со свойствами симметрии среды, как в примере 4.32, вплоть до работ Günther [1] и Knowles, Sternberg [1]. Распространение законов сохранения на уравнения линейной динамической теории упругости было сделано в работе Fletcher D. C. [1]. Недавно в работах Olver [8], [9] были найдены дальнейшие, не обнаруженные ранее, симметрии уравнений линейной упругости и, следовательно, новые законы сохранения. Аналогично, важные тождества Моравеца (Morawetz [1]), использующиеся в теории рассеяния для волнового уравнения, были изначально развиты «на голом месте». Впоследствии в работе Strauss [1] было показано, как они связаны с конформной инвариантностью уравнения. (Дальнейшие законы сохранения, которые появятся в гл. 5, ждут применений.) Так же обстоят дела с работой Baker, Tavel [1] о законах сохранения в оптике, и нет сомнений, что имеются и дальнейшие примеры.

Применение групп вариационных симметрий к понижению порядка обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся уравнениями Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи, содержащееся в теореме 4.17, не так хорошо известно, как его гамильтонов аналог, теорема 6.35. Вариант теоремы 4.17 для лагранжианов, зависящих от производных только первого порядка от зависимых переменных, дан в работе Whittaker [1; с. 55], но я не в состоянии указать ссылку на полное изложение этой теоремы в литературе.

Упражнения

4.1. Пусть $\mathscr{L}$ — функционал. Докажите, что если $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ порождают однопараметрические группы вариационных симметрий, то то же верно и для их скобки Ли $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$.

4.2. Пусть $p = 2$ и $D_x P + D_y Q = 0$ — закон сохранения для системы дифференциальных уравнений. Докажите, что если $u(x, y)$ — любое решение этой системы, то криволинейный интеграл

$$\int_C Q\left(x, y, u^{(m)}\right) dx - P\left(x, y, u^{(m)}\right) dy$$

не зависит от пути C.

4.3. В случае такой механической системы, как в примере 4.31, инвариантность относительно сдвигов по времени влечет за собой сохранение энергии, инвариантность относительно пространственных сдвигов влечет за собой сохранение импульса (в данном направлении), тогда как инвариантность относительно преобразований Галилея, как в примере 4.35, влечет за собой линейное движение центра масс. Докажите, что если система обладает законами сохранения энергии и линейного движения центра масс, то она автоматически обладает также законом сохранения импульса. (Schütz, [1].)

4.4. Уравнение ББМ $u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$ можно привести к вариационному виду, положив $u = v_x$. Найдите три закона сохранения этого уравнения с помощью теоремы Нётер. (Olver, [3]).

4.5. Уравнение $u_{tt} = u_{xxxx}$ описывает колебание стержня. Пользуясь теоремой Нётер, вычислите симметрии и законы сохранения этого уравнения.

*4.6. Найдите вариационную задачу для уравнений Максвелла из упр. 2.16(a), (b). Какие из симметрий упр. 2.16 приводят к законам сохранения и что это за законы?

*4.7. Найдите вариационный принцип для уравнений Навье (2.127) линейной упругости. Обсудите в этом примере симметрии и соответствующие законы сохранения, включая их тривиальность. Сделайте то же самое для анормальной системы (2.118).

4.8. Уравнение Эмдена — Фаулера имеет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{du}{dx} + u^5 = 0.$$

(a) Найдите вариационную задачу, уравнением Эйлера — Лагранжа которой является это уравнение. (*Указание.* Умножьте на x^2.)

(b) Найдите простую вариационную симметрию — растяжение и воспользуйтесь ею, чтобы проинтегрировать уравнение Эмдена — Фаулера. (Dresner [1; p. 14], Logan [1; p. 52], Rosenau [1].)

4.9. Докажите, что уравнение гармонического осциллятора с трением $m\ddot{x} + a\dot{x} + kx = 0$, $m \neq 0$, можно, умножая на $\exp(at/m)$, привести к уравнению Эйлера — Лагранжа. Докажите, что векторное поле $\mathbf{v} = \partial_t - (ax/2m)\partial_x$ порождает однопараметрическую группу вариационных симметрий. Воспользуйтесь этим, чтобы проинтегрировать это уравнение с помощью квадратуры. Насколько эффективен этот метод по сравнению с обычным методом решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений? (Logan [1; p. 57]; см. также упр. 5.38.)

4.10. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка на $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^2$

$$\frac{d^n u}{dx^n} = H\left(x, u^{(n-1)}\right).$$

Докажите, что первый интеграл этого уравнения — то же самое, что инвариант однопараметрической группы, порожденной полем

$$\frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots + u_{n-1}\frac{\partial}{\partial u_{n-2}} + H\left(x, u^{(n-1)}\right)\frac{\partial}{\partial u_{n-1}}$$

и действующей на пространстве струй $M^{(n-1)}$. Пользуясь этим замечанием, найдите решения уравнения $u_{xx} = u$. (Cohen [1; p. 86, 99].)

4.11. Рассмотрим вариационную задачу вида $\mathscr{L} = \int L\left(x, u_x^{-1}u_{xx}\right)dx$, x, $u \in \mathbb{R}$.

(a) Докажите, что двупараметрическая группа $(x, u) \longmapsto (x, au + b)$, $a \neq 0$, является группой вариационных симметрий.

(b) Какой вид имеет уравнение Эйлера — Лагранжа для $\mathscr{L}$?

(c) Покажите, что уравнение Эйлера — Лагранжа можно дважды проинтегрировать, пользуясь инвариантностью относительно сдвигов, однако получающееся в результате уравнение второго порядка, вообще говоря, не инвариантно относительно растяжений.

(d) Проделайте то же самое для симметрии растяжения.

(e) Проинтегрируйте уравнение Эйлера — Лагранжа дважды, пользуясь двумя первыми интегралами, которые даются теоремой Нётер. Покажите, однако, что, как и выше, в общем случае нельзя еще понизить порядок.

(f) Что случится, если применить к этому уравнению методы § 2.5? Это показывает, что, хотя однопараметрическая группа вариационных симметрий, вообще говоря, позволяет понизить порядок системы уравнений Эйлера — Лагранжа на два, двупараметрическая группа вариационных симметрий в общем случае *не* позволяет понизить порядок на четыре единицы! (Эта задача приведена к гамильтоновой форме в гл. 6.)

4.12. Покажите, что если $\mathcal{L}$ — вариационная задача, зависящая от одной независимой и одной зависимой переменной, и $\mathcal{L}$ инвариантна относительно двупараметрической *абелевой* группы симметрий, то порядок соответствующего уравнения Эйлера — Лагранжа можно понизить на четыре единицы.

4.13. (a) Предположим, что $\Delta = \mathsf{E}(L) = 0$ представляют собой уравнения Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи и G — регулярная группа вариационных симметрий (или даже дивергентных симметрий), действующая на M. Докажите, что редуцированная система $\Delta/G = 0$ для G-инвариантных решений системы Δ также представляет собой уравнения Эйлера — Лагранжа для некоторой вариационной задачи на фактормногообразии M/G. Обобщается ли это на группы невариационных симметрий?

(b) Найдите вариационные формулировки уравнений для инвариантных относительно группы решений уравнения Кортевега — де Фриза (2.66), воспользовавшись сначала подстановкой $u = v_x$, чтобы привести само уравнение Кортевега — де Фриза к вариационному виду.

4.14. Уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$ не может быть приведено к вариационному виду (кроме как с помощью некоторых искусственных приемов — см. упр. 5.26 и 5.27). Докажите, однако, что уравнение для инвариантных относительно растяжений решений эквивалентно уравнению Эйлера — Лагранжа. (*Указание.* Найдите подходящую функцию, на которую его нужно умножить.) Обобщите это на высшие размерности. (Таким образом, редукция с помощью группы симметрий будет обычно сохранять вариационную структуру, если она имелась сначала, но она может также ввести вариационную структур там, где ее до этого не было!)

4.15. Пусть $p = 1$, $q = 2$, и у нас есть функционал

$$\mathcal{L}[u, \tilde{u}] = \int L(x, u, \tilde{u}, u_x, \tilde{u}_x, \ldots)\, dx.$$

Рассмотрим «годографическую» замену переменных $y = \tilde{u}$, $v = u$, $\tilde{v} = x$, и пусть

$$\tilde{\mathcal{L}}[v, \tilde{v}] = \int \tilde{L}(y, v, \tilde{v}, v_y, \tilde{v}_y, \ldots)\, dy$$

— преобразованный функционал. Докажите, что соответствующие уравнения Эйлера — Лагранжа связаны формулой

$$\mathsf{E}_u(L) = \tilde{u}_x \mathsf{E}_v(\tilde{L}), \qquad \mathsf{E}_{\tilde{u}}(L) = -u_x \mathsf{E}_v(\tilde{L}) - \mathsf{E}_{\tilde{v}}(\tilde{L}).$$

4.16. Воспользуйтесь теоремой Нётер, чтобы дать другое доказательство теоремы редукции 4.17, не опирающееся непосредственно на замену переменных. Примените ваш результат к упр. 4.8 и 4.9.