где коэффициенты $Z_{K,\alpha}$, являющиеся частными производными от $\widehat{P}_0$ по $u^\alpha_{(n-1)t,K}$, не зависят от производных $u^\alpha_{nt,J}$. Интегрируя по частям, мы получаем равенство (4.33), где

$$Q_\alpha = \sum_K (-D)^K Z_{K,\alpha}$$

не зависит от производных $u^\alpha_{nt,J}$, поскольку мультииндексы K относятся только к производным по y. Это доказывает лемму. □

Теперь предположим, что Q — тривиальная характеристика закона сохранения

$$\operatorname{Div} P = Q \cdot \Delta.$$

Заменим P, следуя лемме, эквивалентным законом сохранения $\widehat{P}$. Поскольку P и $\widehat{P}$ эквивалентны, в силу доказанной уже части теоремы 4.26 мы знаем, что Q и $\widehat{Q}$ — эквивалентные характеристики. Следовательно,

$$Q - \widehat{Q} = 0 \quad \text{на } \Delta. \tag{4.36}$$

Но Q уже обращается в нуль на Δ. По лемме единственный способ, которым $\widehat{Q}$ может обращаться в нуль на Δ, — это быть тождественным нулем. Поэтому $\widehat{P}$ — тривиальный закон сохранения второго типа (нулевая дивергенция). Следовательно, закон сохранения P, будучи эквивалентным $\widehat{P}$, также тривиален. Это завершает доказательство теоремы. □

4.4. ТЕОРЕМА НЁТЕР

Общий принцип, связывающий группы симметрий и законы сохранения, был впервые установлен Эмми Нётер (Noether [1]), которая сформулировала его в почти полной общности. Его вариант, изложенный в этом параграфе, — это вариант, больше знакомый физикам и прикладникам и требующий лишь знания теории обычных групп симметрий, изложенной в гл. 2. Но он далек от наиболее исчерпывающего варианта теоремы Нётер. Мы вернемся к этой теме в § 5.3, где будет доказана теорема Нётер в общем виде, который включает и настоящий вариант. Тем не менее излагаемый здесь результат очень полезен на практике, и мы проиллюстрируем его эффективность важными физическими примерами.

Теорема 4.29. *Предположим, что G — (локальная) однопараметрическая группа симметрий вариационной задачи с $\mathscr{L}[u] =$*

$= \int L(x, u^{(n)})\,dx$. *Пусть*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{4.37}$$

— инфинитезимальная образующая группы G и

$$Q_\alpha(x, u) = \varphi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha, \quad u_i^\alpha = \partial u^\alpha/\partial x^i,$$

— соответствующая характеристика поля $\mathbf{v}$, как в (2.48). Тогда $Q = (Q_1, \ldots, Q_q)$ является также характеристикой закона сохранения для уравнений Эйлера — Лагранжа $\mathsf{E}(L) = 0$; иными словами, имеется набор из p функций $P(x, u^{(m)}) = (P_1, \ldots, P_p)$, такой, что

$$\operatorname{Div} P = Q \cdot \mathsf{E}(L) = \sum_{\nu=1}^{q} Q_\nu \mathsf{E}_\nu(L) \tag{4.38}$$

— закон сохранения в характеристической форме для уравнений Эйлера — Лагранжа $\mathsf{E}(L) = 0$.

Доказательство. Мы подставляем формулу продолжения (2.50) в критерий инфинитезимальной инвариантности (4.15) и получаем

$$0 = \operatorname{pr}^{(n)}\mathbf{v}(L) + L \operatorname{Div}\xi = \operatorname{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i L + L \sum_{i=1}^{p} D_i \xi^i =$$
$$= \operatorname{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) + \operatorname{Div}(L\xi),$$

где $L\xi = (L\xi^1, \ldots, L\xi^p)$. Первое слагаемое в этом уравнении можно проинтегрировать по частям:

$$\operatorname{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) = \sum_{\alpha, J} D_J Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} = \sum_{\alpha, J} Q_\alpha \cdot (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \operatorname{Div} A =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha \mathsf{E}_\alpha(L) + \operatorname{Div} A,$$

где $A = (A_1, \ldots, A_p)$ — некоторый набор из p функций, зависящих от Q, L и их производных, явный вид которых здесь не требуется. Мы доказали, что

$$\operatorname{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) = Q \cdot \mathsf{E}(L) + \operatorname{Div} A \tag{4.39}$$

для некоторого A. Поэтому

$$0 = Q \cdot \mathsf{E}(L) + \operatorname{Div}(A + L\xi) \tag{4.40}$$

и (4.38) справедливо при $P = -(A + L\xi)$. Это завершает доказательство теоремы Нётер. □

С этой точки зрения сущность теоремы Нётер сводится к интегрированию по частям в формуле (4.39). Чтобы найти явное выражение для получающегося закона сохранения $P = -(A + L\xi)$, нам, таким образом, нужно найти общую формулу, выражающую A через L и характеристику Q симметрии. Общая формула появится в предложении 5.74; здесь мы подробно рассматриваем случай вариационных задач первого порядка. (Другой подход состоит в том, чтобы, зная характеристику Q, построить P прямо по основной формуле (4.38). Эта несколько специальная техника часто бывает полезна на практике, когда общая формула слишком громоздка, чтобы ее можно было применять непосредственно.) Если $L(x, u^{(1)})$ зависит только от производных первого порядка, то

$$\mathbf{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q(L) = \sum_{\alpha=1}^{q}\left\{Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \sum_{i=1}^{p} D_i Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right\}.$$

Интегрировать по частям нужно только вторую группу слагаемых, так что мы получаем, что (4.39) выполняется при $A_i = \sum_\alpha Q_\alpha \cdot \partial L/\partial u_i^\alpha$. Таким образом, имеем следующий вариант теоремы Нётер для вариационных задач первого порядка.

Следствие 4.30. *Предположим, что* $\mathscr{L}[u] = \int L(x, u^{(1)})\,dx$ — *вариационный функционал первого порядка и* $\mathbf{v}$ — *вариационная симметрия, как в* (4.37). *Тогда*

$$P_i = \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} + \xi^i L - \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} \xi^j u_j^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{4.41}$$

представляют собой компоненты закона сохранения $\operatorname{Div} P = 0$ *уравнений Эйлера — Лагранжа* $\mathsf{E}(L) = 0$.

Пример 4.31. Рассмотрим систему n частиц, движущихся в $\mathbb{R}^3$ в некотором потенциальном силовом поле. Кинетическая энергия этой системы имеет вид

$$K(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha |\dot{\mathbf{x}}^\alpha|^2,$$

где m_α — масса, а $\mathbf{x}^\alpha=(x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha)$ — координаты частицы с номером α. Потенциальная энергия $U(t, \mathbf{x})$ будет зависеть от конкретной задачи; например,

$$U(t, \mathbf{x})=\sum \gamma_{\alpha\beta}|\mathbf{x}^\alpha-\mathbf{x}^\beta|^{-1}$$

может зависеть только от двухчастичного гравитационного взаимодействия между массами, или (если $n=1$) мы можем взять потенциал притяжения к центру задачи Кеплера. Ньютоновские уравнения движения

$$m_\alpha \mathbf{x}^\alpha_{tt}=-\nabla_\alpha U\equiv-\left(U_{x^\alpha}, U_{y^\alpha}, U_{z^\alpha}\right), \quad \alpha=1, \ldots, n,$$

имеют вариационный вид, поскольку они являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для интеграла действия $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(K-U)\,dt$.

Векторное поле

$$\mathbf{v}=\tau(t, \mathbf{x})\frac{\partial}{\partial t}+\sum_\alpha \xi^\alpha(t, \mathbf{x})\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\alpha}\equiv\tau\frac{\partial}{\partial t}+ \\ +\sum_\alpha\left(\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha}+\zeta^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)$$

будет порождать группу вариационных симметрий, если и только если

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}(K-U)+(K-U)D_t\tau=0 \tag{4.42}$$

для всех $(t, \mathbf{x})$. Теорема Нётер непосредственно доставляет соответствующий закон сохранения или первый интеграл

$$T=\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \xi^\alpha\cdot\dot{\mathbf{x}}^\alpha-\tau E=\mathrm{const}, \tag{4.43}$$

где $E=K+U$ — полная энергия системы. В этом примере мы исследуем, какой вид должен принимать потенциал, чтобы определенные группы, представляющие физический интерес, были группами вариационных симметрий, и выведем вид соответствующего закона сохранения.

Прежде всего, группа сдвигов по времени имеет образующую $\mathbf{v}=\partial_t$. Поскольку $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}=\mathbf{v}$, (4.42) выполняется, если и только если $\partial U/\partial t=0$, т. е. U не зависит явно от времени. Получающийся закон сохранения есть просто энергия E. Инвариантность физической системы относительно сдвигов по времени, вообще, как правило, влечет за собой сохранение энергии. Рассмотрим далее группу одновременных сдвигов всех частиц в фиксированном направлении $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$. Группа $\mathbf{x}^\alpha\longmapsto\mathbf{x}^\alpha+\varepsilon\mathbf{a}$ имеет образующую $\mathbf{v}=\sum_\alpha \mathbf{a}\cdot\partial/\partial\mathbf{x}^\alpha$. Снова $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}=\mathbf{v}$, так что (4.42) выполняется, если и только если $\mathbf{v}(U)=0$. Это означает, что функция U инвариантна относительно сдвигов в данном направлении. Соответствующий первый интеграл есть импульс

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{x}}^\alpha=\mathrm{const}.$$

Снова в большинстве физических систем инвариантность относительно сдвига влечет за собой сохранение импульса. В качестве последнего примера рассмотрим группу одновременных вращений всех частиц вокруг некоторой фиксированной оси. Для простоты возьмем ось z. Образующая этой группы имеет вид

$$\mathbf{v}=\sum_\alpha\left(x^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha}-y^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right),\quad \mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}=\mathbf{v}+\sum_\alpha\left(\dot{x}^\alpha\frac{\partial}{\partial\dot{y}^\alpha}-\dot{y}^\alpha\frac{\partial}{\partial\dot{x}^\alpha}\right).$$

Заметим, что $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}(K)=0$, следовательно, вращения образуют группу вариационных симметрий, если и только если потенциал U инвариантен относительно вращений: $\mathbf{v}(U)=0$. Закон сохранения — это закон сохранения момента количества движения

$$\sum_\alpha m_\alpha(x^\alpha\dot{y}^\alpha-y^\alpha\dot{x}^\alpha)=\mathrm{const}.$$

Снова, как правило, инвариантность относительно вращений влечет за собой сохранение момента количества движения. Например, задача n тел допускает все семь симметрий, и поэтому в ней имеет место сохранение энергии, импульса и момента количества движения, тогда как в задаче Кеплера сохраняется только энергия и момент количества движения; инвариантность относительно сдвигов здесь уже отсутствует, поскольку одна масса должна оставаться в начале координат.

Пример 4.32. *Статическая теория упругости.* В теории упругости законы сохранения имеют особую важность, поскольку они дают нетривиальные интегралы, не зависящие от пути интегрирования, посредством которых можно исследовать особенности, такие, как трещины, интегрируя соответствующие величины вдали от них. Пусть $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^p$ — координаты точек упругого тела в некоторой эталонной конфигурации, а $u\in\mathbb{R}^q$ — пространственные координаты, представляющие смещение, так что $u(x)$ — деформированное положение исходной точки x. В физических приложениях $p=q=2$ или 3 в плоской или трехмерной теории упругости. В теории идеальной упругости в предположении отсутствия объемных сил равновесные деформации определяются как минимумы функционала энергии

$$\mathscr{W}[u]=\int_{\Omega} W(x,\ u^{(1)})\,dx,$$

подчиненные соответствующим граничным условиям на $\partial\Omega$. В большинстве случаев *плотность накопленной энергии* W будет зависеть от материальных координат x, деформации u и градиента деформации $\nabla u=(\partial u^{\alpha}/\partial x^{i})$. Последний измеряет возникающее в результате деформации напряжение[1]). Явный вид плотности накопленной энергии будет зависеть от предположений, определяющих тип упругого материала, из которого состоит тело. Тем не менее определенные универсальные физические ограничения будут налагать определенные общие ограничения на вид функции W. Каждое из этих ограничений появится в облике группы вариационных симметрий функционала $\mathscr{W}$, и поэтому теорема Нётер немедленно приведет к соответствующим законам сохранения, справедливым для упругих материалов вообще.

Прежде всего, поскольку W не зависит ни от каких внешних сил, она, по-видимому, не зависит от выбора системы отсчета, от наблюдателя. Это означает, что W должна быть инвариантна относительно евклидовой группы

$$\mathrm{E}(q)\colon\ u\longmapsto Ru+a,\quad a\in\mathbb{R}^{q},\quad R\in\mathrm{SO}(q),$$

действующей на пространственных переменных. Инвариантность относительно сдвигов влечет за собой независимость $W=W(x,\ \nabla u)$ от u; соответствующий закон сохранения

$$\sum_{i=1}^{p} D_i(\partial W/\partial u_i^{\alpha})=0,\quad \alpha=1,\ \ldots,\ q,$$

— не что иное, как сами уравнения Эйлера — Лагранжа, выраженные в дивергентном виде. Инвариантность W относительно вращений

$$W(x,\ R\nabla u)=W(x,\ \nabla u),\quad R\in\mathrm{SO}(q),$$

приводит к законам сохранения

$$\sum_{i=1}^{p} D_i\left\{u^{\alpha}\frac{\partial W}{\partial u_i^{\beta}}-u^{\beta}\frac{\partial W}{\partial u_i^{\alpha}}\right\}=0,\quad \alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ q,$$

[1]) Существуют, однако, теории материалов «более высокого порядка», предполагающие зависимость функции W от производных высших порядков.

характеристики которых являются характеристиками инфинитезимальных вращений $u^\alpha \partial_{u^\beta} - u^\beta \partial_{u^\alpha}$.

Дальнейшие законы сохранения можно получить, если мы накладываем дополнительные ограничения на тип упругого материала. Например, если тело однородно, то $W = W(\nabla u)$ не зависит от x. Инвариантность относительно группы сдвигов $x \mapsto x + a$, $a \in \mathbb{R}^p$, дает еще p законов сохранения

$$\sum_{i=1}^{p} D_i \left(\sum_{\alpha=1}^{q} u_j^\alpha \frac{\partial W}{\partial u_i^\alpha} - \delta_i^j W \right) = 0,$$

компоненты которых задают известный *тензор энергии-импульса* Эшелби. При интегрировании вокруг вершины трещины тензор определяет соответствующую скорость высвобождения энергии. Для однородного изотропного материала группа симметрий $SO(p)$: $x \mapsto Qx$, которая накладывает на функцию W условие $W(\nabla u \cdot Q) = W(\nabla u)$, приводит к $p(p-1)/2$ дополнительным законам сохранения

$$\sum_{i=1}^{p} D_i \left[\sum_{\alpha=1}^{q} (x^j u_k^\alpha - x^k u_j^\alpha) \frac{\partial W}{\partial u_i^\alpha} + (\delta_i^j x^k - \delta_i^k x^j) W \right] = 0,$$

отвечающим инфинитезимальным образующим $x^k \partial/\partial x^j - x^j \partial/\partial x^k$. Дальнейшие интересные законы сохранения можно получить, если накладывать дополнительные ограничения на плотность накопленной энергии W. Ограничиваясь однородным материалом, мы получаем, что если $W(\nabla u)$ — однородная функция степени n, так что

$$W(\lambda \nabla u) = \lambda^n W(\nabla u), \quad \lambda > 0,$$

для всех ∇u, то группа растяжений

$$(x, u) \mapsto (\lambda x, \lambda^{(n-p)/n} u), \quad \lambda > 0,$$

является группой вариационных симметрий, поскольку

$$\int_{\tilde{\Omega}} W(\nabla \tilde{u})\, d\tilde{x} = \int_{\Omega} W(\lambda^{-p/n} \nabla u)\, \lambda^p\, dx = \int_{\Omega} W(\nabla u)\, dx.$$

(Если мы будем растягивать отдельно x или u, мы получим симметрию уравнений Эйлера — Лагранжа, но *не* вариационную симметрию, если только $p \neq n$.) Инфинитезимальная образующая этой группы имеет вид

$$\sum_{i=1}^{p} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{n-p}{n} \sum_{\alpha=1}^{q} u^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

так что закон сохранения имеет вид

$$\sum_{i=1}^{p} D_i \left\{ \frac{n-p}{n} \sum_{\alpha=1}^{q} u^\alpha \frac{\partial W}{\partial u_i^\alpha} + x^i W - \sum_{j=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{q} x^j u_j^\alpha \frac{\partial W}{\partial u_i^\alpha} \right\} = 0.$$

На практике предположение об однородности W слишком частное. Для общей функции W указанный закон сохранения немного модифицируется и приводит к дивергентному тождеству

$$\sum_{i=1}^{p} D_i \left\{ \sum_{\alpha=1}^{q} u^\alpha \frac{\partial W}{\partial u_i^\alpha} + x^i W - \sum_{j=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{q} x^j u_j^\alpha \frac{\partial W}{\partial u_i^\alpha} \right\} = pW,$$

которое недавно было использовано в работе Knops, Stuart [1] для доказательства единственности равновесных решений, соответствующих однородным деформациям. (См. упр. 5.25, где приведена общая теорема этого сорта.) Если функция W однородна степени p, то имеется полная конформная группа вариационных симметрий. Инфинитезимальные образующие преобразований инверсии имеют вид

$$\sum_{j=1}^{p} \left(x^i x^j - \frac{1}{2} \delta_j^i |x|^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

а соответствующие законы сохранения —

$$\sum_{i=1}^{p} D_i C_i^j \equiv \sum_{i=1}^{p} D_i \left\{ \sum_{k=1}^{p} \left(x^j x^k - \frac{1}{2} \delta_j^k |x|^2 \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{q} u_k^\alpha \frac{\partial W}{\partial u_i^\alpha} - \delta_i^k W \right) \right\} = 0.$$

Снова, если функция W не однородна, они переходят в дивергентные тождества:

$$\sum_{i=1}^{p} D_i C_i^j = x^j \left[pW - \sum_{\alpha, k} u_k^\alpha \frac{\partial W}{\partial u_k^\alpha} \right].$$

Этот метод использования симметрий частных вариационных задач для построения полезных дивергентных тождеств для более общих функционалов кажется довольно многообещающим, но ему еще предстоит получить полное развитие.

Дивергентные симметрии

Беглый просмотр доказательства теоремы Нётер обнаруживает, что предположение о том, что векторное поле **v** порождает группу вариационных симметрий, является чрезмерным ограничением для вывода существования закона сохранения. Это наводит на мысль ослабить определение группы вариационных симметрий следующим образом.

Определение 4.33. Пусть $\mathscr{L}[u]=\int L\,dx$ — функционал. Векторное поле $\mathbf{v}$ на $M\subset X\times U$ называется *инфинитезимальной дивергентной симметрией* функционала $\mathscr{L}$, если существует набор из p функций $B(x,u^{(m)})=(B_1,\ldots,B_p)$ от x, u и производных от u, такой, что

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}(L)+L\,\mathrm{Div}\,\xi=\mathrm{Div}\,B \tag{4.44}$$

для всех x, u из M.

Чтобы уяснить мотивировку и обозначения, сравним «инфинитезимальный критерий» (4.44) с теоремой 4.12. В случае если $B=0$, мы снова приходим к понятию вариационной симметрии. Каждая инфинитезимальная дивергентная симметрия вариационной задачи порождает однопараметрическую группу $g_\varepsilon=\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ преобразований многообразия M, однако точные свойства симметрии таких групп *дивергентных симметрий* менее понятны, чем в случае обычных групп вариационных симметрий. Тем не менее получаем следующее обобщение теоремы 4.14.

Теорема 4.34. *Если $\mathbf{v}$ — инфинитезимальная дивергентная симметрия вариационной задачи, то она порождает группу симметрий соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа.*

Доказательство этого результата мы откладываем до § 5.3, когда будет развита соответствующая теория. Практически, чтобы найти дивергентные симметрии вариационной задачи, сначала вычисляют общую группу симметрий соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа. После этого непосредственно проверяется, какая линейная комбинация этих симметрий удовлетворяет дополнительному критерию (4.44), чтобы на самом деле быть дивергентной симметрией. (См. также предложение 5.39.)

Утверждение теоремы Нётер 4.29 остается тем же самым, если мы заменим вариационную симметрию на дивергентную симметрию в ее предположении: характеристика Q инфинитезимальной дивергентной симметрии остается характеристикой закона сохранения уравнений Эйлера — Лагранжа. Единственное, что меняется в доказательстве, — появляется добавочный член $\mathrm{Div}\,B$, происходящий из формулы (4.44), в соответствующих формулах, так что, например, (4.40) заменяется на

$$Q\cdot\mathbf{E}(L)+\mathrm{Div}(A+L\xi)=\mathrm{Div}\,B.$$

Таким образом, заключение (4.38) остается справедливым при $P = B - A - L\xi$ в этом случае.

Пример 4.35. Рассмотрим инвариантность лагранжиана $K-U$ для системы n частиц относительно галилеевых преобразований:

$$(t,\ \mathbf{x}^\alpha) \longmapsto (t,\ \mathbf{x}^\alpha + \varepsilon t \mathbf{a}),$$

где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Инфинитезимальная образующая этого действия имеет продолжение

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(t\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\alpha} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}^\alpha} \right);$$

поэтому

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}(L) = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha - t \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{a} \cdot \nabla_\alpha U.$$

Это выражение никогда не обращается в нуль тождественно (при $\mathbf{a} \neq 0$), так что галилеево преобразование никогда не будет обычной вариационной симметрией. Однако первое слагаемое в $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}(L)$ — дивергенция, а именно $D_t\left(\sum m_\alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^\alpha\right)$, так что $\mathbf{v}$ порождает группу дивергентных симметрий, если функция U инвариантна относительно сдвигов в направлении $\mathbf{a}$. Соответствующий первый интеграл имеет вид

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^\alpha - t \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}^\alpha.$$

Первая сумма, поделенная на полную массу $\sum m_\alpha$, определяет проекцию центра масс системы на направление $\mathbf{a}$, а вторая сумма — в точности проекцию импульса на то же направление. Таким образом, мы получаем, что если U инвариантна относительно сдвигов в данном направлении, то не только проекция импульса на данное направление постоянна, но и проекция центра масс на это направление является линейной функцией от t:

$$\text{Центр масс} = t\,(\text{импульс})/(\text{масса}) + c.$$

В частности, если U инвариантна относительно полной группы сдвигов в $\mathbb{R}^3$, то центр масс любой такой системы движется линейно в фиксированном направлении.

Пример 4.36. Вернемся к волновому уравнению в двумерном пространстве, рассмотренному в примерах 2.43 и 4.15. Уже было показано, что для полной группы симметрий волнового уравнения сдвиги, вращение и модифицированные дилатации являются симметриями соответствующей вариационной задачи.

Сейчас мы увидим, что инверсии, не будучи вариационными симметриями в строгом смысле, являются дивергентными симметриями. В случае $\mathbf{i}_x$ имеем

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{i}_x(L) + L\,\mathbf{Div}\,\xi = uu_x = D_x\left(\frac{1}{2}u^2\right).$$

Таким образом, имеется десять законов сохранения для волнового уравнения, проистекающих из геометрических групп симметрий, — три из сдвигов, три из вращений, один из дилатации и, наконец, три закона сохранения, проистекающих из инверсий. В следующей таблице мы перечисляем эти десять плотностей законов сохранения, оставляя читателю определить соответствующие потоки.

Симметрия	Характеристика	Плотность закона сохранения
Сдвиги	u_x	$P_x = u_x u_t$
	u_y	$P_y = u_y u_t$
	u_t	$E = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2)$
Вращения	$xu_y - yu_x$	$A = xP_y - yP_x$
	$xu_t + tu_x$	$M_x = xE + tP_x$
	$yu_t + tu_y$	$M_y = yE + tP_y$
Дилатация	$xu_x + yu_y + tu_t + \frac{1}{2}u$	$D + xP_x + yP_y + \frac{1}{2}uu_t + tE$
Инверсии	$(x^2 - y^2 + t^2)u_x + 2xyu_y + 2xtu_t + xu$	$I_x = xD - yA + \frac{1}{2}xuu_t + tM_x$
	$2xyu_x + (y^2 - x^2 + t^2)u_y + 2ytu_t + yu$	$I_y = yD - xA + \frac{1}{2}yuu_t + tM_y$
	$2xtu_x + 2ytu_y + (x^2 + y^2 + t^2)u_t + tu$	$I_t = (x^2 + y^2)E - \frac{1}{2}u^2 + 2tD - t^2E$

Следовательно, если $u(x, y, t)$ — любое глобальное решение волнового уравнения, достаточно быстро затухающее при $x^2 + y^2 \to \infty$, то пространственные интегралы от каждой из указанных в таблице плотностей — константы, не зависящие от t. Таким образом, мы получаем сохранение энергии

$$\mathscr{E} = \iint E\,dx\,dy = \text{const}$$

и аналогичные утверждения об импульсах $\mathcal{P}_x$ и $\mathcal{P}_y$ (интегралы от P_x и P_y) и моменте количества движения $\mathcal{A}$. Гиперболические вращения приводят к линейной зависимости соответствующих моментов энергии от t; например,

$$-\iint xE\,dx\,dy = \mathcal{P}_x t + \mathcal{C}$$

для некоторой постоянной $\mathcal{C}$, где $\mathcal{P}_x$ — постоянный импульс. Группа дилатации приводит к полезному тождеству

$$-\frac{d}{dt}\iint \frac{1}{2}u^2\,dx\,dy = \iint (xP_x + yP_y)\,dx\,dy + \mathcal{E}t + \hat{\mathcal{C}},$$

где $\hat{\mathcal{C}}$ — константа. Три закона сохранения, проистекающие из инверсий, например

$$\iint \left[(x^2+y^2)E - \frac{1}{2}u^2\right] dx\,dy = \mathcal{E}t^2 + 2\hat{\mathcal{C}}t + \mathcal{C}^*,$$

менее мотивированные физически, играют ключевую роль в развитии теории рассеяния как для линейных, так и для нелинейных волновых уравнений.

Наконец, имеются образующие симметрий $\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x, y, t)\partial_u$, происходящие из линейности уравнения. Они удовлетворяют условию

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}_\alpha(L) = \alpha_t u_t - \alpha_x u_x - \alpha_y u_y = D_t(\alpha_t u) - D_x(\alpha_x u) - D_y(\alpha_y u),$$

поскольку α — решение волнового уравнения. Таким образом, исключая частный случай постоянного α, в смысле определения 4.10 это не вариационные симметрии; но они порождают дивергентные симметрии. Соответствующие законы сохранения — соотношения взаимности

$$D_t(\alpha u_t - \alpha_t u) - D_x(\alpha u_x - \alpha_x u) - D_y(\alpha u_y - \alpha_y u) =$$
$$= \alpha(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) - u(\alpha_{tt} - \alpha_{xx} - \alpha_{yy}) = 0,$$

обращающиеся в нуль, если α и u являются решениями волнового уравнения. В интегральной форме этот закон — в точности формула Грина, примененная к волновому оператору. (См. § 5.3, где проводится общее обсуждение соотношений взаимности.)

Замечания

Вариационное исчисление берет свое начало в работах Эйлера и Бернулли, относящихся к восемнадцатому веку. Оператор, носящий имя Эйлера, появился впервые в 1774 г. Однако вплоть до работ Вейерштрасса и Гильберта второй половины