где

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2\mu^2\lambda}{\gamma^2}, \quad p = \frac{\mu^2}{\gamma}.$$

Таким образом, орбиты — конические сечения

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \sin(\theta - \theta_0)}$$

с эксцентриситетом ε. Аналогично, мы можем найти t одной квадратурой:

$$t = \int \frac{r^2\theta_r}{\mu}\, dr + t_0 = \int \frac{r\, dr}{(2\lambda r^2 - 2r^2 U(r) - \mu^2)^{1/2}} + t_0.$$

В гравитационном случае это приводит к формулам

$$t = \frac{s}{2\lambda} - \frac{\gamma}{(2\lambda)^{3/2}} \log\left(\sqrt{2\lambda}\, s + 2\lambda r + \gamma\right), \quad s = \sqrt{2\lambda r^2 + 2\gamma r - \mu^2}.$$

Таким образом, мы полностью решили задачу Кеплера в квадратурах.

4.3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. *Закон сохранения* — это выражение

$$\mathbf{Div}\, P = 0, \tag{4.22}$$

которое обращается в нуль на всех решениях $u = f(x)$ данной системы. Здесь $P = (P_1(x, u^{(n)}), \ldots, P_p(x, u^{(n)}))$ — набор гладких функций от x, u и производных от u и $\mathbf{Div}\, P = D_1 P_1 + \ldots + D_p P_p$ — его полная дивергенция.

Например, в случае уравнения Лапласа легко обнаружить несколько законов сохранения. Прежде всего само уравнение представляет собой закон сохранения, поскольку

$$\Delta u = \mathbf{Div}\,(\mathbf{grad}\, u) = 0$$

для всех решений u. Умножение уравнения Лапласа на $u_i = \partial u / \partial x^i$ дает еще p законов сохранения:

$$0 = u_i \Delta u = \sum_{j=1}^{p} D_j \left(u_i u_j - \frac{1}{2} \delta_i^j \sum_{k=1}^{p} u_k^2 \right).$$

Позже мы увидим, как установить еще ряд законов сохранения.

В случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений, включающей одну независимую переменную $x \in \mathbb{R}$, закон сохранения принимает вид $D_x P = 0$ для всех решений $u = f(x)$

рассматриваемой системы. Для этого требуется, чтобы $P(x, u^{(n)})$ была *константой* на всех решениях системы. Таким образом, закон сохранения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений эквивалентен классическому понятию *первого интеграла* или *константы движения* системы. Как мы увидим, (4.22) — подходящее обобщение этого понятия на уравнения с частными производными. Оно включает в себя известные понятия сохранения массы, энергии, импульса и т. д., возникающие в физических приложениях.

В задачах динамики одна из независимых переменных выделяется как время t, а остальные переменные $x = (x^1, \ldots, x^p)$ являются пространственными переменными. В этом случае закон сохранения принимает вид

$$D_t T + \mathrm{Div}\, X = 0,$$

где Div — пространственная дивергенция от X по $x^1, \ldots, x^p$. *Плотность закона сохранения* T и соответствующий *поток* $X = (X_1, \ldots, X_p)$ являются функциями от x, t, u и производных от u по x и t. В этой ситуации легко видеть, что для решений определенных типов плотность закона сохранения, будучи проинтегрированной, дает нам константу движения. Конкретнее, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ — область в пространстве и $u = f(x, t)$ — решение, определенное для всех $x \in \Omega$, $a \leqslant t \leqslant b$. Рассмотрим функционал

$$\mathcal{T}_\Omega[f](t) = \int_\Omega T(x, t, \mathrm{pr}^{(n)} f(x, t))\, dx, \tag{4.23}$$

который при фиксированных f и Ω зависит только от t. Основное свойство плотности закона сохранения T означает, что $\mathcal{T}_\Omega[f]$ зависит только от начальных значений функции f при $t = a$ и от значений f на границе области $\partial\Omega$.

Предложение 4.20. *Пусть T, X — плотность и поток для закона сохранения данной системы дифференциальных уравнений. Тогда для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и любого решения $u = f(x, t)$, определенного при $x \in \Omega$, $a \leqslant t \leqslant b$, функционал (4.23) удовлетворяет условию*

$$\mathcal{T}_\Omega[f](t) - \mathcal{T}_\Omega[f](a) = -\int_a^t \int_{\partial\Omega} X(x, \tau, \mathrm{pr}^{(n)} f(x, \tau)) \cdot dS\, d\tau. \tag{4.24}$$

Обратно, если (4.24) выполняется для всех таких областей и решений $u = f(x, t)$, то T, X определяют закон сохранения.

Доказательство. По теореме о дивергенции

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}_\Omega[f](t)=\int_\Omega D_t T(x,\ t,\ \mathbf{pr}^{(n+1)}f)\,dx=-\int_{\partial\Omega} X(x,\ t,\ \mathbf{pr}^{(n)}f)\cdot dS.$$

(4.24) получается отсюда интегрированием. Обратное получается дифференцированием (4.24) по t, что дает

$$\int_\Omega \{D_t T(x,\ t,\ \mathbf{pr}^{(n+1)}f)+\mathbf{Div}\,X(x,\ t,\ \mathbf{pr}^{(n+1)}f)\}\,dx=0.$$

Поскольку это выполняется для произвольных подобластей, само подынтегральное выражение должно обращаться в нуль. □

Следствие 4.21. *Если* $\Omega\subset\mathbb{R}^p$ *— ограниченная область и* $u=f(x,\ t)$ *— решение, такое, что* $X(x,\ t,\ \mathbf{pr}^{(n)}f(x,\ t))\to 0$ *при* $x\to\partial\Omega$, *то* $\mathcal{T}_\Omega[f]$ *— константа, не зависящая от* t.

Обычно $X(x,\ t,\ 0)\equiv 0$, так что требуют, чтобы решение $f(x,\ t)$ стремилось к нулю достаточно быстро при $x\to\partial\Omega$ (т. е. на $\partial\Omega$ потока нет) или, если у Ω есть неограниченные компоненты, при $|x|\to\infty$.

Пример 4.22. Возможно, наиболее наглядная физическая иллюстрация взаимосвязи между плотностями и потоками законов сохранения получается из уравнений движения сжимаемой невязкой жидкости. Пусть $x\in\mathbb{R}^3$ — пространственные координаты, а $u=u(x,\ t)\in\mathbb{R}^3$ — скорость частицы жидкости, находящейся в точке x в момент времени t. Далее, пусть $\rho(x,\ t)$ — плотность, а $p(x,\ t)$ — давление; в частном случае течения с постоянной энтропией давление $p=P(\rho)$ будет зависеть лишь от плотности. Уравнение неразрывности принимает вид

$$\rho_t+\mathbf{Div}(\rho u)=0,$$

где $\mathbf{Div}(\rho u)=\sum_i \partial(\rho u^i)/\partial x^i$ — пространственная дивергенция, а равновесие сил приводит к трем уравнениям движения

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}u^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i},\qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

Уравнение неразрывности уже имеет вид закона сохранения с плотностью $T=\rho$ и потоком $X=\rho u$. Это приводит к интегральному уравнению сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho\,dx = -\int_{\partial\Omega}\rho u\cdot n\,dS.$$

Здесь $\int_{\Omega}\rho\,dx$, очевидно, — масса жидкости внутри области Ω, а $\rho u\cdot n$ (где n — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$) — мгновенный расход жидкости через точки границы $\partial\Omega$. Таким образом, мы видим, что чистое изменение массы внутри Ω равно потоку жидкости внутрь Ω. В частности, если нормальная составляющая скорости $u\cdot n$ на $\partial\Omega$ обращается в нуль, то внутри области Ω не происходит изменения массы, и мы получаем закон сохранения массы

$$\int\rho\,dx = \text{const}.$$

Уравнения движения вместе с уравнением неразрывности приводят к трем новым законам сохранения

$$D_t(\rho u^i) + \sum_{j=1}^{3} D_j(\rho u^i u^j + p\delta_i^j) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

В интегральной форме это законы сохранения импульса

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho u^i\,dx = -\int_{\partial\Omega}(\rho u^i(u\cdot n) + pn_i)\,dS, \quad i = 1, 2, 3$$

(здесь n_i есть i-я компонента нормали n). Первое слагаемое в интеграле по границе обозначает перенос импульса ρu^i потоком жидкости через поверхность $\partial\Omega$, а второе слагаемое есть результирующее изменение импульса, вызванное давлением. Таким образом, $X_j = \rho u^i u^j + p\delta_i^j$ представляют собой компоненты потока импульса. Наконец, для течения с постоянной энтропией можно ввести внутреннюю энергию $W(\rho) = \int\rho^{-2}P(\rho)\,d\rho$ на единицу массы, измеряющую работу жидкости против сил давления. Закон сохранения энергии принимает вид

$$D_t\left[\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho W(\rho)\right] + \mathbf{Div}\left[\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + P(\rho) + \rho W(\rho)\right)u\right] = 0;$$

или в интегральном виде

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho W(\rho)\right]dx = -\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + P(\rho) + \rho W(\rho)\right)u\cdot n\,dS.$$

Здесь $\int\limits_{\Omega}\frac{1}{2}\rho|u|^2dx$ — кинетическая энергия, а $\int\limits_{\Omega}\rho W(\rho)dx$ — внутренняя (потенциальная) энергия жидкости. Интеграл по поверхности представляет собой перенос кинетической и потенциальной энергии через $\partial\Omega$ плюс та часть совершаемой жидкостью работы, которая вызвана давлением на границе. В частности, если $u\cdot n=0$ на $\partial\Omega$, то и масса, и энергия сохраняются.

Тривиальные законы сохранения

Закон сохранения может становиться тривиальным по двум причинам. Тривиальность *первого типа* состоит в том, что сам набор из p функций P в (4.22) обращается в нуль на всех решениях данной системы. Тривиальность этого типа обычно легко устранить, если разрешить систему и ее продолжения $\Delta^{(k)}$ относительно некоторых из переменных u_J^α, выразив их через остальные переменные, и подставить соответствующие выражения вместо этих выделенных переменных. Например, в случае эволюционного уравнения $u_t=P(x, u^{(n)})$ мы всегда можем выразить любую производную от u по времени, т. е. u_{tt}, u_{xt} и т. д., через x, u и пространственные производные от u. В результате получаем, что всякий динамический закон сохранения эквивалентен, с точностью до прибавления тривиального закона сохранения первого типа, закону сохранения, в котором плотность T зависит только от x, t, u и пространственных производных от u. Для эволюционных уравнений это обычный вид закона сохранения.

Пример 4.23. Рассмотрим систему эволюционных уравнений первого порядка

$$u_t=v_x,\quad v_t=u_x,$$

эквивалентную одномерному волновому уравнению $u_{tt}=u_{xx}$. Выражение

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}u_x^2\right)-D_x(u_tu_x)=u_t(u_{tt}-u_{xx})=0,$$

очевидно, является законом сохранения. В соответствии со сделанным замечанием мы можем заменить плотность и поток закона сохранения выражениями, зависящими только от пространственных производных. В результате получаем эквивалентный закон сохранения

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}v_x^2\right)-D_x(u_xv_x)=0.$$

Он отличается от исходного на тривиальный закон сохранения

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_t^2-\frac{1}{2}v_x^2\right)+D_x\left(v_xu_x-u_tu_x\right)=0,$$

плотность и поток которого обращаются в нуль на решениях системы.

Второй возможный тип тривиальности возникает, когда условие на дивергенцию

$$\mathbf{Div}\,P=0$$

справедливо для *всех* функций $u=f(x)$ независимо от того, являются ли они решениями данной системы дифференциальных уравнений. Например, в случае $p=2$ тождество

$$D_x(u_y)-D_y(u_x)\equiv 0,$$

очевидно, выполняется для любой гладкой функции $u=f(x, y)$ и, следовательно, представляет собой тривиальный закон сохранения *второго типа* для любого уравнения с частными производными, содержащего $u=f(x, y)$. Менее очевидный пример доставляет тождество

$$D_x(u_yv_z-u_zv_y)+D_y(u_zv_x-u_xv_z)+D_z(u_xv_y-u_yv_x)\equiv 0,$$

содержащее якобианы. Всякий набор из p функций $P(x, u^{(n)})$, дивергенция которого обращается в нуль тождественно, называется *нулевой дивергенцией.* Закон сохранения, выражаемый любой нулевой дивергенцией, не зависит от конкретной структуры какой бы то ни было данной системы дифференциальных уравнений. Это оправдывает тот факт, что мы расцениваем эти законы как тривиальные.

Аналогично лемме Пуанкаре, характеризующей ядро обычного оператора дивергенции (ср. пример 1.62), имеется характеризация всех нулевых дивергенций — тривиальных законов сохранения второго типа.

Теорема 4.24. *Пусть $P=(P_1, \ldots, P_p)$ — набор из p гладких функций, зависящих от $x=(x^1, \ldots, x^p)$, $u=(u^1, \ldots, u^q)$ и производных от u определенных на всем пространстве струй $X\times U^{(n)}$. Тогда P является нулевой дивергенцией:* $\mathbf{Div}\,P=0$, *если и только если существуют гладкие функции Q_{jk}, $j, k=1, \ldots, p$, зависящие от x, u и производных от u, такие, что*

$$Q_{jk}=-Q_{kj}, \quad j, k=1, \ldots, p, \tag{4.25}$$

и

$$P_j=\sum_{k=1}^{p}D_kQ_{jk}, \quad j=1, \ldots, p, \tag{4.26}$$

для всех $(x, u^{(n)})$.

В частности, если $p=3$, то в теореме 4.24 утверждается, что

$$\mathrm{Div}\, P = D_1P_1 + D_2P_2 + D_3P_3 \equiv 0,$$

если и только если P является «полным ротором»: $P = \mathrm{Curl}\, Q$, т. е.

$$P_1 = D_2Q_3 - D_3Q_2, \quad P_2 = D_3Q_1 - D_1Q_3, \quad P_3 = D_1Q_2 - D_2Q_1.$$

(Здесь мы отождествляем $Q_{12} = -Q_{21}$ с Q_3 и т. д.) Для нашего предыдущего примера

$$P = (u_yv_z - u_zv_y,\ u_zv_x - u_xv_z,\ u_xv_y - u_yv_x),$$

а соответствующий набор функций Q есть (uv_x, uv_y, uv_z).

Хотя для любой фиксированной функции $u = f(x)$ теорема 4.24 сводится к лемме Пуанкаре, тот факт, что для *всех* таких функций можно взять один и тот же набор функций Q_{jk}, зависящих от x, u и производных от u, является гораздо более тонким. Его доказательство оказывается довольно сложным, и мы откладываем его до § 5.4, когда в нашем распоряжении будет гораздо больше алгебраической техники.

Вообще говоря, *тривиальный закон сохранения* будет по определению линейной комбинацией тривиальных законов двух рассмотренных типов. Иными словами, $\mathrm{Div}\, P = 0$ является тривиальным законом сохранения системы, если и только если существуют функции Q_{jk}, удовлетворяющие условию (4.25), такие, что (4.26) выполняется для всех решений системы Δ. Два закона сохранения P и $\tilde{P}$ *эквивалентны*, если они отличаются на тривиальный закон сохранения, так что $\tilde{P} = P + R$, где R тривиален. Нас будет интересовать классификация законов сохранения только с точностью до эквивалентности, так что под «законом сохранения», вообще говоря, мы будем понимать на самом деле «класс эквивалентных законов сохранения».

Характеристики законов сохранения

Рассмотрим закон сохранения вполне невырожденной системы дифференциальных уравнений $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. В соответствии с упр. 2.33 $\mathrm{Div}\, P$ обращается в нуль на всех решениях системы, если и только если существуют функции $Q_\nu^J(x, u^{(m)})$, такие, что

$$\mathrm{Div}\, P = \sum_{\nu, J} Q_\nu^J D_J \Delta_\nu \tag{4.27}$$

для всех (x, u). Каждое слагаемое в (4.27) можно проинтегрировать по частям; например, если $1 \leqslant j \leqslant p$,

$$Q_\nu^j D_j \Delta_\nu = D_j (Q_\nu^j \Delta_\nu) - D_j (Q_\nu^j) \Delta_\nu.$$

Таким образом, мы получаем эквивалентное тождество

$$\mathrm{Div}\, P = \mathrm{Div}\, R + \sum_{\nu=1}^{l} Q_\nu \Delta_\nu \equiv \mathrm{Div}\, R + Q \cdot \Delta,$$

где элементами набора из l функций $Q = (Q_1, \ldots, Q_l)$ служат

$$Q_\nu = \sum_J (-D)_J Q_\nu^J \tag{4.28}$$

и $R = (R_1, \ldots, R_p)$ (явные выражения здесь не требуются) зависит линейно от компонент Δ_ν данной системы дифференциальных уравнений и их полных производных. Таким образом, R является тривиальным законом сохранения (первого типа), и если мы заменяем P на $P - R$, то получаем эквивалентный закон сохранения специального вида

$$\mathrm{Div}\, P = Q \cdot \Delta. \tag{4.29}$$

Мы называем (4.29) *характеристической формой* закона сохранения (4.27), а набор из l функций $Q = (Q_1, \ldots, Q_l)$ — *характеристикой* данного закона сохранения.

Вообще говоря, при $l \neq 1$ характеристика данного закона сохранения определена неоднозначно; это проистекает из того факта, что Q_ν в (4.29) определены неоднозначно. Заметим, что если Q и $\tilde{Q}$ оба удовлетворяют условию (4.29) при одном и том же P, то $Q \cdot \Delta = \tilde{Q} \cdot \Delta$. Поскольку система Δ невырожденна, из предложения 2.11 вытекает, что $Q - \tilde{Q}$ обращается в нуль на всех решениях. Это служит обоснованием определения *тривиальной характеристики* Q как характеристики, обращающейся в нуль на всех решениях системы. Две характеристики Q и $\tilde{Q}$ *эквивалентны*, если они отличаются на тривиальную характеристику, так что $Q = \tilde{Q}$ для всех решений $u = f(x)$ системы Δ. Вообще характеристики определены лишь с точностью до эквивалентности.

Пример 4.25. Чтобы найти характеристику закона сохранения волнового уравнения примера 4.23, нам нужно переписать левую часть в виде (4.27). Получаем

$$D_t\left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2\right) - D_x(u_x u_t) = u_t D_t(u_t - v_x) + u_t D_x(v_t - u_x).$$

Поэтому, согласно (4.28), характеристика имеет вид

$$Q = (-D_t(u_t), \ -D_x(u_t)) = (-u_{tt}, \ -u_{xt}),$$

и существует эквивалентный закон сохранения в характеристической форме, который находится интегрированием по частям:

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_x^2-\frac{1}{2}u_t^2+u_tv_x\right)+D_x(-u_tv_t)=-u_{tt}(u_t-v_x)-u_{xt}(v_t-u_x).$$

Важно отметить, что замена производных по t на производные по x в этом законе сохранения приведет, как в примере 4.23, к эквивалентному закону сохранения, но, вообще говоря, он *не* будет уже в характеристической форме. В настоящем примере плотность закона сохранения эквивалентна $(1/2)u_x^2+(1/2)v_x^2$, а поток эквивалентен $-u_xv_x$, но получающийся закон сохранения

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}v_x^2\right)+D_x(-u_xv_x)=u_x(u_{xt}-v_{xx})+v_x(v_{xt}-u_{xx})$$

явно находится не в характеристической форме. Вообще говоря, *замена закона сохранения на эквивалентный не сохраняет характеристической формы.*

Кроме того, этот последний закон сохранения имеет в качестве своей характеристики

$$\tilde{Q}=(-D_x(u_x),\ -D_x(v_x))=(-u_{xx},\ -v_{xx}),$$

а это *не* то же самое, что первоначальная характеристика. Однако разность

$$Q-\tilde{Q}=(-(u_{tt}-u_{xx}),\ -(v_{tt}-v_{xx}))$$

является тривиальной характеристикой, поскольку она обращается в нуль на всех решениях системы. Таким образом, два эквивалентных закона сохранения могут иметь эквивалентные, но не одинаковые характеристики. Наконец, отметим, что характеристические формы этих двух законов сохранения различаются. Характеристическая форма последнего закона имеет вид

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}v_x^2\right)+D_x(u_xv_x-u_xu_t-v_xv_t)=$$
$$=-u_{xx}(u_t-v_x)-v_{xx}(v_t-u_x).$$

Таким образом, *один* (класс эквивалентности) *закон*(*ов*) *сохранения может иметь более чем одну характеристическую форму.* Наконец, мы замечаем, что к любому рассмотренному закону сохранения можно прибавить любую нулевую дивергенцию, и это не повлияет ни на его справедливость, ни на вид характеристик.

Рассмотренный пример должен дать читателю хорошее представление об алгебраической сложности общей взаимосвязи между характеристиками и законами сохранения. Тем не менее если мы ограничим внимание нормальными невырожденными системами (в частности, нормальными аналитическими системами), то окажется, что имеется взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности законов сохранения и классами эквивалентности характеристик, так что каждый закон сохранения однозначно определяется своей характеристикой и наоборот, если иметь в виду отношения эквивалентности. Этот результат — краеугольный камень большей части общей теории и классификации законов сохранения, включая теорему Нётер. (Контрпримеры для случая анормальных систем мы обсудим в § 5.3.)

Теорема 4.26. *Пусть $\Delta(x, u^{(n)})=0$ — нормальная вполне невырожденная система дифференциальных уравнений. Пусть наборы из p функций P и $\tilde{P}$ определяют законы сохранения с характеристиками Q и $\tilde{Q}$ соответственно. Тогда P и $\tilde{P}$ — эквивалентные законы сохранения, если и только если Q и $\tilde{Q}$ — эквивалентные характеристики.*

Очевидно, эта теорема сводится к доказательству того, что закон сохранения в характеристической форме (4.29) тривиален тогда и только тогда, когда тривиальна его характеристика Q. Некоторые сложности возникают из-за того, что приходится иметь дело с двумя типами тривиальности законов сохранения. Само доказательство довольно сложное, и мы советуем читателю при первом чтении перескочить с этого места к § 4.4.

В качестве подготовительного упражнения к общему доказательству мы начинаем с простого случая одного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$\Delta(x, u^{(n)})=\Delta(x, u, u_1, \ldots, u_n)=0,$$

в котором $u_k=d^ku/dx^k$ — производные от единственной зависимой переменной u. Закон сохранения в характеристической форме имеет вид

$$D_xP=Q\cdot\Delta,$$

где $Q(x, u^{(m)})$ — одна функция от x, u и производных от u. Заметим, что в этом случае тривиальными законами сохранения второго типа являются лишь константы, поэтому доказательство заметно упрощается. Предположим сначала, что P — тривиальный закон сохранения. Поскольку уравнение Δ невырожденно,

$$P = \sum_{k=0}^{l} A_k \cdot D_x^k \Delta + c$$

для иекоторых функций A_k и $c \in \mathbb{R}$. По правилу Лейбница

$$D_x P = \sum_{k=0}^{l} [D_x A_k \cdot D_x^k \Delta + A_k \cdot D_x^{k+1} \Delta] =$$
$$= (D_x A_0) \cdot \Delta + \sum_{k=1}^{l} (A_{k-1} + D_x A_k) \cdot D_x^k \Delta + A_l \cdot D_x^{l+1} \Delta.$$

Приравнивая это к $Q \cdot \Delta$, получаем

$$(D_x A_0 - Q) \cdot \Delta + \sum_{k=1}^{l} (A_{k-1} + D_x A_k) \cdot D_x^k \Delta + A_l \cdot D_x^{l+1} \Delta = 0$$

для всех x, u. Далее, предполагается, что продолжения $\Delta^{(l+1)}$ уравнения Δ имеют максимальный ранг. Тогда, согласно предложению 2.11, линейная комбинация функций $\Delta, D_x\Delta, \ldots, D_x^{l+1}\Delta$, определяющих $\Delta^{(l+1)}$, будет тождественно обращаться в нуль, если и только если коэффициенты обращаются в нуль на всех решениях продолжения $\Delta^{(l+1)}$. Таким образом,

$$A_l = 0, \quad A_{k-1} + D_x A_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l,$$

и

$$D_x A_0 - Q = 0,$$

если $u = f(x)$ — решение Δ. Несложная индукция показывает, что $A_k = 0$ на решениях системы Δ при $k = l, l-1, \ldots, 1, 0$, и, следовательно, из последнего уравнения вытекает, что Q обращается в нуль на всех решениях тоже. Это означает, что Q — тривиальная характеристика, и, следовательно, мы доказали, что тривиальный закон сохранения обязан иметь тривиальную характеристику.

Чтобы доказать обратное, нам нужно разрешить наше уравнение Δ относительно производной самого высокого порядка

$$u_n = \Gamma(x, u, \ldots, u_{n-1}). \tag{4.30}$$

Это можно сделать в окрестности любой точки $(x_0, u_0^{(n)})$, в которой система Δ нормальна (в нашем случае это означает, что $\partial\Delta(x_0, u_0^{(n)})/\partial u_n \neq 0$). Прежде чем двигаться дальше, важно отметить, что замена Δ на алгебраически эквивалентное уравнение $u_n = \Gamma$ не влияет на структуру пространства законов сохранения:

Лемма 4.27. *Предположим, что Δ и $\tilde{\Delta}$ — две вполне невырожденные системы уравнений с частными производными, алгебраически эквивалентные в том смысле, что соответствующие им алгебраические подмногообразия $\mathcal{S}_\Delta$ и $\mathcal{S}_{\tilde{\Delta}}$ в пространстве струй $M^{(n)}$ совпадают:*

$$\mathcal{S}_\Delta = \{(x, u^{(n)}): \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} = \mathcal{S}_{\tilde{\Delta}} = \{(x, u^{(n)}): \tilde{\Delta}(x, u^{(n)}) = 0\}.$$

Набор из p функций P является тогда законом сохранения для Δ, если и только если он является законом сохранения для $\tilde{\Delta}$. Он тривиален как закон сохранения для Δ, если и только если он тривиален как закон сохранения для $\tilde{\Delta}$. Если $\operatorname{Div} P = Q\cdot\Delta$ — характеристическая форма для Δ, то это также характеристическая форма для $\tilde{\Delta}$: $\operatorname{Div} P = \tilde{Q}\cdot\tilde{\Delta}$. Наконец, Q — тривиальная характеристика для Δ тогда и только тогда, когда $\tilde{Q}$ — тривиальная характеристика для $\tilde{\Delta}$.

Доказательство. Утверждение, что функция $R(x, u^{(n)})$ обращается в нуль на всех решениях системы Δ, эквивалентно в силу локальной разрешимости утверждению, что $R(x, u^{(n)}) = 0$ при $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$. Очевидно, что это требование не зависит от конкретных функций Δ или $\tilde{\Delta}$, использованных для описания подмногообразия $\mathcal{S}_\Delta$ (или его продолжений). Этого тривиального наблюдения достаточно для доказательства всех утверждений леммы, кроме последнего. Требование, чтобы Q была тривиальной характеристикой, означает, что выражение $Q\cdot\Delta = R$ имеет нуль *второго порядка* на некотором подходящем продолжении $\Delta^{(k)}$ системы Δ. (Это означает, что и R, и все ее частные производные $\partial R/\partial x^i$, $\partial R/\partial u^\alpha_J$ обращаются в нуль на продолженном подмногообразии $\mathcal{S}_{\Delta^{(k)}}$.) Снова это геометрическое условие, очевидно, не зависит от конкретных функций Δ или $\tilde{\Delta}$, использованных для описания $\mathcal{S}_\Delta$, и, следовательно, $\mathcal{S}_{\Delta^{(k)}} = \mathcal{S}_{\tilde{\Delta}^{(k)}}$. □

Возвращаясь к нашему доказательству теоремы 4.26 в случае обыкновенного дифференциального уравнения, попытаемся показать, что если Q — тривиальная характеристика, то $D_x P = Q\cdot\Delta$ обязательно является тривиальным законом сохранения. По лемме 4.27 мы можем считать, что Δ имеет вид (4.30). Кроме того, дифференцируя (4.30) и подставляя соответствующие выражения, мы можем выразить производные высших порядков u_{n+k}, $k \geqslant 0$, через $x, u, \ldots, u_{n-1}$. Если подставить их в закон сохранения P, то мы получим эквивалентный закон сохранения $P^*(x, u, \ldots, u_{n-1})$, зависящий лишь от производных от u порядка $n-1$ и ниже.

Далее, в общем случае, как показывает пример 4.25, замена закона сохранения на эквивалентный не обязательно сохраняет его характеристическую форму. Поэтому у нас нет оснований ожидать, что $D_xP^*=0$ будет характеристической формой. (На самом деле в общем случае это приведет к главной трудности в доказательстве.) Однако в настоящей ситуации рассуждения на этом шаге радикально упрощаются. Именно, поскольку P^* зависит лишь от производных порядка $n-1$ и ниже, производные порядка n и выше в

$$D_xP^*=\frac{\partial P^*}{\partial x}+u_1\frac{\partial P^*}{\partial u}+\ldots+u_n\frac{\partial P^*}{\partial u_{n-1}}$$

появляются только одним способом — в последнем слагаемом. Таким образом, в силу локальной разрешимости (4.27) справедливо тогда и только тогда, когда

$$D_xP^*=Q^*(u_n-\Gamma),$$

где $Q^*=\partial P/\partial u_{n-1}$ — характеристика, которая в силу первой половины теоремы эквивалентна исходной характеристике Q и, следовательно, тривиальна. Кроме того, Q^* зависит лишь от производных от u порядка $n-1$ и ниже, поэтому она может быть тривиальна, только если обращается в нуль тождественно: $Q^*=\partial P/\partial u_{n-1}\equiv 0$. Отсюда следует, что $D_xP^*\equiv 0$ и, следовательно, P^* — тривиальный закон сохранения второго типа. (В настоящем случае это означает, что P^* — константа!) Таким образом, P также тривиален, и в этом частном случае теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.26 в общем случае проводится аналогичным образом, хотя детали, особенно во второй части доказательства, становятся гораздо более сложными. Предположим сначала, что P — тривиальный закон сохранения, так что в силу невырожденности Δ существуют функции $A^J_{i\nu}(x, u^{(m)})$, такие, что

$$P_i=\sum_{\nu, J}A^J_{i\nu}D_J\Delta_\nu+R_i,\quad i=1, \ldots, p, \tag{4.31}$$

где $R=(R_1, \ldots, R_p)$ — нулевая дивергенция. В этом случае

$$\mathbf{Div}\,P=\sum_{i,\nu,J}\{D_iA^J_{i\nu}\cdot D_J\Delta_\nu+A^J_{i\nu}D_iD_J\Delta_\nu\}.$$

Предполагая, что P записан в характеристической форме, мы приравниваем последнее выражение к $Q\cdot\Delta$ и получаем линейную комбинацию производных $D_K\Delta_\nu$, которая обращается в нуль тождественно по x и u. Снова в силу условия максимальности ранга продолжений системы Δ предложение 2.11 утверждает, что коэффициент при каждой производной $D_K\Delta_\nu$ должен обращаться в нуль, если $u=f(x)$ — решение системы. Несложная индукция, следующая по тому же пути, что и в случае обыкновенного дифференциального уравнения, показывает, что каждый коэффициент $A^J_{i\nu}$ должен обращаться в нуль, если u — решение, и, наконец, каждая Q_ν равна нулю, если $u=f(x)$ — решение системы Δ. Таким образом, тривиальный закон сохранения обязательно имеет тривиальную характеристику, и первая половина теоремы доказана.

Чтобы доказать обратное, нам нужно сначала применить замену независимой переменной $(y, t)=\psi(x)$, которая делает систему Δ эквивалентной системе в форме Ковалевской

$$u^\nu_{nt}\equiv\frac{\partial^n u^\nu}{\partial t^n}=\Gamma_\nu(y,\ t,\ \widetilde{u^{(n)}}),\quad \nu=1,\ \ldots,\ q, \tag{4.32}$$

где Γ_ν зависит от всех производных u^α_J до порядка n включительно, кроме u^α_{nt}. (См. теорему 2.76. Нетрудно распространить это на более общую форму Ковалевской (2.123), но обозначения становятся более сложными, поэтому мы оставим это читателю.) Пользуясь леммой 4.27, достаточно доказать, что если $Q=(Q_1, \ldots, Q_q)$ — тривиальная характеристика для системы в форме Ковалевской, то соответствующий закон сохранения тривиален.

Лемма 4.28. *Если Δ — система в форме Ковалевской* (4.32) *и P — плотность закона сохранения, то существует эквивалентная плотность закона сохранения $\widehat{P}$, такая, что*

$$\operatorname{Div}\widehat{P}=\widehat{Q}\cdot\Delta, \tag{4.33}$$

где новая характеристика $\widehat{Q}$ зависит только от y, t и $u^{(m)}$, т. е. не содержит производных по t порядка выше n.

Доказательство. Заменим P на $\widehat{\mathrm{P}}$, где $\widehat{\mathrm{P}}$ не зависит от производных $u^\alpha_{nt,K}$. Тогда

$$\operatorname{Div}\widehat{P}=\sum_{\alpha,K}\frac{\partial\widehat{P}_0}{\partial u^\alpha_{(n-1)t,K}}\cdot u^\alpha_{nt,K}+\widehat{R}=\sum_{\alpha,K}\frac{\partial\widehat{P}_0}{\partial u^\alpha_{(n-1)t,K}}\cdot D_K\Delta_\alpha+R^*, \tag{4.34}$$

где $\widehat{P}_0$ есть t-компонента $\widehat{P}$, а $\widehat{R}$ и R^* не зависят от производных $u^\alpha_{nt,K}$. Однако $\operatorname{Div}\widehat{P}$ должна обращаться в нуль на Δ, откуда следует, что R^* обращается в нуль на Δ. Но это невозможно, если $R^*\not\equiv 0$. Поэтому имеем

$$\operatorname{Div}\widehat{P}=\sum_{\alpha,K}Z_{K,\alpha}\cdot D_K\Delta_\alpha, \tag{4.35}$$

где коэффициенты $Z_{K,\alpha}$, являющиеся частными производными от $\widehat{P}_0$ по $u^\alpha_{(n-1)t,K}$, не зависят от производных $u^\alpha_{nt,J}$. Интегрируя по частям, мы получаем равенство (4.33), где

$$Q_\alpha = \sum_K (-D)^K Z_{K,\alpha}$$

не зависит от производных $u^\alpha_{nt,J}$, поскольку мультииндексы K относятся только к производным по y. Это доказывает лемму. □

Теперь предположим, что Q — тривиальная характеристика закона сохранения

$$\mathrm{Div}\, P = Q \cdot \Delta.$$

Заменим P, следуя лемме, эквивалентным законом сохранения $\widehat{P}$. Поскольку P и $\widehat{P}$ эквивалентны, в силу доказанной уже части теоремы 4.26 мы знаем, что Q и $\widehat{Q}$ — эквивалентные характеристики. Следовательно,

$$Q - \widehat{Q} = 0 \text{ на } \Delta. \tag{4.36}$$

Но Q уже обращается в нуль на Δ. По лемме единственный способ, которым $\widehat{Q}$ может обращаться в нуль на Δ, — это быть тождественным нулем. Поэтому $\widehat{P}$ — тривиальный закон сохранения второго типа (нулевая дивергенция). Следовательно, закон сохранения P, будучи эквивалентным $\widehat{P}$, также тривиален. Это завершает доказательство теоремы. □

4.4. ТЕОРЕМА НЁТЕР

Общий принцип, связывающий группы симметрий и законы сохранения, был впервые установлен Эмми Нётер (Noether [1]), которая сформулировала его в почти полной общности. Его вариант, изложенный в этом параграфе, — это вариант, больше знакомый физикам и прикладникам и требующий лишь знания теории обычных групп симметрий, изложенной в гл. 2. Но он далек от наиболее исчерпывающего варианта теоремы Нётер. Мы вернемся к этой теме в § 5.3, где будет доказана теорема Нётер в общем виде, который включает и настоящий вариант. Тем не менее излагаемый здесь результат очень полезен на практике, и мы проиллюстрируем его эффективность важными физическими примерами.

Теорема 4.29. *Предположим, что G — (локальная) однопараметрическая группа симметрий вариационной задачи с $\mathscr{L}[u] =$*