и аналогичные утверждения об импульсах $\mathscr{P}_x$ и $\mathscr{P}_y$ (интегралы от P_x и P_y) и моменте количества движения $\mathscr{A}$. Гиперболические вращения приводят к линейной зависимости соответствующих моментов энергии от t; например,

$$-\int\int xE\,dx\,dy=\mathscr{P}_x t+\mathscr{C}$$

для некоторой постоянной $\mathscr{C}$, где $\mathscr{P}_x$ — постоянный импульс. Группа дилатации приводит к полезному тождеству

$$-\frac{d}{dt}\int\int\frac{1}{2}u^2\,dx\,dy=\int\int(xP_x+yP_y)\,dx\,dy+\mathscr{E}t+\hat{\mathscr{C}},$$

где $\hat{\mathscr{C}}$ — константа. Три закона сохранения, проистекающие из инверсий, например

$$\int\int\left[(x^2+y^2)E-\frac{1}{2}u^2\right]dx\,dy=\mathscr{E}t^2+2\hat{\mathscr{C}}t+\mathscr{C}^*,$$

менее мотивированные физически, играют ключевую роль в развитии теории рассеяния как для линейных, так и для нелинейных волновых уравнений.

Наконец, имеются образующие симметрий $\mathbf{v}_\alpha=\alpha(x,y,t)\partial_u$, происходящие из линейности уравнения. Они удовлетворяют условию

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}_\alpha(L)=\alpha_t u_t-\alpha_x u_x-\alpha_y u_y=D_t(\alpha_t u)-D_x(\alpha_x u)-D_y(\alpha_y u),$$

поскольку α — решение волнового уравнения. Таким образом, исключая частный случай постоянного α, в смысле определения 4.10 это не вариационные симметрии; но они порождают дивергентные симметрии. Соответствующие законы сохранения — соотношения взаимности

$$\begin{aligned}D_t(\alpha u_t-\alpha_t u)-D_x(\alpha u_x-\alpha_x u)-D_y(\alpha u_y-\alpha_y u)&=\\=\alpha(u_{tt}-u_{xx}-u_{yy})-u(\alpha_{tt}-\alpha_{xx}-\alpha_{yy})&=0,\end{aligned}$$

обращающиеся в нуль, если α и u являются решениями волнового уравнения. В интегральной форме этот закон — в точности формула Грина, примененная к волновому оператору. (См. § 5.3, где проводится общее обсуждение соотношений взаимности.)

Замечания

Вариационное исчисление берет свое начало в работах Эйлера и Бернулли, относящихся к восемнадцатому веку. Оператор, носящий имя Эйлера, появился впервые в 1774 г. Однако вплоть до работ Вейерштрасса и Гильберта второй половины девятнадцатого века в этом предмете не было даже подобия строгости. Книга Гельфанда и Фомина [1] дает удобное для наших целей введение в вариационное исчисление, из которого мы использовали здесь лишь наиболее элементарные идеи. Законы сохранения имеют даже более давние истоки, хотя идея сохранения энергии не была надлежащим образом оформлена вплоть до работы Гельмгольца 1840-х годов. (См. Elkana [1], где имеется интересное исследование исторического развития этой идеи.) В книге Whitham [2; § 6.1] подробно излагаются законы сохранения в механике жидкости, кратко изложенные в примере 4.22.

В этой книге я не пытался представить многочисленные приложения законов сохранения в качественной теории дифференциальных уравнений. Я сосредоточился лишь на их систематическом выводе, основанном на симметрийном подходе Нётер. Лакс (Lax [2]) воспользовался законами сохранения (называемыми в этом контексте «парами энтропия — поток»), чтобы доказать глобальные теоремы существования и обосновать условия на разрывы для решений гиперболических систем, содержащих ударные волны. Это направление получило дальнейшее развитие в работах Di Perna [1], [2], где дополнительные законы сохранения применяются к затуханию ударных волн и дальнейшим теоремам существования. Законы сохранения применялись в задачах устойчивости, см. Benjamin [1], Holm, Marsden, Ratiu, Weinstein [1]. В работах Morawetz [1], Strauss [1] изложено их применение в теории рассеяния. В теории упругости законы сохранения (или, скорее, соответствующие им дифференциальные формы — см. упр. 4.2) играют ключевую роль в изучении трещин и дислокаций; см. библиографию в книге Bilby, Miller, Willis [1]. В работе Knops, Stuart [1] они используются для доказательства теорем единственности для упругого равновесия. И это — лишь малая часть всех имеющихся приложений.

Тривиальные законы сохранения давно были известны специалистам по общей теории относительности. Тривиальные законы сохранения второго типа называют «сильными законами сохранения», поскольку они справедливы при любых уравнениях поля; см. обзорные статьи Fletcher J. C. [1], Goldberg [1]. Характеристическая форма закона сохранения появилась в работе Steudel [1], однако связь между тривиальными характеристиками и тривиальными законами сохранения теоремы 4.26 установлена в работе Alonco [1*]. См. также Виноградов [5] и Olver [11] по поводу близких результатов.

Понятие вариационной симметрии, включая основной инфинитезимальный критерий (4.15), появилось у Ли (см. Lie [7]) в его теории интегральных инвариантов. Первыми, кто обратил внимание на связь между симметриями и законами сохранения, были Якоби (см. Jacobi [1]) и позже Шютц (Schütz [1]). Энгель (Engel [1]) развил соответствие между сохранением импульса и момента количества движения и линейным движением центра масс с инвариантностью относительно сдвигов, вращений и галилеевых симметрий в контексте классической механики. Исследования Клейна и Гильберта по общей теории относительности Эйнштейна вдохновили Нётер на ее замечательную работу Noether [1], в которой в полной общности были изложены и понятие группы вариационных симметрий, и связь с законами сохранения. Вариант теоремы Нётер, приведенный в этой главе, является лишь частным случаем ее более общей теоремы, которая будет обсуждена в § 5.3. Распространение методов Нётер на дивергентные симметрии появилось в работе Bessel-Hagen [1].

Таким образом, к 1922 г. был подготовлен весь аппарат для подробного систематического исследования свойств симметрии и, следовательно, законов сохранения важных уравнений математической физики. Как ни странно, прогресс был незначительным вплоть до недавнего времени. Одно возможное объяснение состоит в том, что конструктивные инфинитезимальные методы Ли вычисления групп симметрий никогда не были полностью согласованы с теоремой Нётер. Как бы то ни было, следующая знаменательная ссылка на работу Нётер появилась в обзорной статье физика Хилла (Hill [1]). В ней был представлен частный случай теоремы Нётер, обсуждавшейся в этой главе, причем так, как будто на самом деле это все, что было доказано Нётер на данную тему. К сожалению, в следующие двадцать лет шел непрерывный поток бесчисленных работ, либо передоказывающих основную теорему Нётер 4.29, либо претендующих на ее обобщение, тогда как на самом деле в них лишь передоказывался исходный результат Нётер или его частные случаи. Литература по математической физике до сего дня изобилует такими работами, и перечислять их здесь было бы бессмысленно. (Мне известно около 50 таких статей, но я уверен, что их гораздо больше!) Некоторые ссылки можно найти в книге Logan [1] (в которой снова получен лишь частный случай теоремы Нётер для групп классических симметрий), а также ниже в настоящих замечаниях.

Недооценка теоремы Нётер и недостатки исследований на эту тему имели некоторые интересные последствия. Тензор энергии-импульса Эшелби, очень важный при изучении трещин и дислокаций в упругой среде, изначально был найден с помощью специальной техники, см. Eshelby [1]. Его не связывали со свойствами симметрии среды, как в примере 4.32, вплоть до работ Günther [1] и Knowles, Sternberg [1]. Распространение законов сохранения на уравнения линейной динамической теории упругости было сделано в работе Fletcher D. C. [1]. Недавно в работах Olver [8], [9] были найдены дальнейшие, не обнаруженные ранее, симметрии уравнений линейной упругости и, следовательно, новые законы сохранения. Аналогично, важные тождества Моравеца (Morawetz [1]), использующиеся в теории рассеяния для волнового уравнения, были изначально развиты «на голом месте». Впоследствии в работе Strauss [1] было показано, как они связаны с конформной инвариантностью уравнения. (Дальнейшие законы сохранения, которые появятся в гл. 5, ждут применений.) Так же обстоят дела с работой Baker, Tavel [1] о законах сохранения в оптике, и нет сомнений, что имеются и дальнейшие примеры.

Применение групп вариационных симметрий к понижению порядка обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся уравнениями Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи, содержащееся в теореме 4.17, не так хорошо известно, как его гамильтонов аналог, теорема 6.35. Вариант теоремы 4.17 для лагранжианов, зависящих от производных только первого порядка от зависимых переменных, дан в работе Whittaker [1; с. 55], но я не в состоянии указать ссылку на полное изложение этой теоремы в литературе.

Упражнения

4.1. Пусть $\mathscr{L}$ — функционал. Докажите, что если $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ порождают однопараметрические группы вариационных симметрий, то то же верно и для их скобки Ли $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$.

4.2. Пусть $p = 2$ и $D_x P + D_y Q = 0$ — закон сохранения для системы дифференциальных уравнений. Докажите, что если $u(x, y)$ — любое решение этой системы, то криволинейный интеграл

$$\int_C Q\left(x, y, u^{(m)}\right) dx - P\left(x, y, u^{(m)}\right) dy$$

не зависит от пути C.

4.3. В случае такой механической системы, как в примере 4.31, инвариантность относительно сдвигов по времени влечет за собой сохранение энергии, инвариантность относительно пространственных сдвигов влечет за собой сохранение импульса (в данном направлении), тогда как инвариантность относительно преобразований Галилея, как в примере 4.35, влечет за собой линейное движение центра масс. Докажите, что если система обладает законами сохранения энергии и линейного движения центра масс, то она автоматически обладает также законом сохранения импульса. (Schütz, [1].)

4.4. Уравнение ББМ $u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$ можно привести к вариационному виду, положив $u = v_x$. Найдите три закона сохранения этого уравнения с помощью теоремы Нётер. (Olver, [3]).