -u\partial_x + x\partial_u + (1 + u_x^2)\,\partial_{u_x}$$

и $\xi = -u$, так что

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}(L) + LD_x\xi = (1 + u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x}\sqrt{1 + u_x^2} - \sqrt{1 + u_x^2}\cdot u_x \equiv 0.$$

Таким образом, теорема 4.12 приводит к геометрически очевидному факту, что длина дуги не меняется при жестких вращениях.

Симметрии уравнений Эйлера—Лагранжа

В обоих предыдущих примерах, как легко может проверить читатель, из инвариантности данного вариационного интеграла относительно группы симметрий вытекает, что соответствующие уравнения Эйлера — Лагранжа также инвариантны относительно этой группы. Этот результат справедлив в общем случае.

Теорема 4.14. *Если G — группа вариационных симметрий функционала $\mathscr{L}[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(n)})\,dx$, то она является группой симметрий уравнений Эйлера — Лагранжа* $\mathsf{E}(L) = 0$.

Интуитивно происходит вот что. Если $g \in G$ и $u = f(x)$ — экстремаль функционала $\mathscr{L}[u]$, то очевидно, что $\tilde{u} = g\cdot f(\tilde{x})$ (если эта функция определена) — экстремаль преобразованной вариационной задачи $\tilde{\mathscr{L}}[\tilde{u}]$, получающаяся из замены $(\tilde{x}, \tilde{u}) = g\cdot(x, u)$. Но если G — группа вариационных симметрий, $\tilde{\mathscr{L}}[\tilde{u}] = \mathscr{L}[\tilde{u}]$, то $g\cdot f$ также является экстремалью функционала $\mathscr{L}$. Проблема состоит в том, что у уравнений Эйлера —

Лагранжа имеются также не экстремальные решения. Один подход состоит в том, чтобы использовать формулу замены переменных из теоремы 4.8. Мы предпочитаем здесь не тратить усилий, а отослать читателя к теореме 5.37, где приведено прямое вычислительное доказательство.

Неверно, что каждая группа симметрий уравнений Эйлера — Лагранжа является также группой вариационных симметрий исходной вариационной задачи! Наиболее известные контрпримеры связаны с группой растяжений.

Пример 4.15. *Волновое уравнение.* Мы возвращаемся к волновому уравнению $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$, группа симметрий которого была найдена в примере 2.43. Волновое уравнение является уравнением Эйлера — Лагранжа для вариационной задачи с

$$\mathscr{L}[u] = \iiint \left[\frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2\right] dx\, dy\, dt.$$

Выясним, какие из симметрий, перечисленных в (2.65), являются вариационными симметриями функционала $\mathscr{L}$. Мы пользуемся инфинитезимальным критерием (4.15) при

$$L = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2.$$

Легко видеть, что сдвиги являются вариационными симметриями, поскольку их продолжения не действуют на производные от u. Далее рассмотрим образующую группы вращений, скажем $\mathbf{r}_{xy} = -y\partial_x + x\partial_y$. Член $\mathrm{Div}\,\xi$ в (4.15) обращается в нуль. Более того, $\mathrm{pr}^{(1)}\,\mathbf{r}_{xy} = \mathbf{r}_{xy} - u_y\partial_{u_x} + u_x\partial_{u_y}$, а следовательно, (4.15) принимает вид

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{r}_{xy}(L) = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

так что функционал $\mathscr{L}$ инвариантен относительно группы, порожденной $\mathbf{r}_{xy}$. Аналогичное вычисление показывает, что $\mathbf{r}_{xt}$ и $\mathbf{r}_{yt}$ также порождают группы вариационных снмметрий. Обращаясь к подгруппе дилатаций, получаем

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{d} = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t - u_x\partial_{u_x} - u_y\partial_{u_y} - u_t\partial_{u_t},$$

и в этом случае

$$\mathrm{Div}\,\xi = D_x(x) + D_y(y) + D_t(t) = 3.$$

Поэтому

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{d}\,(L) + L\,\mathrm{Div}\,\xi = L$$

и d *не* порождает группу вариацнонных симметрий функционала $\mathscr{L}$. Однако, если мы изменим дилатационную образующую следующим образом:

$$\mathbf{m} \equiv \mathbf{d} - \frac{1}{2} u\partial_u = x\partial_u + y\partial_y + t\partial_t - \frac{1}{2} u\partial_u,$$

то

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{m}(L) + L\,\mathbf{Div}\,\xi = -3L + 3L = 0,$$

так что $\mathbf{m}$ будет порождать группу вариационных симметрий. Наконец, рассмотрим группу инверсий, порожденную, скажем,

$$\mathbf{i}_x = (x^2 - y^2 + t^2)\,\partial_x + 2xy\partial_y + 2xt\partial_t - xu\partial_u.$$

Имеем

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{i}_x = \mathbf{i}_x - (u + 3xu_x + 2yu_y + 2tu_t)\,\partial_{u_x} + \\ + (2yu_x - 3xu_y)\,\partial_{u_y} - (2tu_x + 3xu_t)\,\partial_{u_t}$$

и

$$\mathbf{Div}\,\xi = D_x(x^2 - y^2 + t^2) + D_y(2xy) + D_t(2xt) = 6x.$$

Поэтому

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{i}_x(L) + L\,\mathbf{Div}\,\xi = uu_x - 3x(u_t^2 - u_x^2 - u_y^2) + 6xL = uu_x,$$

и, следовательно, $\mathbf{i}_x$ в соответствии с определением 4.10 не является вариационной симметрией. Вариационными симметриями не будут ни две другие однопараметрические подгруппы инверсий группы симметрий (2.65), ни их линейные комбинации. Наконец, если $\alpha(x, y, t)$ — решение волнового уравнения (с образующей симметрии $\mathbf{v}_\alpha = \alpha\partial_u$), мы находим, что

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}_\alpha(L) = \alpha_t u_t - \alpha_x u_x - \alpha_y u_y,$$

так что вариационная симметрия получается, если и только если α — константа. Таким образом, группа вариационных симметрий для L порождается сдвигами, «вращениями», группой растяжений, порожденной $\mathbf{m}$, и группой, порожденной ∂_u. Теорема 4.12 гарантирует отсутствие других вариационных симметрий. (Конечно, это можно было бы проверить непосредственно, решив (4.15) и найдя коэффициенты инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$.)

Предложение 4.16. *Если $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — вариационные симметрии функционала $\mathscr{L}[u]$, то их скобка Ли $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ — тоже вариационная симметрия.*

Доказательство мы оставляем читателю. (см. упр. 4.1.)

Понижение порядка

Как мы видели в § 2.5, знание однопараметрической группы симметрий одного обыкновенного дифференциального уравнения позволяет понизить его порядок на единицу. В этом параграфе мы увидим, что знание однопараметрической группы *вариационных* симметрий уравнения Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи позволяет понизить порядок уравнения на *два*! В результате вариационная структура дифференциального уравнения и группы симметрий удваивает мощь теории интегрирования Ли.

Самый легкий способ увидеть, как это происходит, состоит в том, чтобы воспользоваться инвариантностью уравнений Эйлера — Лагранжа относительно замен переменной, как показано в теореме 4.8. Это позволяет менять и независимые, и зависимые переменные, не затрагивая вариационной природы задачи. Итак, пусть $x, u \in \mathbb{R}$, и пусть $\mathscr{L}[u]$ — вариационный функционал порядка n с уравнениями Эйлера — Лагранжа порядка $2n$. Предположим, что $\mathbf{v} = \xi(x, u)\partial_x + \varphi(x, u)\partial_u$ — инфинитезимальная образующая однопараметрической группы вариационных симметрий функционала $\mathscr{L}$. Заметим, что по определению вариационной симметрии $\mathbf{v}$ останется вариационной симметрией при замене и независимых, и зависимых переменных. Как в § 2.5, мы вводим теперь *специальную* систему координат $y = \eta(x, u)$, $w = \xi(x, u)$, так что в этих новых координатах $\mathbf{v}$ принимает элементарный вид $\tilde{\mathbf{v}} = \partial/\partial w$. Пусть $\tilde{\mathscr{L}}[w] = \int \tilde{L}(y, w^{(n)})\,dy$ — соответствующая вариационная задача в переменных (y, w). Согласно предыдущим замечаниям, $\tilde{\mathbf{v}}$ остается вариационной симметрией для $\tilde{\mathscr{L}}$. Поэтому в силу инфинитезимального критерия (4.15) имеем

$$\mathrm{pr}^{(n)}\tilde{\mathbf{v}}(\tilde{L}) = \partial\tilde{L}/\partial w = 0;$$

следовательно, $\tilde{L} = \tilde{L}(y, w_y, w_{yy}, \ldots)$ не зависит от w. Уравнение Эйлера — Лагранжа для $\tilde{\mathscr{L}}$ поэтому принимает вид

$$0 = \mathbf{E}_w(\tilde{L}) = \sum_{j=1}^{n}(-D_y)^j \frac{\partial\tilde{L}}{\partial w_j} = (-D_y)\left\{\sum_{j=0}^{n-1}(-D_y)^j \frac{\partial\tilde{L}}{\partial w_{j+1}}\right\}, \quad (4.19)$$

где $w_j = \partial^j w/\partial y^j$. Таким образом, выражение в скобках — постоянная, не зависящая от y, и, следовательно, *первый интеграл* уравнений Эйлера — Лагранжа. (Это наше первое настоящее столкновение с теоремой Нётер.)

Заметим далее, что если мы вводим новую зависимую переменную $v = w_y$, так что $v_j = d^j v/dy^j = w_{j+1}$, то выражение в скобках можно записать как вариационную производную от

$$\hat{\mathscr{L}}[v] = \int \hat{L}(y, v^{(n-1)})\,dy, \text{ где}$$

$$\hat{L}(y, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \tilde{L}(y, w_y, \ldots, w_n).$$

Каждое решение $w = f(y)$ исходного уравнения Эйлера — Лагранжа порядка $2n$ соответствует решению $v = h(y)$ уравнения порядка $2n - 2$

$$\mathsf{E}_v(\hat{L})(y, v^{(2n-2)}) = \lambda \tag{4.20}$$

для некоторой постоянной λ (зависящей от начальных условий), где w получается квадратурой:

$$w = \int h(y)\,dy + c.$$

Заметим, что мы можем записать (4.20) как уравнение Эйлера — Лагранжа в чистом виде для функционала

$$\tilde{\mathscr{L}}_\lambda[v] = \int [\hat{L}(y, v^{(n-1)}) - \lambda v]\,dy.$$

(Иначе λ можно представлять себе как множитель Лагранжа, так что мы минимизируем $\check{\mathscr{L}}[v]$ при дополнительном ограничении, скажем, $\int v\,dy = 0$; см. Courant, Hilbert [1; с. 218].)

Теорема 4.17. *Пусть $p = q = 1$. Пусть $\mathscr{L}[u]$ — вариационная задача порядка n с уравнением Эйлера — Лагранжа порядка $2n$. Предположим, что G — однопараметрическая группа вариационных симметрий для $\mathscr{L}$. Тогда существует однопараметрическое семейство вариационных задач $\mathscr{L}_\lambda[v]$ порядка $n - 1$ с уравнениями Эйлера — Лагранжа порядка $2n - 2$, такое, что каждое решение уравнения Эйлера — Лагранжа для $\mathscr{L}[u]$ может быть получено с помощью квадратуры из решений уравнения Эйлера — Лагранжа для $\hat{\mathscr{L}}_\lambda[v]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Пример 4.18. В случае вариационной задачи первого порядка, как в (4.14), знание однопараметрической группы вариационных симметрий позволяет до конца проинтегрировать уравнение Эйлера — Лагранжа второго порядка

$$\mathsf{E}(L) = \frac{\partial L}{\partial u} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_x} = 0 \tag{4.21}$$

с помощью квадратур. (Для общей однопараметрической группы симметрий обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка мы можем рассчитывать лишь на редукцию к уравнению первого порядка.) Таким образом, если L не зависит от u, (4.21) сводится к уравнению $D_x(\partial L/\partial u_x)=0$; следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial u_x}(x,\ u_x)=\lambda$$

для некоторой постоянной λ. Мы можем разрешить это неявное соотношение относительно $u_x=F(x,\ \lambda)$, так что общее решение — это

$$u=\int F(x,\ \lambda)\,dx+c.$$

Если $L(u,\ u_x)$ не зависит от x, мы можем свести задачу к предыдущему случаю, воспользовавшись преобразованием годографа из примера 4.9: $y=u$, $w=x$. Несколько более прямой подход, однако, состоит в том, чтобы заметить, что если мы умножим уравнение Эйлера — Лагранжа на u_x, то можем получить первый интеграл

$$0=u_x\mathsf{E}(L)=u_x\frac{\partial L}{\partial u}-u_x^2\frac{\partial^2 L}{\partial u\,\partial u_x}-u_xu_{xx}\frac{\partial^2 L}{\partial u_x^2}=D_x\left(L-u_x\frac{\partial L}{\partial u_x}\right).$$

Таким образом,

$$L(u,\ u_x)-u_x\frac{\partial L}{\partial u_x}(u,\ u_x)=\lambda$$

определяет u_x неявно как функцию от u и λ. Мы можем проинтегрировать ее, чтобы получить решение уравнения Эйлера — Лагранжа:

$$\int\frac{du}{F(u,\ \lambda)}=x+c.$$

Этот метод можно распространить на многопараметрические группы. Однако, исключая случай абелевых групп, мы не можем, вообще говоря, ожидать понижения порядка на два на каждом шаге. (См. упр. 4.11 и дальнейшее развитие теории гамильтоновых систем в гл. 6). Здесь мы довольствуемся иллюстративным примером.

Пример 4.19. *Задача Кеплера.* Мы покажем, как можно использовать предыдущую процедуру, чтобы немедленно проинтегрировать двумерный вариант задачи Кеплера о движении материальной точки в центральном гравитационном поле. Функционал имеет вид

$$\mathscr{L}=\int\left[\frac{1}{2}(x_t^2+y_t^2)-U(r)\right]dt,$$

где $(x(t),\ y(t))$ — координаты материальной точки, $r^2=x^2+y^2$ и U — потенциал; в случае трехмерного гравитационного притяжения точки, движущейся в плоскости (x, y), $U(r) = -\gamma/r$. Уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$x_{tt} = -\frac{x}{r} U'(r), \quad y_{tt} = -\frac{y}{r} U'(r).$$

Очевидно, что функционал $\mathscr{L}$ инвариантен относительно двупараметрической абелевой группы сдвигов по времени и вращений в пространстве с инфинитезимальными образующими ∂_t и $x\partial_y - y\partial_x$ соответственно. Вводя полярные координаты (r, θ, t), мы видим, что эти векторные поля превращаются в ∂_t и ∂_θ. Аналогия со случаем однопараметрической группы подсказывает, что мы должны рассматривать r как новую независимую переменную, а t и θ — как новые зависимые переменные. Это должно привести к редукции системы второго порядка к системе, разрешимой в квадратурах. Заметим сначала, что

$$x_t = \frac{1}{t_r}(\cos\theta - r\sin\theta \cdot \theta_r), \quad y_t = \frac{1}{t_r}(\sin\theta + r\cos\theta \cdot \theta_r),$$

следовательно, в полярных координатах

$$\mathscr{L} = \int \left[\frac{1}{2t_r}(1 + r^2\theta_r^2) - t_r U(r)\right] dr.$$

Как и ожидалось, лагранжиан не зависит от t и θ. Уравнения Эйлера — Лагранжа, таким образом, можно немедленно проинтегрировать один раз, что приводит к уравнениям

$$\frac{1}{2t_r^2}(1 + r^2\theta_r^2) + U(r) = \lambda, \quad \frac{r^2\theta_r}{t_r} = \mu,$$

где λ, μ — константы. Заметим, что если мы вернемся к t как к независимой переменной, то первое уравнение даст известный закон сохранения энергии, а второе — в точности второй закон Кеплера $r^2\theta_t = \mu$ — масса заметает равные площади за равные промежутки времени. Обращаясь с r как с независимой переменной, мы можем, однако, исключить t_r из этих двух уравнений:

$$(2\lambda\mu^{-2}r^4 - 2\mu^{-2}r^4U(r) - r^2)\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = 1,$$

следовательно,

$$\theta = \int \frac{dr}{r(2\lambda\mu^{-2}r^2 - 2\mu^{-2}r^2U(r) - 1)^{1/2}} + \theta_0.$$

В частности, если $U(r) = -\gamma r^{-1}$, мы можем проинтегрировать последнее уравнение явно:

$$\theta - \theta_0 = \arcsin\left[\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)\right],$$

где

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2\mu^2\lambda}{\gamma^2}, \quad p = \frac{\mu^2}{\gamma}.$$

Таким образом, орбиты — конические сечения

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \sin(\theta - \theta_0)}$$

с эксцентриситетом ε. Аналогично, мы можем найти t одной квадратурой:

$$t = \int \frac{r^2\theta_r}{\mu} dr + t_0 = \int \frac{r\,dr}{(2\lambda r^2 - 2r^2 U(r) - \mu^2)^{1/2}} + t_0.$$

В гравитационном случае это приводит к формулам

$$t = \frac{s}{2\lambda} - \frac{\gamma}{(2\lambda)^{3/2}} \log(\sqrt{2\lambda}\, s + 2\lambda r + \gamma), \quad s = \sqrt{2\lambda r^2 + 2\gamma r - \mu^2}.$$

Таким образом, мы полностью решили задачу Кеплера в квадратурах.

4.3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. *Закон сохранения* — это выражение

$$\operatorname{Div} P = 0, \tag{4.22}$$

которое обращается в нуль на всех решениях $u = f(x)$ данной системы. Здесь $P = (P_1(x, u^{(n)}), \ldots, P_p(x, u^{(n)}))$ — набор гладких функций от x, u и производных от u и $\operatorname{Div} P = D_1 P_1 + \ldots + D_p P_p$ — его полная дивергенция.

Например, в случае уравнения Лапласа легко обнаружить несколько законов сохранения. Прежде всего само уравнение представляет собой закон сохранения, поскольку

$$\Delta u = \operatorname{Div}(\operatorname{grad} u) = 0$$

для всех решений u. Умножение уравнения Лапласа на $u_i = \partial u / \partial x^i$ дает еще p законов сохранения:

$$0 = u_i \Delta u = \sum_{j=1}^{p} D_j \left(u_i u_j - \frac{1}{2} \delta_i^j \sum_{k=1}^{p} u_k^2 \right).$$

Позже мы увидим, как установить еще ряд законов сохранения.

В случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений, включающей одну независимую переменную $x \in \mathbb{R}$, закон сохранения принимает вид $D_x P = 0$ для всех решений $u = f(x)$