чала, что множество S_m образует алгебру Ли. Пусть $f(x, u, \ldots, u_i)$, $g(x, u, \ldots, u_j)$ — произвольные дифференциальные функции. Из определения скобки $\mathbf{v}_h = [\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_g]$ следует (см. (5.22), (5.33)), что

$$\sum_{k=0}^{s} \partial h/\partial u_k D_x^k + \left[\sum_{k=0}^{i} \partial f/\partial u_k D_x^k, \ \sum_{k=0}^{j} \partial g/\partial u_k D_x^k \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \mathbf{v}_f (\partial g/\partial u_k) D_x^k - \sum_{k=0}^{i} \mathbf{v}_g (\partial f/\partial u_k) D_x^k.$$

Таким образом, вообще говоря, $s = i + j - 1$, причем (см. доказательство леммы 5.21)

$$\partial u/\partial u_s = i (\partial f/\partial u_i) D_x (\partial g/\partial u_j) - j (\partial g/\partial u_j) D_x (\partial f/\partial u_i).$$

Если $\mathbf{v}_f$ — симметрия уравнения (5.31) порядка $i = m$ и $\mathbf{v}_g$ — симметрия уравнения порядка $j \leqslant m$, то при $j = 1$ очевидно, что порядок $\mathbf{v}_h$ не больше m. Для того чтобы это проверить при $j = 2$, достаточно показать, что $\partial h/\partial u_s = 0$. Это легко следует из леммы 5.21. В случаях $j = 3, \ldots$ доказательство несколько удлиняется и дословно повторяет известное доказательство транзитивности свойства коммутирования линейных дифференциальных операторов ненулевого порядка[1])

$$[A, B] = [A, C] = 0 \Rightarrow [B, C] = 0.$$

Очевидно, в частности, что доказательство леммы 5.21 совпадает с выводом формулы, аналогичной (5.34), для коммутирующих дифференциальных операторов и что не только формула для $\partial Q/\partial u_m$, но и формулы для $\partial Q/\partial u_k$ при $k + n - 1 > \max(m, n)$ должны совпадать с аналогичными формулами из теории коммутативных колец линейных дифференциальных операторов. Доказательство включения $[S_m, S_m] \subset S_{m-1}$ проводится по той же схеме.

Недостающие детали доказательства теоремы 5.23 и ее уточнения можно найти в недавно вышедшей работе Соколова [1**], в которой доказано также существование бесконечномерной коммутативной подалгебры симметрий для эволюционных уравнений (5.31), обладающих симметриями сколь угодно высокого порядка.

5.2. ОПЕРАТОРЫ РЕКУРСИИ

Метод, изложенный в § 5.1, дает систематический способ отыскания всех обобщенных симметрий данного порядка для данной системы дифференциальных уравнений. Однако он страдает

---

[1]) См. приложение I.— *Прим. ред.*

тем недостатком, что порядок производных, от которых могут зависеть коэффициенты симметрии, необходимо предварительно указать. Поэтому таким методом нельзя одновременно получить *все* обобщенные симметрии системы. В этом параграфе мы рассматриваем другой метод построения симметрий, основанный на понятии оператора рекурсии. Хотя этот метод не может дать исчерпывающей классификации всех возможных симметрий без дальнейшего анализа, он доставляет технику для построения бесконечных иерархий обобщенных симметрий, зависящих от высших производных функции u. К сожалению, хотя проверка того, что данный оператор определяет оператор рекурсии, является достаточно прямой, в отличие от предыдущего метода сама техника его построения не вполне конструктивна. Нахождение вида оператора рекурсии (если он вообще существует) требует определенной интуиции, зачастую базирующейся на виде симметрий более низких порядков, найденных описанным ранее методом.

Определение 5.24. Пусть Δ — система дифференциальных уравнений. *Оператор рекурсии* для системы Δ — это линейный оператор $\mathscr{R}$: $\mathscr{A}^q \to \mathscr{A}^q$ в пространстве наборов из q дифференциальных функций, обладающий тем свойством, что если $\mathbf{v}_Q$ — эволюционная симметрия системы Δ, то для $\tilde{Q} = \mathscr{R}Q$ поле $\mathbf{v}_{\tilde{Q}}$ — тоже эволюционная симметрия Δ.

Таким образом, если нам посчастливилось найти оператор рекурсии $\mathscr{R}$ для системы дифференциальных уравнений, то мы можем получить бесконечное семейство симметрий, исходя из любой симметрии $\mathbf{v}_{Q_0}$ посредством многократного применения оператора $\mathscr{R}$ к характеристике Q_0; иными словами, каждая $Q_j = \mathscr{R}^j Q_0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, является характеристикой обобщенной симметрии. Часто, но не всегда оператор $\mathscr{R}$ будет матричным дифференциальным оператором размера $q \times q$.

Пример 5.25. В качестве простого примера покажем, что дифференциальный оператор $\mathscr{R}_1 = D_x$ является оператором рекурсии для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Здесь $\mathbf{v}_Q$ — обобщенная симметрия уравнения теплопроводности, если и только если на всех решениях $D_t Q = D_x^2 Q$. Тогда $\tilde{Q} = D_x Q$ — тоже характеристика симметрии, поскольку

$$D_t \tilde{Q} - D_x^2 \tilde{Q} = (D_t - D_x^2) D_x Q = D_x (D_t Q - D_x^2 Q) = 0$$

на решениях. Таким образом, начав с симметрии растяжения $u\partial_u$, мы можем построить целую иерархию обобщенных симметрий многократным применением оператора $\mathscr{R}_1$; мы получаем, что $u_x = \mathscr{R}_1(u)$, $u_{xx} = \mathscr{R}_1^2(u)$ и т. д. все являются характеристиками обобщенных симметрий уравнения теплопроводности. Иначе говоря, «поток», порожденный уравнением теплопроводности, коммутирует с «потоком», определяемым эволюционными уравнениями $u_t = \partial^k u/\partial x^k$, $k \geqslant 0$, ср. (5.28).

В силу таких же рассуждений полная производная по t D_t также является оператором рекурсии, но она тривиальным образом сводится к оператору D_x, поскольку $D_tQ = D_x^2Q$, если Q — характеристика симметрии. (Вообще, если $\mathscr{R}$ — оператор рекурсии, то и $\mathscr{R}^m$ очевидным образом является оператором рекурсии.) Имеется, однако, другой оператор рекурсии, не связанный с оператором D_x, а именно $\mathscr{R}_2 = tD_x + (1/2)x$. Чтобы убедиться в этом, находим

$$(D_t - D_x^2)\left(tD_x + \frac{1}{2}x\right)Q = \left(tD_x + \frac{1}{2}x\right)(D_tQ - D_x^2Q),$$

так что $\tilde{Q} = \mathscr{R}_2 Q$ — характеристика симметрии, если $\mathbf{v}_Q$ — симметрия. Таким образом, мы получаем двойную бесконечную серию обобщенных симметрий уравнения теплопроводности, поочередно применяя операторы $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ к характеристике $Q_0 = u$. Эти симметрии имеют характеристики

$$\begin{aligned}
&Q_0 = u, \quad Q_1 = \mathscr{R}_1[u] = u_x, \quad Q_2 = \mathscr{R}_2[u] = tu_x + \frac{1}{2}xu,\\
&Q_3 = \mathscr{R}_1^2[u] = u_{xx}, \quad Q_4 = \mathscr{R}_2\mathscr{R}_1[u] = tu_{xx} + \frac{1}{2}xu_x,\\
&Q_5 = \mathscr{R}_2^2[u] = t^2u_{xx} + txu_x + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}x^2\right)u,\\
&Q_6 = \mathscr{R}_1^3[u] = u_{xxx}, \quad Q_7 = \mathscr{R}_2\mathscr{R}_1^2[u] = tu_{xxx} + \frac{1}{2}xu_{xx}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

и т. д. (Заметим, что если мы интересуемся лишь независимыми характеристиками, то, поскольку $\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_2\mathscr{R}_1 + (1/2)$, порядок, в котором применяются операторы $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$, не имеет значения.) Первые шесть из них, $Q_0, \ldots, Q_5$, являются (с точностью до знака) характеристиками геометрических симметрий уравнения теплопроводности, вычисленных в примере 2.41; остальные — характеристики настоящих обобщенных симметрий.

Результаты, полученные нами для уравнения теплопроводности, на самом деле обобщаются на произвольные линейные системы дифференциальных уравнений следующим образом.

Предложение 5.26. *Пусть $\Delta[u] = 0$ — линейная система дифференциальных уравнений, причем Δ обозначает линейный диф-*

ференциальный оператор. Другой линейный дифференциальный оператор $\mathscr{R}$: $\mathscr{A}^q \to \mathscr{A}^q$, не зависящий от u и ее производных, является оператором рекурсии для системы Δ, если и только если $Q = \mathscr{R}[u]$ — характеристика «линейной» обобщенной симметрии этой системы.

Иными словами, для линейной системы всякая обобщенная симметрия, характеристика которой линейно зависит от u и ее производных, определяет оператор рекурсии, и наоборот. Поэтому для линейных систем вся теория (линейных) симметрий может быть построена с помощью операторов рекурсии в качестве основных объектов. Этот подход развит Миллером (Miller [3]) и его коллегами. Предложение 5.26 доставляет связь этого подхода с более геометрической теорией Ли — Овсянникова, излагаемой в этой книге. (Преимущество геометрического подхода состоит в том, что он одновременно применим и для нелинейных систем, которые не поддаются операторному методу.)

Предложение 5.26 доказать легко. Если $\mathscr{R}$ — оператор рекурсии, то $Q = \mathscr{R}[u]$, очевидно, задает симметрию, поскольку $Q_0 = u$ — характеристика тривиальной группы симметрий растяжения $(x, u) \to (x, \lambda u)$, проистекающей из линейности системы. Обратно, если $\mathbf{v}_Q$ — симметрия, то в силу (5.4) и линейности системы Δ на всех решениях

$$\mathrm{pr}\, \mathbf{v}_Q (\Delta [u]) = \Delta [Q] = \Delta \mathscr{R} [u].$$

Из невырожденности Δ следует существование дифференциального оператора $\tilde{\mathscr{R}}$, удовлетворяющего условию $\Delta\mathscr{R}[u] = \tilde{\mathscr{R}}\Delta[u]$ для всех u, ср. (5.5). Легко видеть, что, поскольку Δ и $\mathscr{R}$ не зависят от u, мы можем выбрать $\tilde{\mathscr{R}}$ также не зависящим от u, и тогда мы получим тождество $\Delta\mathscr{R} = \tilde{\mathscr{R}}\Delta$. Таким образом, если $\tilde{Q} = \mathscr{R}Q$, где Q — характеристика некоторой симметрии, так что $\Delta[Q] = 0$, то на решениях $\Delta[\tilde{Q}] = \tilde{\mathscr{R}}\Delta[Q] = 0$ и $\tilde{Q}$ дает другую симметрию. □

Пример 5.27. Для двумерного волнового уравнения в примере 2.43 была выведена десятипараметрическая конформная группа симметрий. Соответствующие характеристики даны в примере 4.36. В соответствии с предложением 5.26 имеется десять операторов рекурсии, а именно

$D_x, \quad D_y, \quad D_t,$ (сдвиги)

$\mathscr{R}_{xy} = xD_y - yD_x, \quad \mathscr{R}_{xt} = tD_x + xD_t,$

$\mathscr{R}_{yt} = tD_y + yD_t,$ (вращения)

$$\mathscr{D} = xD_x + yD_y + tD_t, \qquad \text{(дилатация)} \quad (5.38)$$
$$\mathscr{I}_x = (x^2 - y^2 + t^2) D_x + 2xyD_y + 2xtD_t + x,$$
$$\mathscr{I}_y = 2xyD_x + (y^2 - x^2 + t^2) D_y + 2ytD_t + y, \qquad \text{(инверсии)}$$
$$\mathscr{I}_t = 2xtD_x + 2ytD_y + (x^2 + y^2 + t^2) D_t + t.$$

Последовательно применяя произведения этих операторов к $Q_0 = u$, мы получаем огромное количество обобщенных симметрий волнового уравнения; например,

$$\mathscr{R}_{xy}\mathscr{R}_{xt}[u] = xtu_{xy} - ytu_{xx} + x^2u_{yt} - xyu_{xt} - yu_t$$

и т. д. Между получающимися симметриями имеется много зависимостей, проистекающих из соотношений между операторами, например

$$\mathscr{R}_{xy}D_t - \mathscr{R}_{xt}D_y + \mathscr{R}_{yt}D_x = 0.$$

В диссертации Delong [1] доказано, что эти операторы рекурсии порождают $(2k+1)(2k+2)(2k+3)/6$ независимых обобщенных симметрий порядка k. Например, в приведенном выше примере имеется 35 независимых симметрий второго порядка. Важный открытый вопрос — всякую ли обобщенную симметрию волнового уравнения можно получить таким способом.

Производные Фреше

Для нелинейных систем имеется аналогичный критерий того, что дифференциальный оператор является оператором рекурсии. Однако, чтобы сформулировать его, нам нужно ввести понятие (формальной) производной Фреше от дифференциальной функции.

Определение 5.28. Пусть $P[u] = P(x, u^{(n)}) \in \mathscr{A}^r$ — набор из r дифференциальных функций. *Производная Фреше* от P — это дифференциальный оператор D_P: $\mathscr{A}^q \to \mathscr{A}^r$, определенный так, что

$$\mathsf{D}_P(Q) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} P[u + \varepsilon Q[u]] \qquad (5.39)$$

для любого $Q \in \mathscr{A}^q$.

Иными словами, чтобы вычислить $\mathsf{D}_P(Q)$, мы заменяем u (и ее производные) в P на $u + \varepsilon Q$ и дифференцируем полученное выражение по ε. Например, если $P[u] = u_x u_{xx}$, то

$$\mathsf{D}_P(Q) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} (u_x + \varepsilon D_x Q)(u_{xx} + \varepsilon D_x^2 Q) = u_x D_x^2 Q + u_{xx} D_x Q,$$

так что $\mathsf{D}_P = u_x D_x^2 + u_{xx} D_x$. Это вычисление легко обобщить и показать, что производная Фреше от общего r-набора $P = (P_1, \ldots, P_r)$ является дифференциальным матричным оператором размера $q \times r$ с элементами

$$(\mathsf{D}_P)_{\mu\nu} = \sum_J (\partial P_\mu / \partial u_J^\nu) D_J, \quad \mu = 1, \ldots, r, \quad \nu = 1, \ldots, q, \tag{5.40}$$

где сумма берется по всем мультииндексам J. В частности, если $P = \Delta[u]$ — линейный дифференциальный многочлен, то $\mathsf{D}_P = \Delta$ — то же самое, что дифференциальный оператор, определяющий его. Имеется тесная связь между производной Фреше и эволюционными векторными полями.

Предложение 5.29. *Если $P \in \mathcal{A}^r$ и $Q \in \mathcal{A}^q$, то*

$$\mathsf{D}_P(Q) = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P). \tag{5.41}$$

Это непосредственно следует из формул (5.6), (5.40). Другой способ: можно заметить, что обе стороны равенства (5.41) определяют инфинитезимальную вариацию P под действием однопараметрической группы, порожденной полем $\mathbf{v}_Q$, ср. (5.16), и, следовательно, обязаны совпадать. □

Критерии рекурсивности операторов

Последняя формула легко приводит к общей характеризации операторов рекурсии.

Теорема 5.30. *Предположим, что $\Delta[u] = 0$ — система дифференциальных уравнений. Если $\mathcal{R}: \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^q$ — линейный оператор, такой, что*

$$\mathsf{D}_\Delta \cdot \mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} \cdot \mathsf{D}_\Delta \tag{5.42}$$

для всех решений и системы Δ, где $\tilde{\mathcal{R}}: \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^q$ — линейный дифференциальный оператор, то $\mathcal{R}$ — оператор рекурсии для этой системы.

Доказательство. Согласно формуле (5.41), эволюционное векторное поле $\mathbf{v}_Q$ является симметрией системы Δ тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{D}_\Delta(Q) = \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\Delta) = 0$$

для всех решений Δ. Если $\mathcal{R}$ удовлетворяет тождеству (5.42), а $\tilde{Q} = \mathcal{R}Q$, то для всех решений

$$\mathsf{D}_\Delta \tilde{Q} = \mathsf{D}_\Delta(\mathcal{R}Q) = \tilde{\mathcal{R}}(\mathsf{D}_\Delta Q) = 0.$$

Таким образом, $\tilde{Q}$ — также симметрия, и теорема доказана. □

Пример 5.31. Вернемся к уравнению Бюргерса $u_t = u_{xx} + u_x^2$, для которого мы вычислили обобщенные симметрии в примерах 5.8 и 5.18. Структура полученных характеристик наводит на мысль, что, как и уравнение теплопроводности, уравнение Бюргерса обладает двумя операторами рекурсии[1]). Рассмотрение характеристик Q_0, Q_1, Q_3, Q_6 и Q_{10} приводит к предположению, что $\mathcal{R}_1 = D_x + u_x$ — оператор рекурсии, поскольку $Q_1 = \mathcal{R}_1 Q_0$, $Q_3 = \mathcal{R}_1 Q_1$ и т. д. Чтобы это доказать, заметим, что производная Фреше для уравнения Бюргерса (5.11) равна

$$\mathsf{D}_\Delta = D_t - D_x^2 - 2u_x D_x.$$

По правилу Лейбница находим

$$\mathsf{D}_\Delta \mathcal{R}_1 = D_t D_x - D_x^3 - 2u_x D_x^2 + u_x D_t + u_{xt} - u_x D_x^2 - \\ - 2u_{xx} D_x - u_{xxx} - 2u_x^2 D_x - 2u_x u_{xx}.$$

Далее, для решений уравнения Бюргерса $u_{xt} = u_{xxx} + 2u_x u_{xx}$; следовательно,

$$\mathsf{D}_\Delta \mathcal{R}_1 = (D_x + u_x)\left(D_t - D_x^2 - 2u_x D_x\right) = \mathcal{R}_1 \mathsf{D}_\Delta \tag{5.43}$$

на решениях, что удовлетворяет критерию (5.42). Таким образом, имеется бесконечная иерархия симметрий с характеристиками $\mathcal{R}_1^k Q_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Например, следующая за Q_{10} характеристика в этой последовательности имеет вид

$$Q_{15} = \mathcal{R}_1 Q_{10} = u_{xxxxx} + 5u_x u_{xxxx} + 10u_{xx} u_{xxx} + \\ + 10u_x^2 u_{xxx} + 15u_x u_{xx}^2 + 10u_x^3 u_{xx} + u_x^5.$$

Чтобы получить характеристики, зависящие от x и t, нам нужен второй оператор рекурсии. Изучение найденных симметрий подсказывает, что он равен

$$\mathcal{R}_2 = t\mathcal{R}_1 + \frac{1}{2}x = tD_x + tu_x + \frac{1}{2}x.$$

Пользуясь (5.43), находим

$$\mathsf{D}_\Delta \mathcal{R}_2 = t\mathcal{R}_1 \mathsf{D}_\Delta + \mathcal{R}_1 + \frac{1}{2}x\mathsf{D}_\Delta - D_x - u_x = \mathcal{R}_2 \mathsf{D}_\Delta$$

на решениях. Это доказывает, что $\mathcal{R}_2$ — также оператор рекурсии. Таким образом, имеется дважды бесконечная иерархия обобщенных симметрий уравнения Бюргерса с характеристиками $\mathcal{R}_2^l \mathcal{R}_1^k Q_0$, $k, l \geqslant 0$. Например, $Q_2 = \mathcal{R}_2 Q_0$, $Q_4 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 Q_0$ и т. д.

---

[1]) См. примечаиие редактора на с. 378 и упр. 5.9.— *Прим. ред.*

Уравнение Кортевега—де Фриза

В случае нелинейных уравнений часто приходится расширять класс возможных операторов рекурсии, чтобы включить «интегро-дифференциальные» операторы. В качестве примера докажем, что оператор

$$\mathcal{R} = D_x^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_x D_x^{-1}$$

является оператором рекурсии для уравнения Кортевега — де Фриза, имеющего вид

$$u_t = u_{xxx} + uu_x. \tag{5.44}$$

(Это то же самое уравнение, что (2.66) при замене переменной $x \mapsto -x$.) Интегральный оператор D_x^{-1} будет определен *только* на тех дифференциальных функциях, которые являются полными производными, так что если $Q = D_x R$, то мы полагаем $R = D_x^{-1}Q$ [1]). (На самом деле, это определяет $D_x^{-1}Q$ с точностью до аддитивной постоянной, которую мы можем выбирать из условия $R(0, 0) = 0$.) Если $\mathbf{v}_Q$ — обобщенная симметрия, то $\mathcal{R}Q$ будет определена, лишь если $Q = D_x R$ для некоторого $R \in \mathcal{A}$. Таким образом, мы можем столкнуться с трудностями, пытаясь получить полную иерархию симметрий $\mathcal{R}^k Q$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Прежде, чем обратиться к этим трудностям, покажем, что формально $\mathcal{R}$ является оператором рекурсии. Соответствующая производная Фреше равна

$$\mathsf{D}_\Delta = D_t - D_x^3 - uD_x - u_x,$$

и мы докажем, что на решениях уравнения Кортевега — де Фриза $\mathsf{D}_\Delta \mathcal{R} = \mathcal{R}\mathsf{D}_\Delta$ в соответствии с (5.42). Обращаясь с D_x^{-1} как с оператором, обратным к D_x, мы получаем

$$\begin{aligned}\mathsf{D}_\Delta \mathcal{R} = {} & D_x^2 D_t + \frac{2}{3}uD_t + \frac{2}{3}u_t + \frac{1}{3}u_x D_x^{-1} D_t + \frac{1}{3}u_{xt} D_x^{-1} - \\ & - \Big\{ D_x^5 + \frac{5}{3}uD_x^3 + \frac{10}{3}u_x D_x^2 + \Big(3u_{xx} + \frac{2}{3}u^2\Big) D_x + \\ & + \frac{5}{3}(u_{xxx} + uu_x) + \frac{1}{3}\big(u_{xxxx} + uu_{xx} + u_x^2\big) D_x^{-1} \Big\}.\end{aligned}$$

---

[1]) Более общо, можно пытаться определить $D_x^{-1}P = \int_0^x P(x, u^{(n)})\,dx$, но это уведет нас из класса дифференциальных функций.

С другой стороны, поскольку $D_x \cdot u = uD_x + u_x$, имеем $D_x^{-1} \cdot (uD_x + u_x) = u$. Поэтому

$$\mathscr{R}\mathrm{D}_\Delta = D_x^2 D_t + \frac{2}{3} uD_t + \frac{1}{3} u_x D_x^{-1} D_t -$$
$$- \left\{ D_x^5 + \frac{5}{3} uD_x^3 + \frac{10}{3} u_x D_x^2 + \left(3u_{xx} + \frac{2}{3} u^2\right) D_x + \right.$$
$$\left. + (u_{xxx} + uu_x) \right\}.$$

Наконец,

$$\mathrm{D}_\Delta \mathscr{R} - \mathscr{R}\mathrm{D}_\Delta = \frac{2}{3}(u_t - u_{xxx} - uu_x) +$$
$$+ \frac{1}{3}\left(u_{xt} - u_{xxxx} - uu_{xx} - u_x^2\right) D_x^{-1},$$

а этот оператор обращается в нуль на решениях уравнения (5.44). Тем самым доказано, что $\mathscr{R}$ — оператор рекурсии.

Если начать последовательно применять оператор $\mathscr{R}$ к симметрии сдвига $-\partial_x$ с характеристикой $Q_0 = u_x$, мы получим сначала функцию

$$Q_1 = \mathscr{R}Q_0 = u_{xxx} + uu_x, \quad \left(D_x^{-1} u_x = u\right),$$

эквивалентную характеристике u_t симметрии сдвига $-\partial_t$. Замечая, что $Q_1 = D_x\left(u_{xx} + \frac{1}{2} u^2\right)$, мы находим, что

$$Q_2 = \mathscr{R}Q_1 = u_{xxxxx} + \frac{5}{3} uu_{xxx} + \frac{10}{3} u_x u_{xx} + \frac{5}{6} u^2 u_x$$

— характеристика настоящей обобщенной симметрии, как может проверить читатель. Аналогично,

$$Q_3 = \mathscr{R}Q_2 = u_{xxxxxxx} + \frac{7}{3} uu_{xxxxx} + 7u_x u_{xxxx} + \frac{35}{3} u_{xx} u_{xxx} +$$
$$+ \frac{35}{18} u^2 u_{xxx} + \frac{70}{9} uu_x u_{xx} + \frac{35}{18} u_x^3 + \frac{35}{54} u^3 u_x$$

дает обобщенную симметрию седьмого порядка. Как показывает следующий результат, мы можем продолжать эту рекурсивную процедуру неограниченно, получая обобщенные симметрии все более и более высоких порядков.

Теорема 5.32. *Пусть $Q_0 = u_x$. Для всякого $k \geqslant 0$ дифференциальный многочлен $Q_k = \mathscr{R}^k Q_0$ является полной производной по x: $Q_k = D_x R_k$, и, следовательно, мы можем рекурсивно определить $Q_{k+1} = \mathscr{R}Q_k$. Каждая дифференциальная функция Q_k является характеристикой симметрии уравнения Кортевега — де Фриза.*

Фактически векторное поле $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{Q_k}$ определяет бесконечный набор взаимно коммутирующих потоков [1])

$$\partial u/\partial t = Q_k[u] = u_{2k+1} + \ldots,$$

называемых *уравнениями Кортевега — де Фриза высших порядков*. Все перечисленные выше векторные поля являются, таким образом, симметриями любого из этих замечательных эволюционных уравнений.

Доказательство теоремы 5.32. Мы проводим его индукцией по k. Предположим, что $Q_k = D_x R_k$ для некоторого $R_k \in \mathcal{A}$. Из вида оператора рекурсии

$$Q_{k+1} = D_x^2 Q_k + \frac{2}{3} u Q_k + \frac{1}{3} u_x D_x^{-1} Q_k = \\ = D_x \left[D_x Q_k + \frac{1}{3} u D_x^{-1} Q_k + \frac{1}{3} D_x^{-1}(uQ_k) \right].$$

Если мы сможем доказать, что $uQ_k = D_x S_k$ для некоторого дифференциального многочлена $S_k \in \mathcal{A}$, мы докажем, что $Q_{k+1} = D_x R_{k+1}$, где R_{k+1} — выписанное выше выражение в скобках, и это завершит шаг индукции.

Для доказательства этого факта заметим сначала, что формальное сопряжение оператора рекурсии $\mathcal{R}$ дает [2])

$$\mathcal{R}^* = D_x^2 + \frac{2}{3} u - \frac{1}{3} D_x^{-1} \cdot u_x = D_x^{-1} \mathcal{R} D_x.$$

Воспользуемся этим, чтобы проинтегрировать выражение uQ_k по частям (ср. (5.46)), так что

$$uQ_k = u\mathcal{R}^k[u_x] = u_x \cdot (\mathcal{R}^*)^k[u] + D_x A_k$$

для некоторой дифференциальной функции $A_k \in \mathcal{A}$. С другой стороны, применяя дальнейшее интегрирование по частям, получаем, что

$$u_x(\mathcal{R}^*)^k[u] = u_x \cdot D_x^{-1}\mathcal{R}^k[u_x] = u_x \cdot D_x^{-1} Q_k = -uQ_k + D_x B_k$$

для некоторого $B_k \in \mathcal{A}$. Подставляя это выражение в предыдущее равенство, мы заключаем, что

$$uQ_k = D_x S_k, \text{ где } S_k = \frac{1}{2}(A_k + B_k),$$

что и требовалось доказать. □

---

[1]) Условие инвариантности относительно высшего потока приводит к солитонным и конечнозонным решениям уравнения Кортевега — де Фриза. — Прим. ред.

[2]) См. начало следующего параграфа.

Уравнение Кортевега — де Фриза обладает еще двумя другими группами геометрических симметрий. Характеристика галлилеевой группы $t\partial_x - \partial_u$ равна $1 + tu_x$, и

$$3\mathscr{R}(1 + tu_x) = 2u + xu_x + 3t(u_{xxx} + uu_x),$$

что эквивалентно характеристике группы симметрий растяжений. Однако эта последняя характеристика не является полной производной, так что мы не можем получить обобщенной симметрии, применяя к ней повторно оператор рекурсии.

5.3. ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Соответствие между обычными вариационными симметриями и законами сохранения систем уравнений Эйлера — Лагранжа легко обобщается. Этот факт был осознан уже самой Эмми Нётер. На самом деле если мы допускаем к рассмотрению обобщенные симметрии, то теорема Нётер доставляет *взаимно однозначное* соответствие между вариационными симметриями и законами сохранения. В этом параграфе мы излагаем этот результат в форме, принадлежащей Бессель-Хагену. (Изначальный вариант Нётер изложен в упр. 5.23.) Основные вычислительные результаты базируются на понятии сопряжения дифференциального оператора.

Сопряженные дифференциальные операторы

Если

$$\mathscr{D} = \sum_J P_J[u] D_J, \quad P_J \in \mathscr{A},$$

— дифференциальный оператор, то (формально) сопряженный к нему — это дифференциальный оператор $\mathscr{D}^*$, удовлетворяющий условию

$$\int_\Omega P \cdot \mathscr{D}Q \, dx = \int_\Omega Q \cdot \mathscr{D}^* P \, dx \tag{5.45}$$

для любой пары дифференциальных функций $P, Q \in \mathscr{A}$, обращающихся в нуль при $u \equiv 0$, любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ и любой функции $u = f(x)$ с компактным носителем в Ω. Несложное интегрирование по частям показывает, что

$$\mathscr{D}^* = \sum_J (-D)_J \cdot P_J.$$