5. Обобщенные симметрии

Группы симметрий дифференциальных уравнений или вариационных задач, до сих пор рассматривавшиеся в этой книге, все были группами локальных преобразований, «геометрически» действующих на пространстве независимых и зависимых переменных. Эмми Нётер первой осознала, что можно значительно расширить приложения методов групп симметрий, включая в преобразования (или, точнее, в их инфинитезимальные образующие) производные соответствующих зависимых переменных. В последнее время доказана важность этих «обобщенных симметрий»[1]) в изучении нелинейных волновых уравнений, где оказывается, что обладание бесконечным числом таких симметрий является характеристическим свойством «интегрируемых» уравнений (таких, как уравнение Кортевега — де Фриза, имеющее солитонные решения), которые могут быть линеаризованы или непосредственно, или с помощью обратной задачи рассеяния.

В первом параграфе этой главы представлена основная теория обобщенных векторных полей и соответствующих преобразований из группы, которые находятся теперь путем решения задачи Коши для некоторой соответствующей системы эволюционных уравнений. Определение обобщенных симметрий системы дифференциальных уравнений по существу такое же, как и раньше, хотя промежуточные вычисления обычно оказываются гораздо более сложными. Другой подход к этой проблеме состоит в применении оператора рекурсии, который будет порождать сразу бесконечные семейства симметрий. Этому посвящен второй параграф. Для линейных систем операторы рекурсии и симметрии — по существу одни и те же объекты, тогда

[1]) Некоторые авторы ошибочно относят введенне этих симметрий к работам Ли и Бэклуида и дают им вводящее в заблуждение название «преобразований Ли — Бэклунда». (В частности, это *не* то же самое, что настоящне преобразования Бэклунда, которые *не* обладают групповыми свойствами.) Мы выбралн термин «обобщенная симметрия», а не «преобразование Нётер», поскольку последнні уже приобрел несколько других значений в контексте вариационных задач. Более полное обсуждение любопытной истории этнх симметрий проводится в замечаниях в конце этой главы.

как в случае нелинейных уравнений лишь очень специальные «интегрируемые» уравнения обладают операторами рекурсии.

Многие из наших предыдущих приложений геометрических симметрий остаются в силе для обобщенных симметрий. В частности, теорема Нётер доставляет теперь полное взаимно однозначное соответствие между однопараметрическими группами обобщенных вариационных симметрий некоторого функционала и законами сохранения соответствующих ему уравнений Эйлера — Лагранжа. Таким образом, можно надеяться на полную классификацию законов сохранения посредством конструктивных методов теории групп симметрий. В частности, интерпретация группы симметрий линейной системы как оператора рекурсии сразу приводит к бесконечным семействам законов сохранения, зависящих от производных высших порядков, в очень общих ситуациях. Недавние результаты еще больше выявляют роль тривиальных симметрий и законов сохранения в нётеровом соответствии для вполне невырожденных систем, из которого следует, что каждая нетривиальная группа вариационных симметрий дает нетривиальный закон сохранения и наоборот. Переопределенные системы подпадают под действие второй теоремы Нётер, которая связывает бесконечномерные группы вариационных симметрий с зависимостями между самими уравнениями Эйлера — Лагранжа. Все это будет подробно обсуждаться в третьем параграфе этой главы.

Лежащий в основе многих наших алгебраических манипуляций, включающих симметрии, законы сохранения, дифференциальные операторы и тому подобное, предмет, лучше всего описываемый как «формальное вариационное исчисление», является некоторым комплексом, называемым вариационным комплексом. В вариационном исчислении он играет ту же роль, что комплекс де Рама в обычном векторном исчислении на многообразиях. Имеются три фундаментальных результата, мотивирующих рассмотрение этого комплекса: первый — это характеризация ядра оператора Эйлера как пространства полных дивергенций; второй — характеризация (в теореме 4.24) пространства нулевых дивергенций (тривиальных законов сохранения второго типа) как «полных роторов»; третий — вариант Гельмгольца обратной задачи вариационного исчисления, который устанавливает, когда данное множество дифференциальных уравнений представляет собой уравнения Эйлера — Лагранжа для некоторой вариационной задачи. Все эти результаты — проявления точности всего вариационного комплекса в различных членах. Хотя каждый результат можно было бы доказать сам по себе, вариационный комплекс, фундаментальная роль которого в геометрической теории вариационного исчисления становится все более и более очевидной, доставляет объединяющую их основу, а полное доказательство его точности получить не намного труднее. Поэтому мы посвятили последний параграф данной главы замкнутому описанию этого комплекса вместе со значительно упрощенным доказательством его точности.

5.1. ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi^{i}(x,\ u)\frac{\partial}{\partial x^{i}}+\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi_{\alpha}(x,\ u)\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}},$$

определенное на некотором открытом подмножестве M пространства независимых и зависимых переменных $X\times U$. Если коэффициенты ξ^i, φ_α зависят только от x и u, то $\mathbf{v}$ будет порождать (локальную) однопараметрическую группу преобразований $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$, действующую поточечно на пространстве M (это подробно обсуждалось в предыдущих главах). Значительное обобщение понятия группы симметрий получается при ослаблении этого геометрического предположения, если допустить, что коэффициенты ξ^i, φ_α могут зависеть также от производных от u. В этой главе мы установим множество следствий такого расширения понятия симметрии.

Дифференциальные функции

Прежде чем приступать к развитию теории обобщенных векторных полей, полезно ввести некоторые обозначения. В этой главе $M\subset X\times U$ будет обозначать фиксированное связное открытое подмножество пространства независимых и зависимых переменных. Продолжения $M^{(n)}\subset X\times U^{(n)}$ являются тогда открытыми подмножествами соответствующих пространств струй, причем $(x,u^{(n)})\in M^{(n)}$, если и только если $(x,u)\in M$. Обозначим через $\mathcal{A}$ пространство гладких функций $P(x,u^{(n)})$, зависящих от x, u и производных от u до некоторого конечного, но меняющегося порядка n и определенных для $(x,u^{(n)})\in M^{(n)}$. Функции из $\mathcal{A}$ называются *дифференциальными функциями* (по аналогии с дифференциальными многочленами в дифференциальной алгебре). Каждая дифференциальная функция, таким образом, — это гладкая функция P: $M^{(n)}\to\mathbb{R}$ для некоторого (конечного) n. Если $m\geqslant n$, то $P(x,u^{(n)})$ можно также рассматривать как функцию на $M^{(m)}$, поскольку координаты $(x,u^{(n)})$ представляют собой часть координат $(x,u^{(m)})$ на $M^{(m)}$. Если нас не заботит, от какого точно числа производных от u зависит P, мы будем писать $P[u]=P(x, u^{(n)})$. Здесь квадратные скобки будут служить напоминанием, что P зависит от x, u и производных от u. Далее, мы определяем $\mathcal{A}^l$ как векторное пространство наборов из l дифференциальных функций $P[u]=(P_1[u], \ldots, P_l[u])$, где каждая P_j лежит в $\mathcal{A}$.

Заметим, что $\mathcal{A}$ — алгебра. Это означает, что мы можем складывать дифференциальные функции и перемножать их. Имеется также некоторое число основных дифференциальных операторов на $\mathcal{A}$, с которыми мы уже сталкивались. Операторы взятия частных производных $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial u^\alpha_J$ оба переводят дифференциальную функцию в другую дифференциальную функцию, но, вообще говоря, они не сохраняют порядок производных, от которых те зависят. Например, $P=u_{xxx}+xuu_x$ зависит от производных третьего порядка, но $\partial P/\partial u = xu_x$ зависит только от производных первого порядка. Аналогично, полные производные D_j: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ являются линейными отображениями, причем $D_jP[u]$ зависит от производных порядка $n+1$, если $P[u]=P(x, u^{(n)})$ зависит от производных порядка n. Два других важных оператора — это полная дивергенция $\mathbf{Div}$: $\mathcal{A}^p\to\mathcal{A}$ и оператор Эйлера $\mathbf{E}$: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}^q$, определенные в предыдущей главе.

Обобщенные векторные поля

Определение 5.1. *Обобщенное векторное поле* — это (формальное) выражение вида

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi^i[u]\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi_\alpha[u]\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{5.1}$$

в котором ξ^i и φ_α — гладкие дифференциальные функции.

Таким образом, например,

$$\mathbf{v}=xu_x\frac{\partial}{\partial x}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u}$$

— обобщенное векторное поле в случае $p=q=1$. Сейчас мы уклонимся от всякого обсуждения точного смысла этого объекта, а работать с такими обобщенными векторными полями будем так, как если бы это были обычные векторные поля. Таким образом, в согласии с формулой продолжения теоремы 2.36 мы можем определить *продолженное* обобщенное векторное поле

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}=\mathbf{v}+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\#J\leqslant n}\varphi_\alpha^J[u]\frac{\partial}{\partial u^\alpha_J},$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$\varphi_\alpha^J = D_J\left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha, \tag{5.2}$$

при тех же обозначениях, что и раньше. Таким образом, в нашем предыдущем примере

$$\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v} = xu_x \frac{\partial}{\partial x} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u} + [u_{xxx} - (xu_{xx} + u_x)u_x]\frac{\partial}{\partial u_x},$$

а коэффициент при $\partial/\partial u_x$ вычислен по формуле

$$D_x(u_{xx} - xu_x^2) + xu_x u_{xx} = D_x(u_{xx}) - D_x(xu_x)u_x.$$

Поскольку для коэффициентов всех продолжений обобщенного векторного поля имеется одно и то же общее выражение, полезно перейти к «бесконечному» продолжению и заботиться сразу обо *всех* производных. А именно для данного обобщенного векторного поля $\mathbf{v}$ его *бесконечное продолжение* (или, для краткости, *продолжение*) — это формальная бесконечная сумма

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J \varphi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \tag{5.3}$$

где каждая функция φ_α^J задается формулой (5.2), а суммирование в (5.3) теперь распространяется на *все* мультииндексы $J = (j_1, \ldots, j_k)$ для $k \geqslant 0$, $1 \leqslant j_\varkappa \leqslant p$. Заметим, что если $P[u] = P(x, u^{(n)})$ — произвольная дифференциальная функция, то $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}(P) = \mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}(P)$ — снова дифференциальная функция. В частности, поскольку P зависит лишь от конечного числа производных от u, для вычисления $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}(P)$ всегда требуется лишь конечное число слагаемых суммы (5.3). Поэтому вопрос о «сходимости» суммы (5.3) никогда не возникает.

Каково бы ни было геометрическое значение обобщенного векторного поля (этот вопрос мы изучим позже в этом параграфе), формальное условие того, что оно будет «инфинитезимальной симметрией» системы дифференциальных уравнений, очевидно.

Определение 5.2. Обобщенное векторное поле $\mathbf{v}$ является *обобщенной инфинитезимальной симметрией* системы дифференциальных уравнений

$$\Delta_\nu[u] = \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l,$$

если и только если

$$\operatorname{pr}\mathbf{v}[\Delta_\nu]=0, \quad \nu=1, \ldots, l, \tag{5.4}$$

для каждого гладкого решения $u=f(x)$.

Это прямая аналогия с критерием инфинитезимальной симметрии теорем 2.31 и 2.72. Согласно последнему результату, нам нужно сделать некоторые предположения о невырожденности системы Δ. Заметим, что в силу предыдущего обсуждения, если коэффициенты поля $\mathbf{v}$ зависят от производных от u порядка m, то левая часть формулы (5.4) будет, вообще говоря, зависеть от производных порядка $m+n$. Поэтому если мы собираемся потребовать, чтобы левая часть (5.4) обращалась в нуль на всех решениях системы, то мы должны наложить условия невырожденности не только на саму систему Δ, но также и на все ее продолжения $\Delta^{(k)}$, $k=0, 1, \ldots$. Чтобы избавиться от постоянного повторения этих предположений, мы во всей этой главе будем предполагать их выполненными.

Общее предположение. *Если не оговорено противное, все системы дифференциальных уравнений предполагаются вполне невырожденными в смысле определения* 2.83; *а именно и они, и все их продолжения имеют максимальный ранг и локально разрешимы.*

В частности, если Δ — нормальная аналитическая система, как обсуждалось в § 2.6, то она удовлетворяет этому предположению. В этом случае (5.4) справедливо для всех решений, если и только если существуют дифференциальные операторы $\mathscr{D}_{\nu\mu}=\sum P^J_{\nu\mu}D_J$, $P^J_{\nu\mu}\in\mathscr{A}$, такие, что

$$\operatorname{pr}\mathbf{v}(\Delta_\nu)=\sum_{\mu=1}^{l}\mathscr{D}_{\nu\mu}\Delta_\mu \tag{5.5}$$

для всех функций $u=f(x)$. (См. упр. 2.33.) Обе формулы (5.4) и (5.5) — полезные варианты основного инфинитезимального критерия для группы обобщенных симметрий.

Пример 5.3. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\Delta[u]=u_t-u_{xx}=0.$$

Обобщенное векторное поле $\mathbf{v}=u_x\partial_u$ имеет продолжение

$$\operatorname{pr}\mathbf{v}=u_x\frac{\partial}{\partial u}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}+u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t}+u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\ldots .$$

Таким образом,

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}(\Delta) = u_{xt} - u_{xxx} = D_x(u_t - u_{xx}) = D_x\Delta$$

и, следовательно, в соответствии с (5.5) $\mathbf{v}$ — обобщенная симметрия уравнения теплопроводности. Более общо, всякое обобщенное векторное поле вида $\mathbf{v} = \mathcal{D}[u]\partial_u$, где $\mathcal{D}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, как легко видеть, будет обобщенной симметрией уравнения теплопроводности.

Эволюционные векторные поля

Среди всех обобщенных векторных полей те, у которых коэффициенты $\xi^i[u]$ при $\partial/\partial x^i$ равны нулю, играют особую роль.

Определение 5.4. Пусть $Q[u] = (Q_1[u], \ldots, Q_q[u]) \in \mathcal{A}^q$ — набор из q дифференциальных функций. Обобщенное векторное поле

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha[u]\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

называется *эволюционным векторным полем*, а Q называется его *характеристикой*.

Заметим, что, согласно (5.2), продолжение эволюционного векторного поля принимает особенно простой вид

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha, J} D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \tag{5.6}$$

Всякое обобщенное векторное поле $\mathbf{v}$ вида (5.1) обладает соответствующим *эволюционным представителем* $\mathbf{v}_Q$, характеристика которого состоит из дифференциальных функций

$$Q_\alpha = \varphi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, q, \tag{5.7}$$

где $u_i^\alpha = \partial u^\alpha/\partial x^i$. Эти два обобщенных векторных поля в сущности определяют одну и ту же симметрию.

Предложение 5.5. *Обобщенное векторное поле* $\mathbf{v}$ *является симметрией системы дифференциальных уравнений, если и только если таковой является его эволюционный представитель* $\mathbf{v}_Q$.

Доказательство. В силу формулы продолжения (2.50)

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}\,[\Delta_\nu] = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q\,[\Delta_\nu] + \sum_{i=1}^{p} \xi^i D_i \Delta_\nu. \tag{5.8}$$

Вторая группа слагаемых обращается в нуль на всех решениях системы Δ, так что предложение легко следует из определения 5.2. □

Например, симметрия $u_x \partial_u$ уравнения теплопроводности в точности является эволюционным представителем образующей симметрии сдвига $-\partial_x$. Аналогично, эволюционным представителем галилеевой образующей $-2t\partial_x + xu\partial_u$ будет $(2tu_x + xu)\partial_u$. Это, как может проверить читатель, тоже симметрия уравнения теплопроводности.

Мы будем различать симметрии, обсуждавшиеся в гл. 2, и собственно обобщенные симметрии, называя первые *геометрическими симметриями*, поскольку они геометрически действуют на пространстве $X \times U$. (Другое подходящее название — *точечные преобразования.*) Согласно предыдущему примеру, каждая геометрическая симметрия имеет эволюционный представитель с характеристикой, зависящей от производных, самое большее, первого порядка. Однако не каждая такая эволюционная симметрия соответствует геометрической группе преобразований; ее характеристика должна иметь специальный вид (5.7), где ξ^i и φ_α зависят лишь от x и u.

Эквивалентность и тривиальные симметрии

Заметим, что если $\mathbf{v}_Q$ — эволюционное векторное поле и q-набор Q обращается в нуль на решениях системы Δ, то в силу (5.6) все коэффициенты продолжения $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q$ также обращаются в нуль на всех решениях. Поэтому $\mathbf{v}_Q$ автоматически является обобщенной симметрией системы Δ. Такие симметрии называются *тривиальными*, а нас в первую очередь интересуют нетривиальные симметрии системы. Обобщенная симметрия *тривиальна*, если тривиальна ее эволюционная форма. Две обобщенные симметрии $\mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{v}}$ называются *эквивалентными*, если их разность $\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}$ — тривиальная симметрия системы. Это вводит отношение эквивалентности на пространстве обобщенных симметрий данной системы; кроме того, мы будем классифицировать симметрии с точностью до эквивалентности, так что под *симметрией* системы мы на самом деле будем понимать целый класс эквивалентности обобщенных симметрий, отличающихся друг от друга на тривиальную симметрию. Например, в случае уравнения теплопроводности симметрия сдвига по времени ∂_t, ее эволюционная форма $-u_t\partial_u$ и обобщенная симметрия $-u_{xx}\partial_u$ эквивалентны и для всех практических целей определяют одну и ту же группу симметрий.

Пример 5.6. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t}=P_\alpha(t,\ u),\quad \alpha=1,\ \ldots,\ q. \tag{5.9}$$

Предположим, нас интересует отыскание обобщенных симметрий

$$\mathbf{v}=\tau(t,\ u,\ u_t,\ \ldots)\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi_\alpha(t,\ u,\ u_t,\ \ldots)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Мы упрощаем вычисление, заменяя $\mathbf{v}$ его эволюционным представителем.

$$\mathbf{v}_Q=\sum_{\alpha=1}^{q}Q_\alpha(t,\ u,\ u_t,\ \ldots)\frac{\partial}{\partial u^\alpha},\quad \text{где } Q_\alpha=\varphi_\alpha-\tau\frac{\partial u^\alpha}{\partial t}.$$

Кроме того, для решений $u=f(t)$ система (5.9) доставляет выражения для производных du^α/dt исключительно в терминах u и t. Дифференцирование (5.9) аналогичным образом приводит к выражениям для всех производных высших порядков d^ku^α/dt^k в терминах u и t. Ввиду понятия эквивалентности мы можем подставить эти выражения в Q, что приведет к эквивалентному векторному полю простого вида

$$\mathbf{w}=\sum_{\alpha=1}^{q}\tilde{Q}_\alpha(t,\ u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Иными словами, для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка всякая обобщенная симметрия всегда эквивалентна геометрической симметрии.

Вычисление обобщенных симметрий

В принципе вычисление обобщенных симметрий данной системы дифференциальных уравнений осуществляется таким же образом, как и вычисление геометрических симметрий. Однако отметим следующие особенности. Во-первых, нам нужно привести симметрию к эволюционному виду $\mathbf{v}_Q$ — это уменьшает число неизвестных функций с $p+q$ до q, причем одновременно упрощается вычисление продолжения $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q$. Затем нужно a priori фиксировать порядок производных, от которых может зависеть характеристика $Q(x, u^{(m)})$. Здесь возникает необходимость в компромиссе: чем от большего числа производных от u зависят Q, тем больше обобщенных симметрий можно найти, но, с другой стороны, тем дольше и утомительней решать получающиеся уравнения для симметрий. Конечно, при таком подходе нельзя надеяться найти все обобщенные симметрии. Однако, выбирая m не слишком большим, часто можно получить важную информацию об общем виде симметрий. Наконец, мы столкнемся с появлением тривиальных симметрий; самый легкий способ обходиться с ними — исключить лишние производные из Q с помощью подстановок, пользуясь продолжениями системы, как это делалось в предыдущем примере.

Пример 5.7. Рассмотрим простейшее нелинейное волновое уравнение

$$u_t = uu_x.$$

Предположим, что $\mathbf{v}_Q = Q\,[u]\,\partial_u$ — обобщенная симметрия в эволюционном виде. Заметим, что мы можем заменить любую производную от u по t, встречающуюся в Q, соответствующим выражением, содержащим только производные по x, не меняя класс эквивалентности $\mathbf{v}$. Например, u_t заменяется на uu_x, u_{xt} — на $uu_{xx} + u_x^2$, u_{tt} — на $u^2u_{xx} + 2uu_x^2$ и т. д. Таким образом, каждая симметрия единственным образом эквивалентна симметрии с характеристикой $Q = Q(x, t, u, u_x, u_{xx}, \ldots)$. Инфинитезимальное условие (5.4) инвариантности принимает тогда вид

$$D_tQ = uD_xQ + u_xQ, \tag{5.10}$$

и оно должно выполняться для всех решений. Чтобы вычислить симметрии второго порядка, мы требуем, чтобы Q имела вид $Q(x, t, u, u_x, u_{xx})$, так что (5.10) после подстановки вместо u_t соответствующего выражения и упрощения принимает вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - u\frac{\partial Q}{\partial x} + u_x^2\frac{\partial Q}{\partial u_x} + 3u_xu_{xx}\frac{\partial Q}{\partial u_{xx}} = u_xQ.$$

В силу метода характеристик, ср. (2.12), общий вид решения этого линейного уравнения с частными производными первого порядка — это

$$Q = u_xR\left(x + tu,\ u,\ t + \frac{1}{u_x},\ \frac{u_{xx}}{u_x^3}\right),$$

где R — произвольная функция от своих аргументов. Какие из этих обобщенных симметрий соответствуют геометрическим симметриям того типа, который обсуждался в гл. 2? Те из них, у которых характеристика Q имеет вид $Q=\varphi-u_x\xi-uu_x\tau$, где φ, ξ и τ зависят только от x, t и u. Соответствующая инфинитезимальная образующая имеет вид $\mathbf{v}=\xi\partial_x+\tau\partial_t+\varphi\partial_u$. Таким образом,

$$Q=u_x\psi(x+tu,\ u)+(tu_x+1)\varphi(x+tu,\ u)$$

при некотором ψ, причем $-\xi-u\tau=\psi+t\varphi$. Таким образом, имеется довольно мало свободы для вида ξ и τ; однако если $\xi+u\tau=0=\varphi$, то эволюционный вид поля $\mathbf{v}$ тривиален, $Q=0$, так что каждая геометрическая симметрия эквивалентна симметрии с $\tau=0$, т. е.

$$\mathbf{v}=-(\psi+t\varphi)\,\partial_x+\varphi\partial_u.$$

Если мы ограничим внимание проектируемыми группами симметрий, то можно показать, что эта подгруппа порождается следующими восьмью векторными полями:

$$\begin{array}{ll}\partial_x, & t\partial_x-\partial_u,\\ \partial_t, & x\partial_t+u^2\partial_u,\\ x\partial_x+t\partial_t, & xt\partial_x+t^2\partial_t-(x+tu)\,\partial_u,\\ x\partial_x+u\partial_u, & x^2\partial_x+xt\partial_t+(x+tu)\,u\partial_u.\end{array}$$

Предыдущий пример может дать читателю слишком оптимистическую оценку вычислительной сложности задачи вычисления обобщенных симметрий. На практике вычисление всех обобщенных симметрий данного порядка данной системы дифференциальных уравнений принципиально осуществимо, однако только при значительных затратах времени и вычислительной ловкости со стороны исследователя. Следующий пример, тоже относительно легкий, может дать хорошее представление о том, что здесь требуется [1]).

Пример 5.8. Здесь мы вычисляем все обобщенные симметрии третьего порядка уравнения Бюргерса, которое мы берем в проинтегрированном виде

$$u_t=u_{xx}+u_x^2. \tag{5.11}$$

Мы берем инфинитезимальную образующую в эволюционной форме $\mathbf{v}=Q\partial_u$, где Q предполагается зависящей от x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}. Условие симметрии (5.4) имеет вид

$$D_tQ=D_x^2Q+2u_xD_x^2Q. \tag{5.12}$$

---

[1]) В этих примерах уравнения сводятся к линейным точечным преобразованием, так что речь идет по существу о симметриях линейных уравнений. — *Прим. ред.*

Поскольку это единственное условие, которое должно выполняться на решениях, мы можем подставить в него вместо любой производной от u по t соответствующее выражение, пользуясь (5.11) и его продолжениями. Тщательно анализируя (5.12), мы можем выразить коэффициенты при различных производных от u последовательно по убыванию порядка. Коэффициенты при производной пятого порядка u_{xxxxx} сокращаются, поэтому мы переходим к членам, включающим u_{xxxx}. Из того, что только один член содержит u_{xxxx}^2, мы видим, что Q аффинна по u_{xxx}:

$$Q = \alpha(t)\, u_{xxx} + Q'(x,\ t,\ u,\ u_x,\ u_{xx}),$$

где α зависит только от t в силу структуры других членов с u_{xxxx}.

Переходя к членам, включающим производную третьего порядка u_{xxx}, находим:

$$6\alpha u_{xx}u_{xxx} + \alpha_t u_{xxx} = Q'_{u_{xx}u_{xx}} u_{xxx}^2 + 2Q'_{u_x u_{xx}} u_{xx}u_{xxx} + 2Q'_{uu_{xx}} u_x u_{xxx} + 2Q'_{xu_{xx}} u_{xxx}.$$

Таким образом, Q' аффинна по u_{xx}:

$$Q' = 3\alpha u_x u_{xx} + \left(\frac{1}{2}\alpha_t x + \beta\right) u_{xx} + Q''(x,\ t,\ u,\ u_x),$$

где $\beta = \beta(t)$ — функция одной переменной t. Коэффициент при u_{xx}^2 в (5.12) теперь имеет вид

$$6\alpha u_x + \alpha_t x + 2\beta = Q''_{u_x u_x},$$

следовательно,

$$Q = \alpha\left(u_{xxx} + 3u_x u_{xx} + u_x^3\right) + \left(\frac{1}{2}\alpha_t x + \beta\right)\left(u_{xx} + u_x^2\right) + A(x,\ t,\ u)\,u_x + B(x,\ t,\ u).$$

Все остальные члены, содержащие u_{xx}, — это

$$\left(3\alpha_t u_x + \frac{1}{2}\alpha_{tt}x + \beta_t\right) u_{xx} = (2A_u u_x + 3\alpha_t u_x + 2A_x)\, u_{xx}.$$

Таким образом, A не зависит от u и

$$A = \frac{1}{8}\alpha_{tt}x^2 + \frac{1}{2}\beta_t x + \gamma,$$

где $\gamma = \gamma(t)$ — еще одна функция от t. Из вида коэффициента при u_x^2 теперь следует, что

$$B(x,\ t,\ u) = \rho(x,\ t)\,e^{-u} + \sigma(x,\ t),$$

где ρ и σ еще нужно определить. Коэффициент при u_x имеет вид

$$\frac{1}{8}\alpha_{ttt}x^2+\frac{1}{2}\beta_{tt}x+\gamma_t=2\sigma_x+\frac{1}{4}\alpha_{tt},$$

поэтому

$$\sigma(x,\ t)=\frac{1}{48}\alpha_{ttt}x^3+\frac{1}{8}\beta_{tt}x^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_t-\frac{1}{8}\alpha_{tt}\right)x+\delta,$$

где $\delta=\delta(t)$. Остальные члены в (5.12), которые не содержат производных от u, — это в точности

$$\rho_t e^{-u}+\sigma_t=\rho_{xx}e^{-u}+\sigma_{xx}.$$

Таким образом, $\rho(x,\ t)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности $\rho_t=\rho_{xx}$, а пользуясь указанным видом σ, мы заключаем, что

$$\alpha_{tttt}=0,\quad \beta_{ttt}=0,\quad \gamma_{tt}=\frac{1}{2}\alpha_{ttt},\quad \delta_t=\frac{1}{4}\beta_{tt}.$$

Таким образом, α и β являются соответственно многочленами третьей и второй степени по t:

$$\alpha(t)=c_9t^3+c_8t^2+c_7t+c_6,\quad \beta(t)=c_5t^2+c_4t+c_3,$$

где $c_3,\ \ldots,\ c_9$ — произвольные постоянные, откуда

$$\gamma(t)=\frac{3}{2}c_9t^2+c_2t+c_1,\quad \delta(t)=\frac{1}{2}c_5t+c_0,$$

где $c_0,\ c_1,\ c_2$ — константы.

Собирая вместе всю полученную информацию, мы заключаем, что каждая обобщенная симметрия третьего порядка для уравнения Бюргерса (5.11) имеет в качестве характеристики Q линейную комбинацию с постоянными коэффициентами следующих десяти «базисных» характеристик:

$$\begin{aligned}
&Q_0=1,\\
&Q_1=u_x,\\
&Q_2=tu_x+\frac{1}{2}x,\\
&Q_3=u_{xx}+u_x^2,\\
&Q_4=t(u_{xx}+u_x^2)+\frac{1}{2}xu_x,\\
&Q_5=t^2(u_{xx}+u_x^2)+txu_x+\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}x^2\right),\\
&Q_6=u_{xxx}+3u_xu_{xx}+u_x^3,\\
&Q_7=t(u_{xxx}+3u_xu_{xx}+u_x^3)+\frac{1}{2}x(u_{xx}+u_x^2),
\end{aligned}\tag{5.13}$$

$$Q_8 = t^2(u_{xxx} + 3u_x u_{xx} + u_x^3) + tx(u_{xx} + u_x^2) + \\ + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}x^2\right)u_x,$$

$$Q_9 = t^3(u_{xxx} + 3u_x u_{xx} + u_x^3) + \frac{3}{2}t^2 x(u_{xx} + u_x^2) + \\ + \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}tx^2\right)u_x + \left(\frac{3}{4}tx + \frac{1}{8}x^3\right)$$

плюс бесконечное семейство характеристик

$$Q_\rho = \rho(x, t)e^{-u},$$

где ρ — произвольное решение уравнения теплопроводности. Из этих характеристик первые шесть $Q_0, \ldots, Q_5$ и характеристики Q_ρ отвечают геометрическим симметриям, вычисленным в примере 2.42. Например, характеристика Q_4 эквивалентна характеристике

$$\tilde{Q}_4 = tu_t + \frac{1}{2}xu_x,$$

соответствующей векторному полю

$$\mathbf{v}_4 = -\frac{1}{2}x\partial_x - t\partial_t,$$

порождающему группу симметрий растяжения. Вообще характеристики $Q_0, \ldots, Q_5, Q_\rho$ эквивалентны характеристикам полей $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_\rho$ в (2.60) соответственно (во всяком случае, с точностью до знака).

Можно было бы продолжать таким образом вычислять обобщенные симметрии все более и более высоких порядков, но соответствующие вычисления растут все быстрее и быстрее. Читатель может попытаться найти характеристики четвертого порядка $Q = Q(x, t, u, \ldots, u_{xxxx})$, чтобы почувствовать это явление. В § 5.2 мы откроем более систематические средства нахождения этих симметрий.

Групповые преобразования

Какая группа преобразований соответствует обобщенному векторному полю? Если $\mathbf{v}$ — собственно обобщенное векторное поле, то его однопараметрическая группа $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ не может больше геометрически действовать на область $M \subset X \times U$, поскольку коэффициенты поля $\mathbf{v}$ зависят от производных от u, которые также преобразуются. Не можем мы определить и продолжение действия группы ни на каком конечном пространстве струй $M^{(n)}$, поскольку коэффициенты в $\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}$ будут зависеть от производных от u еще более высокого порядка, чем те, что присутствуют в $M^{(n)}$. Самый легкий способ разрешить эту дилемму — определить действие группы $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ на пространстве гладких функций следующим образом [1]). Заменим сначала $\mathbf{v}$ его эволюционным представителем $\mathbf{v}_Q$, как выше, и рассмотрим систему эволюционных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}=Q(x,\ u^{(m)}), \tag{5.14}$$

где Q — характеристика поля $\mathbf{v}$. Решение (если оно существует) задачи Коши $u(x,\ 0)=f(x)$ определит действие группы:

$$[\exp(\varepsilon\mathbf{v}_Q)f](x)\equiv u(x,\ \varepsilon).$$

Здесь мы вынуждены предполагать, что решение этой задачи Коши определено единственным образом, если начальное значение $f(x)$ выбрано в некотором подходящем пространстве функций, по меньшей мере для достаточно малых ε. В результате мы получим поток $\exp(\varepsilon\mathbf{v}_Q)$ на данном функциональном пространстве. Конечно, проверка этого предположения приводит к некоторым очень трудным проблемам существования и единственности решений систем эволюционных уравнений, которые лежат далеко за рамками этой книги. Оставив в стороне решение этих проблем, мы получим результаты, которые, хотя и несколько формальны по своей природе, тем не менее будут иметь прямые практические приложения.

Пример 5.9. Пусть $p=2$, $q=1$ и введены координаты $(x,\ y,\ u)$. Рассмотрим группу сдвигов G, порожденную полем $\mathbf{v}=\partial_x$. Индуцированное действие группы G на функции $u=f(x,\ y)$, как определено в § 2.2, имеет вид

$$[\exp(\varepsilon\mathbf{v})f](x,\ y)=f(x-\varepsilon,\ y).$$

Эволюционная форма поля $\mathbf{v}$ — обобщенное векторное поле $\mathbf{v}_0=-u_x\partial_u$. Соответствующая однопараметрическая группа определяется решением задачи Коши

$$\partial u/\partial\varepsilon=-u_x,\quad u(x,\ y,\ 0)=f(x,\ y).$$

Решение имеет вид

$$[\exp(\varepsilon\mathbf{v}_0)f](x,\ y)=u(x,\ y,\ \varepsilon)=f(x-\varepsilon,\ y).$$

Таким образом, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$ порождают одно и то же действие, и в этом смысле они являются эквивалентными векторными полями.

[1]) См. также упр. 5.8, где указан другой способ.

Теорема 5.10. *Эволюционное векторное поле* $\mathbf{v}=\mathbf{v}_Q$ *является симметрией системы дифференциальных уравнений* Δ, *если и только если соответствующая группа* $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ *преобразует решения системы в другие ее решения.*

Замечание. Эта теорема, конечно, подчиняется различным техническим предположениям, а именно

(1) Δ — вполне невырожденная система, как в нашем общем предположении.

(2) Система эволюционных уравнений, соответствующая полю $\mathbf{v}$, разрешима единственным образом в некотором пространстве функций, содержащем все (локальные) решения системы Δ.

(3) Система линейных уравнений (5.15), появляющаяся в доказательстве, однозначно разрешима.

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon=\exp(\varepsilon\mathbf{v})f$. (N. B. Нижний индекс ε *не* обозначает производную.) Если u_ε — параметризованное семейство решений, то

$$0=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Delta_\nu\left(x,\ u_\varepsilon^{(n)}\right)=\sum_{\alpha,J}D_JQ_\alpha\left(x,\ u_\varepsilon^{(n)}\right)\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha}\left(x,\ u_\varepsilon^{(n)}\right)=$$
$$=\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q\left[\Delta_\nu\left(x,\ u_\varepsilon^{(n)}\right)\right].$$

Подстановка $\varepsilon=0$ дает условие (5.4). Обратно, пусть выполняется условие (5.5). Предположим, что для достаточно малых ε единственное решение $v=(v^1,\ \ldots,\ v^l)$ системы эволюционных уравнений

$$\frac{\partial v^\nu}{\partial\varepsilon}=\sum_\mu\mathscr{D}_{\nu\mu}v^\mu=\sum_{\mu,J}P_{\nu\mu}^J\left(x,\ u_\varepsilon^{(m)}(x)\right)v_J^\mu,\quad \nu=1,\ \ldots,\ l,\tag{5.15}$$

с нулевыми начальными условиями $v(x,\ 0)\equiv 0$ — нулевое решение $v(x,\varepsilon)\equiv 0$. Тогда (5.5) и предыдущее вычисление устанавливают, что если $u=f(x)$ — решение системы Δ, то $v^\nu(x,\ \varepsilon)=$ $=\Delta_\nu\left(x,\ u_\varepsilon^{(n)}\right)$ удовлетворяет этой задаче с начальными условиями и, следовательно, $\Delta_\nu\left(x,\ u_\varepsilon^{(n)}\right)=0$ для всех ε. А это и доказывает, что u_ε — решение. □

Если $P[u]$ — произвольная дифференциальная функция, а $u(x,\ \varepsilon)$ — гладкое решение системы (5.14), то нетрудно видеть, что

$$\frac{d}{d\varepsilon}P[u]=\sum_{\alpha,J}D_JQ_\alpha[u]\frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha}=\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P).$$

Иными словами, $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P)$ определяет инфинитезимальное изменение P под действием однопараметрической группы, порожденной полем $\mathbf{v}_Q$:

$$P[\exp(\varepsilon\mathbf{v}_Q)f] = P[f] + \varepsilon\,\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P)[f] + O(\varepsilon^2). \tag{5.16}$$

Как и в (1.18), мы можем продолжить разложение по степеням ε, что приводит к ряду Ли

$$P[\exp(\varepsilon\mathbf{v}_Q)f] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q)^n P[f]. \tag{5.17}$$

(Здесь $(\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q)^2(P) = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q[\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P)]$ и т. д.) В частности, если $P[u] = u$, то (5.17) дает (формальный) ряд Ли — решение эволюционной системы (5.14). (Мы не будем пытаться исследовать, сходится ли на самом деле ряд (5.17); см. следующий пример.)

Пример 5.11. Пусть $p = q = 1$. Рассмотрим обобщенное векторное поле $\mathbf{v} = u_{xx}\partial_u$. Соответствующая однопараметрическая группа получится решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial\varepsilon} = u_{xx}, \quad u(x,\ 0) = f(x). \tag{5.18}$$

Решение имеет вид $u(x,\ \varepsilon) = \exp(\varepsilon\mathbf{v})f(x)$. Таким образом, экспоненциирование обобщенного векторного поля $\mathbf{v} = u_{xx}\partial_u$ эквивалентно решению уравнения теплопроводности!

Любому читателю, знакомому с этой задачей, сразу же станут видны некоторые трудности. Во-первых, при $\varepsilon < 0$ мы имеем дело с «обратным уравнением теплопроводности», которое является классической некорректной задачей и может даже не иметь решений. Таким образом, мы можем лишь надеяться получить «полугруппу» преобразований, порожденную полем $\mathbf{v}$. Во-вторых, как показывает пример, принадлежащий А. Н. Тихонову, если не накладывать некоторых условий на рост решения, то оно, вообще говоря, *не* будет единственным. Далее, если $P[u] = u$ в (5.17), то мы получаем решение (5.18) в виде (формального) ряда

$$u(x,\ \varepsilon) = f(x) + \varepsilon\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \dots.$$

Однако, как показала С. В. Ковалевская, даже если функция f аналитическая, этот ряд для u может не сходиться. На самом деле он будет сходиться, только если f — целая аналитическая функция, удовлетворяющая условию роста $|f(x)| \leqslant C\exp(Kx^2)$ для некоторых положительных постоянных C, K. (Это те самые условия роста, которые нужны, чтобы обеспечить единственность решений.) Этот пример дает ясное представление о трудностях, связанных со строгим осуществлением экспоненцирования обобщенных векторных полей.

Симметрии и продолжения

Связь между обобщенными симметриями систем дифференциальных уравнений и их продолжениями основана на одной важной характеризации эволюционных векторных полей. Она состоит в следующем: кроме тривиальных полей сдвигов $\partial/\partial x^i$ эволюционные векторные поля единственным образом определяются тем фактом, что они коммутируют с операциями полного дифференцирования.

Лемма 5.12. *Если* $\mathbf{v}_Q$ *— эволюционное векторное поле, то*

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q[D_iP] = D_i[\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P)], \quad i = 1, \ldots, p, \tag{5.19}$$

для всех $P \in \mathcal{A}$. *Обратно, для данного векторного поля*

$$\mathbf{v}^* = \sum_{k=1}^{p} \xi^k[u]\frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J \varphi_\alpha^J[u]\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}$$

при некоторых ξ^i, $\varphi_\alpha^J \in \mathcal{A}$ *мы имеем* $[\mathbf{v}^*, D_i] = 0$ *при* $i = 1, \ldots$ *…, p, если и только если*

$$\mathbf{v}^* = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^{p} c_i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

для некоторых $Q \in \mathcal{A}^q$, $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Заметим сначала, что имеет место соотношение коммутирования

$$\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}(D_iP) = D_i\left(\frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha}\right) + \frac{\partial P}{\partial u_{J\setminus i}^\alpha}, \tag{5.20}$$

где $J\setminus i$ получается удалением одного i из мультииндекса J. (Если i не встречается в J, то этот член считается равным нулю.) Отсюда следует, что

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q[D_iP] = \sum_{\alpha, J} D_JQ_\alpha\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}[D_iP] =$$
$$= \sum_{\alpha, J} D_JQ_\alpha\cdot D_i\left(\frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha}\right) + \sum_{\alpha, J} D_JQ_\alpha\frac{\partial P}{\partial u_{J\setminus i}^\alpha}.$$

Переобозначая $J \setminus i$ через J во второй сумме (так что J превращается в J, i), мы получаем, как легко видеть, что это равно

$$D_i [\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q (P)] = \sum_{\alpha, J} D_J Q_\alpha \cdot D_i \left(\frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha} \right) + \sum_{\alpha, J} D_i D_J Q_\alpha \cdot \frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha}.$$

Докажем обратное утверждение. В силу (5.20) имеем

$$D_i \cdot \mathbf{v}^* - \mathbf{v}^* \cdot D_i = \sum_{k=1}^{p} D_i \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{J, \alpha} (D_i \varphi_\alpha^J - \varphi_\alpha^{J, i}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}.$$

Это выражение обращается в нуль, если и только если $D_i \xi^k = 0$ для всех i, k и $\varphi_\alpha^{J, i} = D_i \varphi_\alpha^J$ для всех i, J, α. Таким образом, каждая ξ^k обязательно является константой и по индукции $\varphi_\alpha^J = D_J Q_\alpha$, где $Q_\alpha = \varphi_\alpha^0$ — коэффициент при ∂_{u^α}.

Теорема 5.13. *Если $\mathbf{v}_Q$ — симметрия системы Δ, то это также симметрия любого продолжения $\Delta^{(k)}$.*

Доказательство. Все уравнения в $\Delta^{(k)}$ имеют вид $D_J \Delta_\nu = 0$. По лемме 5.12

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q (D_J \Delta_\nu) = D_J (\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q (\Delta_\nu)) = 0,$$

если u — решение, поскольку $\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q (\Delta_\nu)$ по предположению обращается в нуль на решениях. □

Скобка Ли

Как и для обычных векторных полей, для обобщенных векторных полей имеется скобка Ли. Она должна определяться продолжением этих векторных полей, поскольку в их коэффициенты входят производные от u. Как и в случае обычной скобки Ли, легче всего определить ее как коммутатор, но можно также определить ее с помощью соответствующих однопараметрических групп. (См. упр. 5.7.)

Определение 5.14. Пусть $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — обобщенные векторные поля. Их *скобка Ли* $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ — это единственное обобщенное векторное поле, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{pr} [\mathbf{v}, \mathbf{w}] (P) = \operatorname{pr} \mathbf{v} [\operatorname{pr} \mathbf{w} (P)] - \operatorname{pr} \mathbf{w} [\operatorname{pr} \mathbf{v} (P)] \tag{5.21}$$

для всех дифференциальных функций $P \in \mathcal{A}$.

Здесь имеется небольшая сложность, состоящая в том, что не ясно, является ли в самом деле правая часть равенства (5.21) продолжением некоторого обобщенного векторного поля. Однако это следует из явной формулы для скобки Ли.

Предложение 5.15. (a) *Пусть* $\mathbf{v}_Q$ *и* $\mathbf{v}_R$ — *эволюционные векторные поля. Тогда их скобка Ли* $[\mathbf{v}_Q, \mathbf{v}_R] = \mathbf{v}_S$ *также является эволюционным векторным полем с характеристикой*

$$S = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(R) - \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_R(Q). \tag{5.22}$$

(*В* (5.22) $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q$ *действует на* $R \in \mathcal{A}^q$ *покомпонентно с элементами* $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(R_k)$; Q *и* R *можно поменять местами.*)

(b) *Более общо, если*

$$\mathbf{v} = \sum_i \xi^i[u]\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha \varphi_\alpha[u]\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

$$\mathbf{w} = \sum_i \eta^i[u]\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha \psi_\alpha[u]\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

то

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \sum_{i=1}^p \{\mathrm{pr}\,\mathbf{v}(\eta^i) - \mathrm{pr}\,\mathbf{w}(\xi^i)\}\frac{\partial}{\partial x^i} + \\ + \sum_{\alpha=1}^q \{\mathrm{pr}\,\mathbf{v}(\psi_\alpha) - \mathrm{pr}\,\mathbf{w}(\varphi_\alpha)\}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{5.23}$$

Кроме того, если характеристика поля $\mathbf{v}$ *обозначена через* Q, *а характеристика поля* $\mathbf{w}$ — *через* R, *то* $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ *имеет характеристику* S, *заданную формулой* (5.22).

Доказательство. В основной формуле (5.21) при $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}_R$ коэффициент при $\partial/\partial u^\alpha$ в $\mathrm{pr}[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$, очевидно, дается α-й компонентой S_α из (5.22). Таким образом, для доказательства части (a) достаточно показать, что $[\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q, \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_R]$ — эволюционное векторное поле. Отсюда обязательно будет следовать, что оно совпадает с $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_S$. Это немедленно вытекает из леммы 5.12, поскольку раз и $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q$, и $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_R$ коммутируют со всеми полными производными, то то же верно и для их коммутатора, не содержащего членов, включающих $\partial/\partial x^i$, ни для какого i. Это доказывает ч. (a). Часть (b) следует из формулы продолжения (5.8), и мы оставляем ее читателю. □

Например, если $\mathbf{v} = uu_x\partial_u$, $\mathbf{w} = u_{xx}\partial_u$, то

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathrm{pr}\,\mathbf{v}(u_{xx}) - \mathrm{pr}\,\mathbf{w}(uu_x))\,\partial_u = 2u_xu_{xx}\partial_u.$$

Предложение 5.16. *Скобка Ли обобщенных векторных полей обладает обычными свойствами:*

(a) билинейность:

$$[c\mathbf{u}+c'\mathbf{v},\ \mathbf{w}]=c[\mathbf{u},\ \mathbf{w}]+c'[\mathbf{v},\ \mathbf{w}],\quad c,\ c'\in\mathbb{R};$$

(b) кососимметричность:

$$[\mathbf{v},\ \mathbf{w}]=-[\mathbf{w},\ \mathbf{v}];$$

(c) тождество Якоби:

$$[\mathbf{u},\ [\mathbf{v},\ \mathbf{w}]]+[\mathbf{w},\ [\mathbf{u},\ \mathbf{v}]]+[\mathbf{v},\ [\mathbf{w},\ \mathbf{u}]]=0$$

для произвольных обобщенных векторных полей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

В самом деле, эти свойства, очевидно, выполняются, когда мы заменяем каждое векторное поле его продолжением, а этого достаточно для доказательства их справедливости. Коммутаторное определение (5.21) скобки Ли немедленно влечет за собой

Предложение 5.17. *Множество обобщенных симметрий невырожденной системы дифференциальных уравнений образует алгебру Ли.*

Пример 5.18. В определенных случаях этот результат может быть использован для построения новых обобщенных симметрий по уже известным. Например, рассмотрим список симметрий (5.13) «проинтегрированного» уравнения Бюргерса. Обозначая через $\mathbf{v}_i$ симметрию с характеристикой Q_i, мы заключаем, что $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ является симметрией с характеристикой $\operatorname{pr}\mathbf{v}_i(Q_j)-\operatorname{pr}\mathbf{v}_j(Q_i)$ для любых i, j. Например,

$$\operatorname{pr}\mathbf{v}_6(Q_7)-\operatorname{pr}\mathbf{v}_7(Q_6)=-\frac{3}{2}\left(u_{xxxx}+4u_xu_{xxx}+3u_{xx}^2+6u_x^2u_{xx}+u_x^4\right)$$

дает характеристику Q_{10} *новой* симметрии четвертого порядка $\mathbf{v}_{10}\equiv(-2/3)[\mathbf{v}_6,\ \mathbf{v}_7]$ уравнения Бюргерса. Этот процесс можно продолжать неограниченно, так что $[\mathbf{v}_7,\ \mathbf{v}_{10}]$ будет симметрией пятого порядка и т. д. Поэтому уравнение Бюргерса обладает бесконечным набором обобщенных симметрий, зависящих от производных от u все более и более высокого порядка. (Дальнейшую информацию см. в примере 5.31.)

Эволюционные уравнения

Рассмотрим систему эволюционных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P[u], \tag{5.24}$$

где $P[u] = P(x, u^{(n)}) \in \mathcal{A}^q$ зависит от $x \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^q$ и производных от u только по x. Мы видим, что всякая эволюционная симметрия должна быть эквивалентна симметрии, характеристика $Q[u] = Q(x, t, u^{(m)})$ которой зависит лишь от x, t, u и производных от u по x (в силу подстановок, задаваемых уравнениями (5.24) и их производными). С другой стороны, сами уравнения (5.24) можно представлять себе как уравнения потока $\exp(t\mathbf{v}_P)$ эволюционного векторного поля с характеристикой P. Критерий симметрии (5.4), который в этом случае имеет вид

$$D_t Q_\nu = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, q, \tag{5.25}$$

как легко видеть, эквивалентен следующему условию на скобку Ли двух обобщенных векторных полей, обобщающему соответствие между симметриями систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и скобкой Ли соответствующих векторных полей.

Предложение 5.19. *Эволюционное векторное поле $\mathbf{v}_Q$ является симметрией системы эволюционных уравнений $u_t = P[u]$, если и только если*

$$\frac{\partial \mathbf{v}_Q}{\partial t} + [\mathbf{v}_P, \mathbf{v}_Q] = 0 \tag{5.26}$$

тождественно по $(x, t, u^{(m)})$. (Здесь $\partial\mathbf{v}_Q/\partial t$ обозначает эволюционное векторное поле с характеристикой $\partial Q/\partial t$.)

Доказательство. Заметим, что, согласно виду продолжения системы эволюционных уравнений, производная $u^\alpha_{J,t} = \partial u^\alpha_J/\partial t$ эволюционирует в соответствии с формулой $u^\alpha_{J,t} = D_J P_\alpha[u]$. Пользуясь этим и формулой для полной производной, легко видеть, что на решениях

$$D_t Q_\nu = \frac{\partial Q_\nu}{\partial t} + \sum_{\alpha, J} u^\alpha_{J,t} \frac{\partial Q_\nu}{\partial u^\alpha_J} = \frac{\partial Q_\nu}{\partial t} + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_P(Q_\nu),$$

поскольку Q_ν зависит лишь от производных от u по x. Таким образом, (5.25) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_P(Q) = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P),$$

которое должно выполняться тождественно по x, t и u, поскольку в нем уже не присутствуют производные от u по t. Его эквивалентность условию (5.26) легко следует из формулы (5.22) для скобки Ли. □

В частности, если $Q[u] = Q(x, u^{(m)})$ не зависит явно от t, то (5.26) сводится к условию, что векторные поля $\mathbf{v}_P$ и $\mathbf{v}_Q$ коммутируют:

$$[\mathbf{v}_P, \mathbf{v}_Q] = 0. \tag{5.27}$$

Нетрудно показать, что при определенных предположениях относительно существования и единственности это условие эквивалентно условию, что коммутируют соответствующие однопараметрические группы симметрий:

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v}_P)\exp(\tilde{\varepsilon}\mathbf{v}_Q)f = \exp(\tilde{\varepsilon}\mathbf{v}_Q)\exp(\varepsilon\mathbf{v}_P)f \tag{5.28}$$

там, где они определены. (См. упр. 5.7.) Следовательно, мы имеем взаимосвязь, состоящую в том, что если P, $Q \in \mathscr{A}^q$ зависят лишь от x, u и производных от u по x, то векторное поле $\mathbf{v}_Q$ является обобщенной симметрией системы $u_t = P$ тогда и только тогда, когда векторное поле $\mathbf{v}_P$ является обобщенной симметрией системы $u_t = Q$. В частности, для рассмотренного выше P само векторное поле $\mathbf{v}_P$ всегда является симметрией системы $u_t = P[u]$. В самом деле, поле $\mathbf{v}_P$ эквивалентно эволюционной форме группы симметрий сдвигов по времени, порожденной полем ∂_t, проистекающей из «автономности» эволюционного уравнения. Читатель может попробовать перепроверить условие симметрии (5.26) для симметрий уравнения Бюргерса, найденных в примере 5.8.

Алгебра коммутирующих «бесконечных» векторных полей (5.27) интенсивно изучалась при $p = q = 1$ в связи с теорией солитонов. Полученные в последние годы результаты носят в некотором смысле законченный характер, и мы попытаемся кратко обрисовать современное положение дел. Отметим сначала, что любое линейное эволюционное уравнение

$$\partial u/\partial t = P(x, D_x)u = a_n(x)D_x^n u + \ldots + a_0(x)u \tag{5.29}$$

обладает бесконечным набором симметрий с характеристиками $Q_j[x, t] = (P(x, D_x))^k(u)$, $k = 1, 2, \ldots$, в силу следующего утверждения.

Предложение 5.20. *Линейная дифференциальная функция $Q(x, D_x)u$ является характеристикой симметрии линейного эволюционного уравнения (5.29) в том и только том случае, если дифференциальный оператор $Q(x, D_x)$ коммутирует с $P(x, D_x)$.*

Доказательство. Инфинитезимальным критерием коммутирования потоков, определяемых эволюционными уравнениями $\partial u/\partial t = P(x, D_x)u$, $\partial u/\partial \tau = Q(x, D_x)u$, является условие равенства смешанных производных:

$$\partial/\partial\tau\,[P(x,\ D_x)\,u] = P(x,\ D_x)\,\partial u/\partial\tau = P(x,\ D_x)\,Q(x,\ D_x)u =$$
$$= \partial/\partial\tau\,[Q(x,\ D_x)\,u] = Q(x,\ D_x)\,\partial u/\partial\tau = Q(x,\ D_x)\,P(x,\ D_x)\,u.$$

Так как это соотношение должно выполняться тождественно по переменным $(x, u^{(m)})$ (см. предложение 5.19), то дифференциальные операторы должны коммутировать. □

Рассмотрим в качестве примера эволюционное уравнение

$$\partial u/\partial\tau = P(x,\ D_x)\,u = u_{xx} - 2x^{-2}u. \tag{5.30}$$

Коммутатор

$$[D_x^2 + a(x),\ D_x^3 + b(x)\,D_x + c(x)] =$$
$$= (2b' - 3a')\,D_x^2 + (2c' + b'' - 3a'')\,D_x + c'' - a''' - ba'$$

равен 0 при $b = (3/2)\,a$, $c = (3/4)\,a'$, $a = -2/x^2$, и, таким образом, рассматриваемое уравнение обладает симметрией с характеристикой $Q(x, D_x)\,u$, где Q — оператор третьего порядка. Ясно, что дифференциальные операторы $R = P^jQ^k$ также коммутируют с P при любых j, k. Поэтому в рассматриваемом примере существуют симметрии с характеристикой $R(x, D_x)\,u$, где R — оператор любого порядка 2, 3, 4, 5, ...

Хорошо проработанная теория коммутирующих линейных дифференциальных операторов служит ориентиром в существенно более сложном нелинейном случае. Прежде всего, договоримся обозначать через $u_n = \partial^n u/\partial x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, пространственные производные единственной зависимой функции $u(x, t)$.

Рассмотрим эволюционное уравнение порядка $n \geqslant 2$

$$\partial u/\partial t = P(x,\ u,\ u_1,\ \ldots,\ u_n),\quad n \geqslant 2, \tag{5.31}$$

инвариантное относительно сдвигов по t. Подстановка в (5.31) $u(x, t) + \varepsilon\omega(x, t)$ вместо $u(x, t)$ приводит в пределе $\varepsilon \to 0$ к линеаризованному уравнению

$$\partial\omega/\partial t = \sum_{k=0}^{n} \partial P/\partial u_k D_x^k \omega. \tag{5.32}$$

Пусть $Q(x, t, u, \ldots, u_m)$ — характеристика симметрии (5.30). Тогда линеаризация уравнения $\partial u/\partial\tau = Q$ приводит к совместному с (5.32) уравнению

$$\partial\omega/\partial\tau = \sum_{k=0}^{m} \partial Q/\partial u_k D_x^k \omega.$$

Приравняв смешанные производные, так же, как в доказательстве предложения 5.20, получим [1])

$$\left[D_t-\sum_{k=0}^{n}\partial P/\partial u_k D_x^k,\ D_\tau-\sum_{k=0}^{m}\partial Q/\partial u_k D_x^k\right]=0$$

или, что то же самое,

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\partial P/\partial u_k D_x^k,\ \sum_{k=0}^{m}\partial Q/\partial u_k D_x^k\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}D_t(\partial Q/\partial u_k)D_x^k-\sum_{k=0}^{n}D_\tau(\partial P/\partial u_k)D_x^k. \tag{5.33}$$

Здесь $D_t=\partial/\partial t+\operatorname{pr}\mathbf{v}_P$ и $D_\tau=\operatorname{pr}\mathbf{v}_Q$ — полные дифференцирования по t и τ соответственно. Ясно, что в линейном случае, рассмотренном в предложении 5.20, правая часть (5.33) обращается в нуль. Однако пример с $Q=1$ свидетельствует, что в нелинейном случае может нарушаться эквивалентность (5.33) и (5.26).

Можно доказать, что дифференциальные операторы, указанные в левой части (5.33), устроены почти так же, как коммутирующие дифференциальные операторы. Будем называть *порядком* симметрии старший порядок m производных, входящих в характеристику $Q(x,t,u,\ldots,u_m)$.

Лемма 5.21. *Пусть $Q(x,t,u,\ldots,u_m)$ — характеристика симметрии порядка $m\geqslant 2$ эволюционного уравнения* (5.31). *Тогда*

$$(\partial Q/\partial u_m)^{1/m}=c(t)(\partial P/\partial u_n)^{1/n}. \tag{5.34}$$

Доказательство. Из формулы

$$[D_x^k, a]=D_x^k a-aD_x^k=kD_x(a)D_x^{k-1}+\ldots,$$

где многоточием обозначены члены меньшего порядка, получаем, что наивысшая степень D_x в левой части (5.33) появляется в виде

$$[n\partial P/\partial u_n D_x(\partial Q/\partial u_m)-m\partial Q/\partial u_m D_x(\partial P/\partial u_n)]\,D_x^{n+m-1}.$$

По условию $n, m\geqslant 2$ и, следовательно, $n+m-1>\max(m,n)$. Таким образом, из (5.33) следует, что указанное выражение равно нулю. Это равносильно формуле (5.34). □

---

[1]) Это операторное соотношение можно вывести также из (5.26), используя свойства производной Фреше из § 5.2.

Условие на порядок симметрии $m \geqslant 2$ в лемме существенно, так как $Q = u_1$ является решением (5.26) для любого уравнения (5.31), правая часть которого не зависит явно от x. При этом $\partial Q/\partial u_1 = 1$, а $\partial P/\partial u_n$ не обязана быть постоянной. Таким образом, симметрии нулевого и первого порядков не подпадают под действие леммы 5.21. Читатель легко проверит, что множество векторных полей с характеристикой $Q = Q(x, u, u_1)$ образует алгебру Ли. Соответствующие группы преобразований включают в себя, вообще говоря, не только точечные, но и контактные преобразования.

Обозначим через S_j множество симметрий порядка не выше j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, уравнения (5.31), характеристики которых не зависят явно от t. Рассмотрим вопрос о строении алгебры Ли $S = \bigcup S_j$. Первое впечатление, что алгебра S_1 классических симметрий является идеалом алгебры S, оказывается, как показывает следующий пример, ошибочным.

Пример 5.22. Рассмотрим разновидность уравнения Бюргерса[1])

$$\partial u/\partial t = u^2 u_2 + 2u^2. \tag{5.35}$$

Можно проверить, что это уравнение обладает бесконечным набором симметрий с характеристиками

$$Q_j = u^2 D^2 (uD + x)^j (x), \quad j = 1, 2, 3, \ldots .$$

Хотя само уравнение (5.35) инвариантно относительно сдвигов по x, это свойство нарушается для его симметрий, и при $j = 2$ мы получаем по указанной формуле

$$Q_1 = u^3 u_3 + 3u^2 u_1 u_2 + 6u^2 u_1 + 3x (u^2 u_2 + 2u^2).$$

Теперь ясно, что $u_1 \partial/\partial u \in S_1$ и что $[S, S_1]$ не содержится в S_1.

Простейший нелинейный аналог теоремы о коммутирующих линейных дифференциальных операторах формулируется следующим образом:

Теорема 5.23. *Для любого уравнения* (5.31) $[S_m, S_m] \subset S_{m-1}$ при $m \geqslant 2$, *и следовательно, алгебра Ли* S_m *разрешима при любом* m, *если разрешима алгебра* S_1 *классических симметрий.*

Приведенные ниже рассуждения нетрудно превратить в строгое доказательство, если привлечь известную теорию коммутативных колец дифференциальных операторов. Проверим сна-

---

[1]) Рассматриваемое уравнение сводится к уравнению Бюргерса аналогично тому, как уравнение Бюргерса сводится к линейному. При этом используется преобразование годографа.

чала, что множество S_m образует алгебру Ли. Пусть $f(x, u, \ldots, u_i)$, $g(x, u, \ldots, u_j)$ — произвольные дифференциальные функции. Из определения скобки $\mathbf{v}_h = [\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_g]$ следует (см. (5.22), (5.33)), что

$$\sum_{k=0}^{s} \partial h/\partial u_k D_x^k + \left[\sum_{k=0}^{i} \partial f/\partial u_k D_x^k, \ \sum_{k=0}^{j} \partial g/\partial u_k D_x^k \right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{j} \mathbf{v}_f (\partial g/\partial u_k) D_x^k - \sum_{k=0}^{i} \mathbf{v}_g (\partial f/\partial u_k) D_x^k.$$

Таким образом, вообще говоря, $s = i + j - 1$, причем (см. доказательство леммы 5.21)

$$\partial u/\partial u_s = i (\partial f/\partial u_i) D_x (\partial g/\partial u_j) - j (\partial g/\partial u_j) D_x (\partial f/\partial u_i).$$

Если $\mathbf{v}_f$ — симметрия уравнения (5.31) порядка $i = m$ и $\mathbf{v}_g$ — симметрия уравнения порядка $j \leqslant m$, то при $j = 1$ очевидно, что порядок $\mathbf{v}_h$ не больше m. Для того чтобы это проверить при $j = 2$, достаточно показать, что $\partial h/\partial u_s = 0$. Это легко следует из леммы 5.21. В случаях $j = 3, \ldots$ доказательство несколько удлиняется и дословно повторяет известное доказательство транзитивности свойства коммутирования линейных дифференциальных операторов ненулевого порядка [1])

$$[A, B] = [A, C] = 0 \Rightarrow [B, C] = 0.$$

Очевидно, в частности, что доказательство леммы 5.21 совпадает с выводом формулы, аналогичной (5.34), для коммутирующих дифференциальных операторов и что не только формула для $\partial Q/\partial u_m$, но и формулы для $\partial Q/\partial u_k$ при $k + n - 1 > \max(m, n)$ должны совпадать с аналогичными формулами из теории коммутативных колец линейных дифференциальных операторов. Доказательство включения $[S_m, S_m] \subset S_{m-1}$ проводится по той же схеме.

Недостающие детали доказательства теоремы 5.23 и ее уточнения можно найти в недавно вышедшей работе Соколова [1**], в которой доказано также существование бесконечномерной коммутативной подалгебры симметрий для эволюционных уравнений (5.31), обладающих симметриями сколь угодно высокого порядка.

5.2. ОПЕРАТОРЫ РЕКУРСИИ

Метод, изложенный в § 5.1, дает систематический способ отыскания всех обобщенных симметрий данного порядка для данной системы дифференциальных уравнений. Однако он страдает

---

[1]) См. приложение I.— *Прим. ред.*