Уравнение Кортевега — де Фриза обладает еще двумя другими группами геометрических симметрий. Характеристика галлилеевой группы $t\partial_x - \partial_u$ равна $1 + tu_x$, и

$$3\mathscr{R}(1 + tu_x) = 2u + xu_x + 3t(u_{xxx} + uu_x),$$

что эквивалентно характеристике группы симметрий растяжений. Однако эта последняя характеристика не является полной производной, так что мы не можем получить обобщенной симметрии, применяя к ней повторно оператор рекурсии.

5.3. ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Соответствие между обычными вариационными симметриями и законами сохранения систем уравнений Эйлера — Лагранжа легко обобщается. Этот факт был осознан уже самой Эмми Нётер. На самом деле если мы допускаем к рассмотрению обобщенные симметрии, то теорема Нётер доставляет *взаимно однозначное* соответствие между вариационными симметриями и законами сохранения. В этом параграфе мы излагаем этот результат в форме, принадлежащей Бессель-Хагену. (Изначальный вариант Нётер изложен в упр. 5.23.) Основные вычислительные результаты базируются на понятии сопряжения дифференциального оператора.

Сопряженные дифференциальные операторы

Если

$$\mathscr{D} = \sum_J P_J[u] D_J, \quad P_J \in \mathscr{A},$$

— дифференциальный оператор, то (формально) сопряженный к нему — это дифференциальный оператор $\mathscr{D}^*$, удовлетворяющий условию

$$\int_\Omega P \cdot \mathscr{D}Q\, dx = \int_\Omega Q \cdot \mathscr{D}^* P\, dx \tag{5.45}$$

для любой пары дифференциальных функций P, $Q \in \mathscr{A}$, обращающихся в нуль при $u \equiv 0$, любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ и любой функции $u = f(x)$ с компактным носителем в Ω. Несложное интегрирование по частям показывает, что

$$\mathscr{D}^* = \sum_J (-D)_J \cdot P_J.$$

Это означает, что для всякой дифференциальной функции $Q \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{D}^* Q = \sum_J (-D)_J [P_J Q].$$

Например, если

$$\mathcal{D} = D_x^2 + u D_x,$$

то его сопряженный имеет вид

$$\mathcal{D}^* = (-D_x)^2 + (-D_x) \cdot u = D_x^2 - u D_x - u_x.$$

Аналогично, матричный дифференциальный оператор $\mathcal{D}: \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^l$ с элементами $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ обладает сопряженным $\mathcal{D}^*: \mathcal{A}^l \to \mathcal{A}^k$ с элементами $\mathcal{D}^*_{\mu\nu} = (\mathcal{D}_{\nu\mu})^*$, сопряженными к элементам транспонированной матрицы оператора $\mathcal{D}$. Заметим, что $(\mathcal{D}\mathcal{E})^* = \mathcal{E}^*\mathcal{D}^*$ для любых операторов $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$. Оператор $\mathcal{D}$ называется *симметрическим*, если $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$, и *антисимметрическим*, если $\mathcal{D}^* = -\mathcal{D}$. Например оператор $D_x^2 + u$ является симметрическим, а оператор $D_x^3 + 2uD_x + u_x$ — антисимметрическим. Заметим, что условие (5.45) эквивалентно формуле интегрирования по частям

$$P \cdot \mathcal{D}Q = Q \cdot \mathcal{D}^* P + \operatorname{Div} A, \tag{5.46}$$

где $A \in \mathcal{A}^p$ — билинейное выражение, содержащее P, Q и их производные, коэффициенты которого зависят от x, u и производных от u. Или, что равносильно,

$$\mathsf{E}(P \cdot \mathcal{D}Q) = \mathsf{E}(Q \cdot \mathcal{D}^* P), \tag{5.47}$$

где E — оператор Эйлера, ср. теорему 4.7.

Заметим, что если $P \in \mathcal{A}^l$, то его производная Фреше обладает сопряженным оператором $\mathsf{D}_P^*: \mathcal{A}^l \to \mathcal{A}^q$ с элементами

$$(\mathsf{D}_P^*)_{\nu\mu} = \sum_J (-D)_J \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial u_J^\nu}, \quad \mu = 1, \ldots, l, \quad \nu = 1, \ldots, q. \tag{5.48}$$

(Хотя формула (5.48) кажется похожей на оператор Эйлера, на самом деле это дифференциальный оператор, а не дифференциальная функция в отличие от формулы для оператора Эйлера.) Например, если $P = u_{xx} + u_x^2$, то

$$\mathsf{D}_P = D_x^2 + 2u_x D_x, \quad \mathsf{D}_P^* = D_x^2 - 2D_x \cdot u_x = D_x^2 - 2u_x \cdot D_x - 2u_{xx}.$$

В частности, если $P \in \mathcal{A}$, то

$$\mathsf{E}(P) = \left(\sum_J (-D)_J \frac{\partial P}{\partial u_J^\nu} \right) = \mathsf{D}_P^*(1),$$

1 обозначает постоянную дифференциальную функцию. Отметим, наконец, важную формулу для вариационной производной произведения двух функций

$$\mathsf{E}(P \cdot Q) = \mathsf{D}_P^*(Q) + \mathsf{D}_Q^*(P), \quad P, Q \in \mathcal{A}^l, \tag{5.49}$$

которая вытекает из правила Лейбница:

$$\mathsf{E}_\nu(P \cdot Q) = \sum_{\mu=1}^{l} \left\{ \sum_J (-D)_J \left[\frac{\partial P_\mu}{\partial u_J^\nu} \cdot Q_\mu \right] + \sum_J (-D)_J \left[\frac{\partial Q_\mu}{\partial u_J^\nu} \cdot P_\mu \right] \right\}.$$

Характеристики законов сохранения

Прежде чем ограничить внимание уравнениями Эйлера — Лагранжа, рассмотрим еще раз законы сохранения в общем виде. Напомним, что всякий закон сохранения системы дифференциальных уравнений Δ эквивалентен закону сохранения в характеристическом виде

$$\mathrm{Div}\, P = Q \cdot \Delta = \sum_{\nu=1}^{l} Q_\nu \Delta_\nu. \tag{5.50}$$

Используя понятие производной Фреше, мы легко получаем необходимые и достаточные условия того, что данный набор из l дифференциальных функций Q — характеристика закона сохранения.

Предложение 5.33. *Пусть $\Delta = 0$ — система дифференциальных уравнений. Набор из l дифференциальных функций $Q \in \mathcal{A}^l$ является характеристикой закона сохранения, если и только если*

$$\mathsf{D}_\Delta^*(Q) + \mathsf{D}_Q^*(\Delta) = 0 \tag{5.51}$$

для всех (x, u).

Доказательство. Согласно теореме 4.7, $Q \cdot \Delta$ — полная дивергенция (5.50), если и только если $\mathsf{E}(Q \cdot \Delta) = 0$. Таким образом, условие (5.51) сразу следует из правила (5.49) для произведения. □

В частности, условие, необходимое для того, чтобы Q была характеристикой закона сохранения для системы Δ, имеет вид

$$\mathsf{D}_\Delta^*(Q) = 0 \text{ для всех решений системы } \Delta \tag{5.52}$$

(поскольку на решениях автоматически выполняется равенство $\mathsf{D}_Q^*(\Delta) = 0$). Этот упрощенный вид формулы (5.51) часто можно эффективно использовать, чтобы исключить из рассмотрения множество наборов из l дифференциальных функций, которые наверняка не могут быть характеристиками законов сохранения, и, таким образом, быстро прийти к полной классификации законов сохранения системы.

Пример 5.34. Рассмотрим уравнение Бюргерса в исходной форме

$$u_t = u_{xx} + uu_x.$$

Если $\tilde{Q}[u] \in \mathscr{A}$ — характеристика закона сохранения, то мы всегда можем заменить производную от u по t на производные от u по x, пользуясь самим уравнением, так что имеется эквивалентная характеристика вида $Q(x, t, u, u_x, \ldots, u_n)$, $u_n = \partial^n u/\partial x^n$. Посмотрим, что говорит нам формула (5.52) о виде Q. Для уравнения Бюргерса

$$\mathsf{D}_\Delta = D_t - D_x^2 - uD_x - u_x, \text{ так что } \mathsf{D}_\Delta^* = -D_t - D_x^2 + uD_x.$$

Старшие члены в (5.52) имеют вид

$$\mathsf{D}_\Delta^*(Q) = \frac{\partial Q}{\partial u_n}(-u_{n,t} - u_{n+2}) + \ldots = -2\frac{\partial Q}{\partial u_n}u_{n+2} + \ldots$$

на решениях. Опущенные члены зависят от производных от u по x порядка $n+1$ и ниже. Таким образом, из (5.52) следует, что $\partial Q/\partial u_n = 0$, так что на самом деле Q зависит только от производных от u порядка $n-1$ и ниже. Продолжая по индукции, мы заключаем, что $Q = q(x, t)$ не может зависеть от u или производных от u никаким нетривиальным образом. Кроме того,

$$\mathsf{D}_\Delta^*(q) = q_t - q_{xx} + uq_x = 0,$$

если и только если q — константа. Таким образом, характеристикой единственного нетривиального закона сохранения для уравнения Бюргерса является константа; соответствующий закон — это само уравнение:

$$D_t(u) - D_x\left(-u_x - \frac{1}{2}u^2\right) = 0.$$

Вариационные симметрии

Так же, как геометрический вариант теоремы Нётер, обсуждавшийся в гл. 4, общая теорема Нётер устанавливает соответствие между законами сохранения и *вариационными симметриями.* Они определяются по аналогии с дивергентными симметриями (4.44).

Определение 5.35. Обобщенное векторное поле

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi_\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

является *вариационной симметрией* функционала $\mathscr{L}[u]=\int L(x, u^{(n)})\,dx$, если и только если существует набор из p дифференциальных функций $B[u]\in\mathscr{A}^p$, такой, что

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}(L)+L\,\mathrm{Div}\,\xi=\mathrm{Div}\,B \tag{5.53}$$

для всех x, u. (Здесь $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^p)$, как в (4.15).)

Мы покажем сначала, что на самом деле можно ограничиться вариационными симметриями в эволюционной форме.

Предложение 5.36. *Обобщенное векторное поле* $\mathbf{v}$ *является вариационной симметрией функционала* $\mathscr{L}[u]$, *если и только если таковым является его эволюционный представитель.* (*Замечание. Это утверждение станет неверным, если мы опустим член* $\mathrm{Div}\,B$ *в определении* (5.53).)

Доказательство. Пользуясь основной формулой продолжения (5.8), получаем

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}(L)+L\,\mathrm{Div}\,\xi=\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(L)+\sum_{i=1}^{p}\xi^iD_iL+L\sum_{i=1}^{p}D_i\xi^i=$$

$$=\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(L)+\sum_{i=1}^{p}D_i(\xi^iL).$$

Поэтому (5.53) справедливо, если и только если

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(L)=\mathrm{Div}\,\widetilde{B}, \tag{5.54}$$

где $\widetilde{B}_i=B_i-L\xi^i$. □

Как и в случае обычных симметрий, каждая обобщенная вариационная симметрия вариационной задачи обязана быть симметрией соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа. (Обращение этого утверждения остается, вообще говоря, *неверным.*)

Теорема 5.37. *Если обобщенное векторное поле* $\mathbf{v}$ *является вариационной симметрией функционала* $\mathscr{L}[u]=\int L(x, u^{(n)})\,dx$, *то* $\mathbf{v}$ *является обобщенной симметрией уравнений Эйлера — Лагранжа* $\mathsf{E}(L)=0$.

Доказательство основано на следующей важной коммутационной формуле.

Лемма 5.38. *Пусть* $L \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{A}^q$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\,[\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(L)] = \operatorname{pr} \mathbf{v}_Q\,[\mathsf{E}(L)] + \mathsf{D}_Q^*\mathsf{E}(L). \tag{5.55}$$

Доказательство. Согласно формуле интегрирования по частям (4.39) и тождеству (5.49),

$$\mathsf{E}\,[\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(L)] = \mathsf{E}\,[Q \cdot \mathsf{E}(L)] = \mathsf{D}_{\mathsf{E}(L)}^*[Q] + \mathsf{D}_Q^*\,[\mathsf{E}(L)].$$

Нам нужен теперь тот важный факт, что $\Delta = \mathsf{E}(L)$ — выражение Эйлера — Лагранжа, если и только если его производная Фреше — симметрический дифференциальный оператор: $\mathsf{D}_\Delta^* = \mathsf{D}_\Delta$. Эта фундаментальная теорема, представляющая собой вариационный аналог равенства смешанных частных производных и доставляющая решение обратной задачи вариационного исчисления, будет доказана в § 5.4. (См. теорему 5.68.) Считая этот результат известным, мы легко получаем формулу (5.55) из (5.41), поскольку

$$\mathsf{D}_{\mathsf{E}(L)}^*[Q] = \mathsf{D}_{\mathsf{E}(L)}[Q] = \operatorname{pr} \mathbf{v}_Q\,[\mathsf{E}(L)]. \quad \square$$

Доказательство теоремы 5.37. В силу предложений 5.5 и 5.36 мы можем заменить поле $\mathbf{v}$ его эволюционной формой $\mathbf{v}_Q$ — это не влияет на справедливость теоремы. Если $\mathbf{v}_Q$ — вариационная симметрия, то из (5.54) следует, что левая часть равенства (5.55) обращается в нуль. Но D_Q^* — линейный дифференциальный оператор, следовательно, условие симметрии (5.5) справедливо для $\Delta = \mathsf{E}(L)$, и доказательство закончено. $\square$

Таким образом, для того чтобы найти все вариационные симметрии системы уравнений Эйлера — Лагранжа, достаточно применить методы § 5.1 и 5.2, чтобы построить симметрии уравнений Эйлера — Лагранжа, а затем проверить, какие из них удовлетворяют дополнительным требованиям вариационности (5.53). На самом деле нам не нужно снова применять $\operatorname{pr}\mathbf{v}$ к лагранжиану или даже точно знать, какой вид имеет лагранжиан, поскольку мы можем воспользоваться следующей внутренней характеризацией вариационной симметрии.

Предложение 5.39. *Пусть* $\Delta = 0$ — *система дифференциальных уравнений, производная Фреше которой — симметрический оператор*: $\mathsf{D}_\Delta^* = \mathsf{D}_\Delta$, *так что* Δ — *уравнения Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи* [1]. *Эволюционное векторное*

[1] Здесь предполагается, что для области M выполнены ограничения теоремы 5.68.

поле $\mathbf{v}_Q$ *является вариационной симметрией системы* Δ, *если и только если*

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\Delta) + \mathrm{D}_Q^*(\Delta) = 0 \tag{5.56}$$

для всех x, u.

Доказательство немедленно следует из предыдущих вычислений и решения обратной задачи теоремы 5.68. □

Групповые преобразования

Считая, что вариационная симметрия имеет эволюционный вид, мы можем вывести, что соответствующие групповые преобразования оставляют инвариантным сам функционал в следующем смысле.

Предложение 5.40. *Пусть выполнены соответствующие условия существования и единственности решения задачи Коши для системы эволюционных уравнений. Тогда отвечающее ей обобщенное векторное поле* $\mathbf{v}_Q$ *является вариационной симметрией функционала* $\mathscr{L}_{\Omega_0}[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(n)})\,dx$, *если и только если для любой подобласти* $\Omega \subset \Omega_0$ *и любой функции* $u = f(x)$ *из подходящего функционального пространства*

$$\mathscr{L}_\Omega[\exp(\varepsilon\mathbf{v}_Q)f] = \mathscr{L}_\Omega[f] + \mathscr{B}_{\partial\Omega}[\varepsilon, f], \tag{5.57}$$

где $\mathscr{B}_{\partial\Omega}$ *зависит только от значений* $\exp(\varepsilon\mathbf{v}_Q)f$ *и ее производных на границе* $\partial\Omega$.

Другой способ интерпретировать этот результат состоит в том, что обобщенное векторное поле $\mathbf{v}_Q$ является вариационной симметрией функционала $\mathscr{L}$, если и только если $\mathscr{L}$ определяет закон сохранения для системы эволюционных уравнений $u_t = Q$, задающей поток поля $\mathbf{v}_Q$.

Доказательство. Продифференцировав (5.57) по ε, получаем

$$\int_\Omega \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(L)\,dx = \int_{\partial\Omega} B\cdot dS = \int_\Omega (\mathrm{Div}\,B)\,dx$$

для некоторого $B \in \mathscr{A}^p$, зависящего от u и производных от u; правая и левая части последнего равенства вычислены при $u = \exp(\varepsilon\mathbf{v}_Q)f$. Поскольку это справедливо для произвольной подобласти Ω, мы заключаем, что подынтегральные выражения равны:

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(L) = \mathrm{Div}\,B,$$

а это в точности условие (5.54) инфинитезимального критерия. Доказательство в обратную сторону получается интегрированием по ε. □

Пример 5.41. Рассмотрим функционал

$$\mathscr{L}[u]=\int_a^b \frac{1}{2} u_x^2 dx, \quad x,\ u \in \mathbb{R}.$$

Легко видеть, что обобщенная симметрия $\mathbf{v}=-u_x\partial_x$ является вариационной симметрией функционала $\mathscr{L}$:

$$\operatorname{pr}\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}u_x^2\right)=-u_xu_{xx}=-D_x\left(\frac{1}{2}u_x^2\right).$$

В самом деле, $\mathbf{v}$ — в точности эволюционная форма поля сдвигов $\tilde{\mathbf{v}}=\partial_x$ и порождает однопараметрическую группу

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v}) f(x)=f(x-\varepsilon).$$

Если $[c,d]\subset(a,b)$ — произвольный подынтервал, то вклад границы при доказательстве равенства (5.57) равен

$$\mathscr{B}(x,\ u^{(1)})=-\frac{1}{2}u_x^2\Big|_{x=c}^{d}=\frac{1}{2}[f'(c)^2-f'(d)^2];$$

действительно, (5.57) в этом случае имеет вид

$$\int_c^d \frac{1}{2}[f'(x-\varepsilon)]^2 dx=\int_c^d \frac{1}{2}[f'(x)]^2 dx+$$
$$+\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{2}\{[f'(c-\tilde{\varepsilon})]^2-[f'(d-\tilde{\varepsilon})]^2\}\,d\tilde{\varepsilon}.$$

Отметим особо, что в общем случае мы не можем освободиться от граничного вклада, поскольку единственное решение, обращающееся в нуль на границе, — это тривиальное решение $u\equiv 0$.

Теорема Нётер

Как мог уже заметить читатель, в случае когда система дифференциальных уравнений Δ является уравнениями Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи, условие (5.51) того, что Q — характеристика закона сохранения, и условие (5.56) того, что $\mathbf{v}_Q$ порождает группу вариационных симметрий, совпадают. Таким образом, пользуясь теоремой 4.26, мы сразу получаем теорему Нётер в общем виде.

Теорема 5.42. *Обобщенное векторное поле* $\mathbf{v}$ *определяет группу вариационных симметрий функционала* $\mathscr{L}[u]=\int L\,dx$, *если и только если его характеристика* $Q\in\mathscr{A}^q$ *является характеристикой закона сохранения* $\operatorname{Div} P=0$ *для соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа* $\mathsf{E}(L)=0$. *В частности, если* $\mathscr{L}$ *— невырожденная вариационная задача, то имеется взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности нетривиальных законов сохранения ее уравнений Эйлера — Лагранжа и классами эквивалентности вариационных симметрий этого функционала.*

Заметим, что две вариационные симметрии эквивалентны, если они отличаются на тривиальную симметрию, т. е. симметрию, характеристика которой обращается в нуль на всех решениях уравнений Эйлера — Лагранжа. (*Неверно*, однако, что симметрия, оказавшаяся эквивалентной вариационной симметрии, обязательно является вариационной; см. упр. 5.22.)

Пример 5.43. В качестве первой иллюстрации этого результата рассмотрим задачу Кеплера $\ddot{x}+\mu r^{-3}x=0$, $\ddot{y}+\mu r^{-3}y=0$, $\ddot{z}+\mu r^{-3}z=0$, $r^2=x^2+y^2+z^2$ для материальной точки, движущейся под действием гравитационного потенциала, созданного притяжением к центру. Соответствующий лагранжиан имеет вид $L=(1/2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\mu r^{-1}$. Мы уже видели в примере 4.31, как из групп вариационных симметрий сдвигов по времени и вращений в $\mathbb{R}^3$ получаются законы сохранения энергии и момента количества движения. Благодаря ньютоновой природе силового поля имеются еще три дополнительные «скрытые» обобщенные вариационные симметрии этой системы, приводящие к трем дополнительным независимым законам сохранения. Одна такая инфинитезимальная образующая — это векторное поле

$$\mathbf{v}_x=(y\dot{y}+z\dot{z})\,\partial_x+(\dot{x}y-2x\dot{y})\,\partial_y+(\dot{x}z-2x\dot{z})\,\partial_z,$$

две другие получаются из нее перестановками переменных x, y, z. Чтобы доказать, что $\mathbf{v}_x$ — на самом деле вариационная симметрия, мы вычисляем

$$\begin{aligned}\operatorname{pr}^{(1)}\mathbf{v}_x=\mathbf{v}_x+(y\ddot{y}+z\ddot{z}+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\,\partial_{\dot{x}}+(\ddot{x}y-2x\ddot{y}-\dot{x}\dot{y})\,\partial_{\dot{y}}+\\+(\ddot{x}z-2x\ddot{z}-\dot{x}\dot{z})\,\partial_{\dot{z}},\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{pr}^{(1)}\mathbf{v}_x(L)&=(y\dot{y}+z\dot{z})\,\ddot{x}+(\dot{x}y-2x\dot{y})\,\ddot{y}+(\dot{x}z-2x\dot{z})\,\ddot{z}+\\&\quad+\mu r^{-3}\left[(y^2+z^2)\,\dot{x}-xy\dot{y}-xz\dot{z}\right]=\\&=D_t\left[\dot{x}(y\dot{y}+z\dot{z})-x(\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\mu r^{-1}x\right].\end{aligned}$$

Значит, условие (5.54) выполняется. Соответствующие законы сохранения получаются из характеристического вида (5.50) или, проще, из того, что само $\mathrm{pr}^{(1)}\mathbf{v}_x(L)$ обращается в нуль на решениях уравнений Эйлера — Лагранжа; поэтому

$$R_x \equiv \dot{x}(y\dot{y} + z\dot{z}) - x(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \mu r^{-1}x$$

— первый интеграл задачи Кеплера. Вместе с двумя другими законами сохранения R_y и R_z, полученными перестановками переменных, это дает неизменность *вектора Рунге — Ленца*, который можно записать в виде

$$\mathbf{R} \equiv (R_x, R_y, R_z) = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} - \mu\mathbf{x}/|\mathbf{x}| = \dot{\mathbf{x}} \times (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) - \mu\mathbf{x}/|\mathbf{x}|,$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — положение точки, а $\mathbf{A} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$ — момент количества движения. Физически говоря, вектор $\mathbf{R}$ направлен вдоль главной оси конического сечения, заданного планетарной орбитой, а величина его определяет эксцентриситет. (См. Thirring [1; р. 147].)

Пример 5.44. Уравнение sin-Гордона $u_{xt} = \sin u$ является уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала

$$\mathscr{L}[u] = \iint \left(\frac{1}{2}u_x u_t - \cos u\right) dx\, dt.$$

Обобщенное векторное поле $\mathbf{v}_1$ с характеристикой $Q_1 = u_{xxx} + (1/2)u_x^3$ является вариационной симметрией функционала $\mathscr{L}$. В этом можно убедиться непосредственно или, немного легче, с помощью предложения 5.39. Заметим, что

$$\mathsf{D}_{Q_1} = D_x^3 + \frac{3}{2}u_x^2 D_x, \quad \mathsf{D}_{Q_1}^* = -D_x^3 - \frac{3}{2}u_x^2 D_x - 3u_x u_{xx}.$$

Короткое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_{Q_1}[u_{xt} - \sin u] &= u_{xxxxt} + \frac{3}{2}u_x^2 u_{xxt} + 3u_x u_{xx} u_{xt} - \\ &\quad - \left(u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^3\right)\cos u = \\ &= -\mathsf{D}_{Q_1}^*[u_{xt} - \sin u],\end{aligned}$$

т. е. выполняется условие (5.56). Соответствующий закон сохранения имеет характеристический вид

$$\begin{aligned}D_t\left(-\frac{1}{2}u_{xx}^2 + \frac{1}{8}u_x^4\right) + D_x\left(u_{xx}u_{xt} - u_{xx}\sin u + \frac{1}{2}u_x^2\cos u\right) &= \\ = \left(u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^3\right)(u_{xt} - \sin u).\end{aligned}$$

В частности, плотность определяет функционал

$$\mathcal{T}_1[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{8} u_x^4 - \frac{1}{2} u_{xx}^2\right) dx,$$

значение которого не зависит от t, если $u(x, t)$ —решение, производные которого достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \to \infty$.

Более громоздкие вычисления показывают, что поле

$$\mathbf{v}_{Q_2} = \left(u_{xxxxx} + \frac{5}{2} u_x^2 u_{xxx} + \frac{5}{2} u_x u_{xx}^2 + \frac{3}{8} u_x^5\right) \partial_u$$

также является вариационной симметрией с соответствующим законом сохранения

$$\mathcal{T}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u_{xxx}^2 - \frac{5}{4} u_x^2 u_{xx}^2 + \frac{1}{16} u_x^6\right) dx.$$

(См. упр. 5.12 и 5.21, где приводятся дальнейшие результаты об этом уравнении.)

Симметрические линейные системы

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений $\Delta[u] = 0$, определенную матрицей размера $q \times q$, элементы которой — дифференциальные операторы:

$$\Delta_{\mu\nu} = \sum_J a_{\mu\nu}^J(x) D_J, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, q;$$

коэффициенты зависят только от x. Хорошо известно, что эта система представляет собой уравнения Эйлера — Лагранжа для вариационной задачи, если и только если оператор Δ является симметрическим: $\Delta^* = \Delta$. В этом случае мы можем в качестве функционала взять просто

$$\mathcal{L}[u] = \frac{1}{2} \int u \cdot \Delta[u]\, dx. \tag{5.58}$$

(См. также теорему 5.68.)

Всякий закон сохранения для данной симметрической линейной системы можно, не теряя общности, взять в характеристической форме $\operatorname{Div} P = Q \cdot \Delta$. По теореме Нётер характеристика Q определяет вариационную симметрию соответствующей квадратичной вариационной задачи. Здесь мы подробно исследуем случай *линейных* законов сохранения, когда P линейна по u и производным от u и, следовательно, Q зависит лишь от x, и случай *квадратичных* законов сохранения, когда P квадратична, а Q

линейна по u и производным от u. Первый случай приведет к соотношениям «взаимности», связывающим пары решений системы; второй случай будет тесно связан с нашей теорией операторов рекурсии для линейных систем, развитой в предыдущем параграфе.

Заметим, что для линейного закона сохранения $\mathbf{v}_q = \sum q_\alpha(x)\partial_{u^\alpha}$ порождает группу симметрий линейной системы, если и только если $q(x)$ сама является решением: $\Delta[q]=0$. (Преобразования из этой группы — это просто $u \longmapsto u+\varepsilon q$, что отражает линейность системы Δ.) Заметим также, что производная Фреше в этом случае автоматически равна нулю, так что условие (5.56) выполняется и $\mathbf{v}_q$ всегда является вариационной симметрией. Теорема Нётер позволяет заключить, что существует линейный закон сохранения

$$\operatorname{Div} \widehat{P}[u] = q(x)\cdot\Delta[u] \tag{5.59}$$

для любого решения $q(x)$ системы Δ. Другой способ: мы можем вывести (5.59) непосредственно, пользуясь нашей основной процедурой интегрирования по частям.

Предложение 5.45. *Пусть $\Delta[u]=0$ — симметрическая линейная система. Тогда для любых функций $u(x)$, $v(x)$ выполняется соотношение взаимности*

$$v\cdot\Delta[u] - u\cdot\Delta[v] = \operatorname{Div} P[u, v], \tag{5.60}$$

где $P\in\mathscr{A}^p$ — некоторое билинейное выражение, содержащее u, v и их производные.

Общая формула, выражающая P через Δ, достаточно сложна. Однако для операторов второго порядка мы можем получить относительно простое выражение. Нетрудно видеть, что всякий симметрический матричный дифференциальный оператор второго порядка можно записать в специальном виде

$$\Delta_{\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^{p} D_i\cdot a^{ij}_{\mu\nu}(x)D_j + \sum_{i=1}^{p}\left(b^i_{\mu\nu}(x)\cdot D_i + D_i\cdot b^i_{\mu\nu}(x)\right) + c_{\mu\nu}(x),$$
$$\mu,\ \nu = 1, \ldots, q,$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям

$$a^{ij}_{\mu\nu} = a^{ji}_{\nu\mu},\quad b^i_{\mu\nu} = -b^i_{\nu\mu},\quad c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}.$$

Соответствующий вариационный функционал можно взять либо в виде (5.58), либо, выполнив простое интегрирование по частям, в виде

$$\mathscr{L}[u]=\frac{1}{2}\int\sum_{\mu,\nu=1}^{q}\left\{-\sum_{i,j=1}^{p}a_{\mu\nu}^{ij}u_i^\mu u_j^\nu+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{p}b_{\mu\nu}^{i}\left(u^\mu u_i^\nu-u_i^\mu u^\nu\right)+c_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right\}dx. \tag{5.61}$$

Если определить матричные дифференциальные операторы $\mathscr{D}^i$ размера $q\times q$, $i=1,\ldots,p$, с элементами

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}^{i}=\sum_{j=1}^{p}a_{\mu\nu}^{ij}(x)D_j+b_{\mu\nu}^{i}(x),$$

то соотношение взаимности (5.60) выполняется при

$$P_i=v\cdot\mathscr{D}^i[u]-u\cdot\mathscr{D}^i[v],\quad i=1,\ldots,p.$$

Или, в интегральном виде,

$$\int_{\partial\Omega}(v\cdot\mathscr{D}[u]-u\cdot\mathscr{D}[v])\cdot dS=\int_{\Omega}(v\cdot\Delta[u]-u\cdot\Delta[v])\,dx, \tag{5.62}$$

где $v\cdot\mathscr{D}[u]\equiv(v\cdot\mathscr{D}^1[u],\ldots,v\cdot\mathscr{D}^p[u])$.

Например, в случае уравнения Лапласа равенство (5.62) — известная формула Грина, поскольку $\mathscr{D}[u]=\nabla u$. Для уравнений Навье (2.127)

$$\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot u)=0$$

линейной изотропной упругости равенство (5.62) эквивалентно стандартной теореме взаимности Бетти

$$\int_{\partial\Omega}(u\cdot\sigma[v]-v\cdot\sigma[u])\,dS=\int_{\Omega}\{u\cdot[\mu\Delta v+(\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot v)]-$$

$$-v[\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot u)]\}\,dx,$$

где

$$\sigma[u]=\mu(\nabla u+\nabla u^T)+\lambda(\nabla\bullet u)I$$

— тензор напряжений, соответствующий смещению u. (Здесь (5.61) имеет вид

$$\mathscr{L}[u]=-\frac{1}{2}\int\{\mu\|\nabla u\|^2+(\mu+\lambda)(\nabla\cdot u)^2\}\,dx.$$

Этот функционал — не точно то же самое, что обычный вариационный принцип, построенный по плотности накопленной энергии, но отличается от него только на нулевой лагранжиан

$$N=\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq\beta}}\mu\partial(u^\alpha,u^\beta)/\partial(x^i,x^j).)$$

Обратимся к квадратичным законам сохранения. В этом случае характеристика Q — линейная функция от u и производных от u; следовательно, $Q(x, u^{(m)}) = \mathscr{D}[u]$ для некоторой матрицы дифференциальных операторов $\mathscr{D}$ размера $q \times q$, коэффициенты которых зависят только от x. Из теоремы Нётер следует, что Q — характеристика вариационной симметрии и, следовательно, симметрии самих уравнений Эйлера — Лагранжа. Из предложения 5.26 вытекает, что $\mathscr{D}$ — оператор рекурсии для линейной системы, так что $\Delta\mathscr{D} = \tilde{\mathscr{D}}\Delta$ для некоторого дифференциального оператора $\tilde{\mathscr{D}}$. Хотя не каждый оператор рекурсии приводит к вариационной симметрии, те из них, которые приводят, легко описать.

Предложение 5.46. *Набор из q линейных функций $Q = \mathscr{D}[u]$ от u и производных от u образует характеристику закона сохранения для линейной системы $\Delta[u] = 0$, если и только если дифференциальный оператор $\mathscr{D}^* \cdot \Delta$ антисимметрический.*

Это немедленно следует из равенства (5.51), если воспользоваться тем фактом, что производная Фреше линейного набора из q дифференциальных функций $\Delta[u]$ — то же самое, что дифференциальный оператор Δ, определяющий этот набор. В частности, если Δ симметрический, то это условие принимает вид

$$\Delta \cdot \mathscr{D} = -\mathscr{D}^* \cdot \Delta. \tag{5.63}$$

Оно означает, что оператор $\tilde{\mathscr{D}}$, фигурирующий в условии рекурсии $\Delta\mathscr{D} = \tilde{\mathscr{D}}\Delta$, должен совпадать с $-\mathscr{D}^*$. Отметим, что в этом случае всякая *нечетная* степень $\mathscr{D}^{2k+1}$ оператора $\mathscr{D}$ также удовлетворяет условию (5.63). Мы заключаем, что симметрическая линейная система, обладающая одним квадратичным законом сохранения, всегда имеет *бесконечную* иерархию таких законов

$$\operatorname{Div} P^{(k)} = \mathscr{D}^{2k+1}[u] \cdot \Delta[u],$$

зависящих от производных от u все более и более высоких порядков.

При наших условиях невырожденности оператор симметрии $\mathscr{D}$ определяет тривиальный закон сохранения, если и только если он является кратным оператора Δ, т. е. $\mathscr{D} = \mathscr{E} \cdot \Delta$ для некоторого дифференциального оператора $\mathscr{E}$. Поэтому вопрос о том, сколько имеется нетривиальных квадратичных законов сохранения данного порядка, связан с (сложным) вопросом о том, сколько имеется неэквивалентных операторов симметрий данного порядка, рассмотренным в § 5.2. Отметим далее, что если $\mathscr{D}$ — произвольный линейный оператор рекурсии, так что $\Delta\mathscr{D} = \tilde{\mathscr{D}}\Delta$ для некоторого оператора $\tilde{\mathscr{D}}$, то мы всегда можем «антисимметризовать» оператор $\mathscr{D}$ и получить новый оператор рекурсии $\hat{\mathscr{D}}=\frac{1}{2}(\mathscr{D}-\tilde{\mathscr{D}}^*)$, удовлетворяющий условию (5.63) и, следовательно, определяющий закон сохранения. Чтобы увидеть это, достаточно применить сопряжение к условию симметрии:

$$\Delta\tilde{\mathscr{D}}^* = (\tilde{\mathscr{D}}\Delta)^* = (\Delta\mathscr{D})^* = \mathscr{D}^*\Delta$$

(в силу симметричности Δ). Следовательно,

$$\Delta\hat{\mathscr{D}} = \frac{1}{2}(\Delta\mathscr{D} - \Delta\tilde{\mathscr{D}}^*) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathscr{D}}\Delta - \mathscr{D}^*\Delta) = -\hat{\mathscr{D}}^*\Delta.$$

В частности, поскольку для любого оператора симметрии $\mathscr{D}$ оператор $\tilde{\mathscr{D}}$ имеет такие же члены самого высокого порядка, мы видим, что имеется взаимно однозначное соответствие между квадратичными законами сохранения и этими антисимметрическими ведущими членами операторов рекурсии. У скалярных уравнений члены самого высокого порядка должны быть нечетного порядка, и для каждого такого члена мы получаем закон сохранения. Если $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_k$ — линейные операторы вариационных симметрий первого порядка, то кососимметризованное произведение

$$\frac{1}{2}\left[\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2 \ldots \mathscr{D}_k + (-1)^{k-1}\mathscr{D}_k\mathscr{D}_{k-1} \ldots \mathscr{D}_1\right] \tag{5.64}$$

дает вариационный оператор порядка k (или ниже). (Для скалярных уравнений нам нужно брать только нечетное k, и, значит, этот оператор имеет порядок k.) Во многих примерах оказывается, что каждый квадратичный закон сохранения можно получить таким способом.

Пример 5.47. Подведем итог нашим исследованиям симметрий и законов сохранения для двумерного волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ в примерах 2.43, 4.36 и 5.27. Здесь $\Delta = D_t^2 - D_x^2 - D_y^2$. Из операторов рекурсии списка (5.38) первые шесть коммутируют с Δ и антисимметричны. Следовательно, все они удовлетворяют условию (5.63). Соответствующие законы сохранения были получены в примере 4.36. Для оператора дилатации $\mathscr{D}$ мы находим $\Delta\mathscr{D} = (\mathscr{D} + 2)\Delta$, но $\mathscr{D}^* = -\mathscr{D} - 3$. Поэтому $\mathscr{D}$ не определяет закона сохранения; однако модифицированный оператор дилатации $\mathscr{M} = \mathscr{D} + (1/2)$ уже удовлетворяет условию (5.63):

$$\Delta\mathscr{M} = (\mathscr{M} + 2)\Delta \quad \text{и} \quad \mathscr{M}^* = \mathscr{D}^* + \frac{1}{2} = -\mathscr{D} - \frac{5}{2} = -\mathscr{M} - 2.$$

Соответствующий закон сохранения см. в примере 4.36. Наконец, каждый оператор инверсии также определяет закон сохранения, поскольку, скажем, для $\mathcal{S}_x$

$$\Delta\mathcal{S}_x=(\mathcal{S}_x+4x)\Delta \quad \text{и} \quad \mathcal{S}_x^*=-\mathcal{S}_x-4x.$$

Соответствующие законы сохранения были найдены в примере 4.36.

Чтобы найти квадратичные законы сохранения более высоких порядков, нужно рассматривать «кососимметризованные» произведения нечетного порядка (5.64) этих операторов рекурсии, например $(1/2)[\mathcal{R}_{xy}\mathcal{M}\mathcal{S}_x+\mathcal{S}_x\mathcal{M}\mathcal{R}_{xy}]$. Некоторые законы сохранения второго порядка и соответствующие операторы симметрии приведены в следующей таблице. (См. также пример 5.49.)

Оператор рекурсии	Характеристика	Плотность закона сохранения
D_x^3	u_{xxx}	$u_{xx}u_{xt}$
$D_x^2D_t$	u_{xxt}	$\frac{1}{2}(u_{xt}^2+u_{xx}^2+u_{xy}^2)$
D_t^3	u_{ttt}	$\frac{1}{2}(u_{tt}^2+u_{xt}^2+u_{yt}^2)$
$D_x\mathcal{R}_{xy}D_x$	$-yu_{xxx}+xu_{xyy}+u_{xy}$	$u_{xt}(xu_{xy}-yu_{xx})$
$D_x\mathcal{R}_{xy}D_y-\frac{1}{2}D_x^2-\frac{1}{2}D_y^2$	$-yu_{xxy}+xu_{xyy}-\frac{1}{2}u_{xx}+\frac{1}{2}u_{yy}$	$u_{xx}\left(yu_{yt}+\frac{1}{2}u_t\right)-u_{yy}\left(xu_{xt}+\frac{1}{2}u_t\right)$
$D_x\mathcal{R}_{xt}D_x$	$xu_{xxt}+tu_{xxx}+u_{xt}$	$x\hat{T}+tu_{xx}u_{xt}$
$D_x\mathcal{M}D_x$	$xu_{xxx}+yu_{xxy}+tu_{xxt}+\frac{3}{2}u_{xx}$	$T^*+t\hat{T}$
$\mathcal{R}_{xt}D_t\mathcal{R}_{xt}$	$x^2u_{xtt}+2xtu_{xxt}+t^2u_{xxx}+xu_{tt}+2tu_{xt}+xu_{xx}$	$(x^2+t^2)\hat{T}+\frac{1}{2}u_y^2+t(2xu_{xt}u_{tt}-u_yu_{yt})$
$D_x\mathcal{S}_tD_x$	$(x^2+y^2+t^2)u_{xxt}+2xtu_{xxx}+2ytu_{xxy}+2xu_{xt}+3tu_{xx}$	$(x^2+y^2+t^2)\hat{T}+u_x^2+2tT^*$

где

$$\hat{T}=\frac{1}{2}(u_{xt}^2+u_{xx}^2+u_{xy}^2),$$

$$T^*=xu_{xx}u_{xt}+yu_{xx}u_{yt}+\frac{1}{2}u_{xx}u_t$$

Действие симметрий на законы сохранения

Другой способ получать законы сохранения состоит в том, чтобы применять известные образующие групп симметрий к известным законам сохранения. К сожалению, этот способ не гарантирует получение нетривиальных законов, однако мы можем точно установить, когда это происходит.

Предложение 5.48. *Пусть система* Δ *вполне невырождена и* $\operatorname{Div} P = 0$ *— закон сохранения. Если* $\mathbf{v}_R$ *— эволюционная симметрия системы* Δ, *то индуцированный набор* $\tilde{P} = \operatorname{pr} \mathbf{v}_R(P)$ *с элементами* $\tilde{P}_i = \operatorname{pr} \mathbf{v}_R(P_i)$ *также является законом сохранения:* $\operatorname{Div} \tilde{P} = 0$. *Кроме того, если* $\Delta = \mathsf{E}(L)$ *— система уравнений Эйлера — Лагранжа,* P *имеет характеристику* Q, *соответствующую вариационной симметрии* $\mathbf{v}_Q$, *и* $\mathbf{v}_R$ *— вариационная симметрия, то* $\tilde{P}$ *имеет характеристику* $\tilde{Q}$, *соответствующую скобке Ли* $\mathbf{v}_{\tilde{Q}} = [\mathbf{v}_R, \mathbf{v}_Q]$ *этих двух симметрий.*

Доказательство. Предположим, что закон сохранения задан в характеристическом виде (5.50). (Отметим, что если P_0 — тривиальный закон сохранения, таковым является и $\operatorname{pr} \mathbf{v}_R(P_0)$, так что этот первый шаг оправдан.) Применяя $\operatorname{pr} \mathbf{v}_R$, находим

$$\operatorname{Div} [\operatorname{pr} \mathbf{v}_R(P)] = \operatorname{pr} \mathbf{v}_R(Q) \cdot \Delta + Q \cdot \operatorname{pr} \mathbf{v}_R(\Delta) \tag{5.65}$$

(мы воспользовались равенством (5.19)). Поскольку на решениях системы Δ $\operatorname{pr} \mathbf{v}_R(\Delta) = 0$, правая часть равенства (5.65) обращается на решениях в нуль, что доказывает первую часть теоремы. Если $\Delta = \mathsf{E}(L)$ и $\mathbf{v}_R$ — вариационная симметрия, то мы можем воспользоваться предложением 5.39, чтобы переписать второе слагаемое в правой части (5.65), а затем проинтегрировать по частям:

$$Q \cdot \operatorname{pr} \mathbf{v}_R(\Delta) = -Q \cdot \mathsf{D}_R^*(\Delta) = -\mathsf{D}_R(Q) \cdot \Delta - \operatorname{Div} B =$$
$$= -\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(R) \cdot \Delta - \operatorname{Div} B$$

для некоторого набора из p дифференциальных функций B, линейно зависящего от Δ и ее полных производных. Следовательно, это тривиальный закон сохранения первого типа. Таким образом, в силу (5.22)

$$\operatorname{Div} [\operatorname{pr} \mathbf{v}_R(P) + B] = \{\operatorname{pr} \mathbf{v}_R(Q) - \operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(R)\} \cdot \Delta = \tilde{Q} \cdot \Delta$$

— характеристический вид нашего закона сохранения, и доказательство закончено. □

Этот результат наиболее полезен в случае симметрических линейных систем. В самом деле, если $P \in \mathcal{A}^p$ определяет квадратичный закон сохранения, соответствующий линейной характеристике $Q=\mathscr{D}[u]$, а $\mathbf{v}_R$ — линейная симметрия, так что $R=\mathscr{E}[u]$ для некоторого дифференциального оператора $\mathscr{E}$, удовлетворяющего условию $\Delta\cdot\mathscr{E}=\tilde{\mathscr{E}}\cdot\Delta$, то $\operatorname{pr}\mathbf{v}_R(P)$ приводит к закону сохранения с характеристикой $\tilde{Q}=(\mathscr{D}\cdot\mathscr{E}+\tilde{\mathscr{E}}^*\cdot\mathscr{D})[u]$. В частности, если $\mathbf{v}_R$ — вариационная симметрия, то $\tilde{Q}$ — характеристика, отвечающая коммутатору $[\mathscr{D},\mathscr{E}]=\mathscr{D}\cdot\mathscr{E}-\mathscr{E}\cdot\mathscr{D}$.

Пример 5.49. Для двумерного волнового уравнения плотности законов сохранения из таблицы примера 5.47 легче всего вычисляются с помощью этого способа. Например, закон сохранения с характеристикой u_{xxt} можно построить, либо применяя продолжение симметрии $\mathbf{v}=(1/2)u_{xx}\partial_u$ к закону сохранения энергии с характеристикой u_t, либо применяя продолжение симметрии $\mathbf{w}=(1/2)u_{xt}\partial_u$ к закону сохранения импульса с характеристикой u_x. (В первом случае $\Delta D_x^2=D_x^2\Delta$, так что новая характеристика на самом деле равна $\operatorname{pr}\mathbf{v}(u_t)+(1/2)(D_x^2)^*u_t=u_{xxt}$.) В первом случае новая плотность равна

$$\operatorname{pr}\mathbf{v}\left[\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_y^2\right]=\frac{1}{2}\left(u_tu_{xxt}+u_xu_{xxx}+u_yu_{xxy}\right)\equiv T,$$

а во втором —

$$\operatorname{pr}\mathbf{w}\left[u_xu_t\right]=\frac{1}{2}\left(u_tu_{xxt}+u_xu_{xtt}\right)\equiv\tilde{T}.$$

Поскольку обе эти плотности имеют одинаковые характеристикн, они должны быть эквивалентны:

$$T=\tilde{T}+D_xR+D_yS$$

на решениях волнового уравнения. Иными словами, у нас есть свобода (a) подставить вместо производных соответствующие выражения, полученные из уравнения и его продолжения, и (b) проинтегрировать по частям по x и y (но *не* по t); таким образом, u_tu_{xxt} эквивалентна $-u_{xt}^2$, но *не* $u_{xx}u_{tt}$. Читатель может проверить, что T и $\tilde{T}$ эквивалентны плотности второго порядка, выписанной в упомянутой выше таблице.

В качестве второго примера найдем закон сохранения, соответствующий оператору $D_x\mathscr{R}_{xt}D_x$, применяя симметрию $\tilde{\mathbf{v}}=(1/2)\mathscr{R}_{xt}D_x[u]\partial_u=(1/2)(xu_{xt}+tu_{xx})\partial_u$ к закону сохранения с характеристикой u_x. Мы получаем

$$\operatorname{pr}\hat{\mathbf{v}}\left[u_xu_t\right]=\frac{1}{2}\left\{D_x(xu_{xt}+tu_{xx})u_t+u_xD_t(xu_{xt}+tu_{xx})\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}(xu_{xxt}+u_{xt}+tu_{xxx})u_t+\frac{1}{2}u_x(xu_{xtt}+tu_{xxt}+u_{xx}).$$

Оба члена самого низкого порядка $u_t u_{xt}$ и $u_x u_{xx}$ являются производными по x. Следовательно, эта плотность эквивалентна одной из плотностей нашей таблицы, в чем можно убедиться аналогичным интегрированием по частям.

Анормальное системы и вторая теорема Нётер

Связь между вариационными симметриями и законами сохранения для систем, не являющихся вполне невырожденными, менее понятна. Хотя основная формула интегрирования по частям (4.39) по-прежнему дает вариационную симметрию для каждого закона сохранения и наоборот, теперь нет гарантий, что нетривиальные симметрии приведут к нетривиальным законам сохранения или наоборот. В случае аналитических систем мы видели, что возможны два основных типа анормальности. Переопределенные системы в этом отношении менее поняты, и точная связь между их симметриями и законами сохранения не установлена. Однако недоопределенные системы подпадают под действие второй теоремы Нётер, относящейся к системам, допускающим бесконечномерные группы вариационных симметрий. Получающиеся зависимости между уравнениями Эйлера — Лагранжа можно интерпретировать как тривиальные законы сохранения, определенные нетривиальными группами вариационных симметрий, так что красивое взаимно однозначное соответствие из теоремы 5.42 в случае недоопределенных систем нарушается.

Теорема 5.50. *Вариационная задача $\mathscr{L}[u] = \int L\,dx$ допускает бесконечномерную группу вариационных симметрий, характеристики $Q[u; h]$ которых зависят от произвольной функции $h(x)$ (и ее производных), если и только если существуют дифференциальные операторы $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_q$, не все равные нулю, такие, что*

$$\mathscr{D}_1 \mathsf{E}_1(L) + \ldots + \mathscr{D}_q \mathsf{E}_q(L) \equiv 0 \tag{5.66}$$

для всех x, u.

Доказательство. Предположим сначала, что уравнения Эйлера — Лагранжа для $\mathscr{L}$ недоопределены, так что на них имеется соотношение вида (5.66). Пусть $h(x)$ — произвольная функция. Тогда простое интегрирование по частям показывает, что

$$\begin{aligned} 0 &= h(x)[\mathscr{D}_1 \mathsf{E}_1(L) + \ldots + \mathscr{D}_q \mathsf{E}_q(L)] = \\ &= \mathscr{D}_1^*[h] \cdot \mathsf{E}_1(L) + \ldots + \mathscr{D}_q^*[h] \cdot \mathsf{E}_q(L) - \mathrm{Div}\, P \end{aligned} \tag{5.67}$$

для некоторого $P \in \mathcal{A}^p$, линейно зависящего от $\mathsf{E}(L)$ и его производных. Если мы положим $Q_\nu = \mathcal{D}^*[h]$, $\nu = 1, \ldots, q$, то выписанное выше тождество будет иметь вид закона сохранения в характеристическом виде, где Q — характеристика, а $P = P[u; h] \in \mathcal{A}^p$ — закон сохранения, который на самом деле тривиален (первого типа). Теперь мы, очевидно, можем воспользоваться равенством (5.67), чтобы доказать, что для любой функции $h(x)$ поле $\mathbf{v}_{Q[u;\,h]}$ определяет вариационную симметрию функционала $\mathcal{L}[u]$.

Обратное доказывается непосредственно, если все $Q_\nu[u; h] = \tilde{\mathcal{D}}[h]$ линейны по h и ее производным; здесь $\tilde{\mathcal{D}}_\nu$ — дифференциальные операторы, коэффициенты которых могут зависеть от u. Начиная с условия (5.54) того, что поле $\mathbf{v}_Q$ — вариационная симметрия, мы интегрируем по частям, чтобы получить соответствующий закон сохранения

$$\operatorname{Div} P = Q \cdot \mathsf{E}(L) = \tilde{\mathcal{D}}_1[h]\,\mathsf{E}_1(L) + \ldots + \tilde{\mathcal{D}}_q[h]\,\mathsf{E}_q(L).$$

Дальнейшее интегрирование по частям фактически обращает вывод формулы (5.67) и приводит к тождеству вида

$$\operatorname{Div} \tilde{P} = h(x)\left[\tilde{\mathcal{D}}_1^*\mathsf{E}_1(L) + \ldots + \tilde{\mathcal{D}}_q^*\mathsf{E}_q(L)\right], \tag{5.68}$$

справедливому для произвольной функции $h(x)$. Доказательство завершает применение следующего «формального» варианта леммы Буа — Раймонда из вариационного исчисления.

Лемма 5.51. *Пусть $R(x, u^{(n)})$ — дифференциальная функция. Предположим, что для каждой гладкой функции $h(x)$ существует функция $P[u] = P_h[u] \in \mathcal{A}^p$, такая, что*

$$h(x)\,R(x, u^{(n)}) = \operatorname{Div} P(x, u^{(m)}).$$

Тогда $R(x, u^{(n)}) = r(x)$ — функция только от x.

Доказательство. Предположим, что R зависит от производных от u порядка n и ниже и что $\partial R(x_0, u_0^{(n)})/\partial u_J^\alpha \neq 0$ для некоторого $\#J = n \geqslant 0$, $(x_0, u_0^{(n)}) \in M^{(n)}$. Выберем $h(x)$ так, чтобы $\partial_J h(x_0) \neq 0$, а все другие производные от h порядка $\leqslant n$ обращались в нуль в точке x_0. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\mathsf{E}_\alpha(h \cdot R)(x_0, u_0^{(n)}) = (-1)^n \partial_J h(x_0) \cdot \partial R(x_0, u_0^{(n)})/\partial u_J^\alpha \neq 0.$$

Из теоремы 4.7 вытекает, что $h \cdot R$ не является полной дивергенцией, что противоречит нашему предположению. Несложная индукция доказывает теперь, что R может зависеть только от x. □

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее простое следствие этого результата.

Следствие 5.52. *Пусть* $P \in \mathcal{A}^r$ *— набор из* r *дифференциальных функций. Тогда* $\int_\Omega P \cdot Q\,dx = 0$ *для всех* $Q \in \mathcal{A}^r$ *и всех* $\Omega \subset X$, *если и только если* $P \equiv 0$ *для всех* x, u.

Доказательство. Применяя покомпонентно доказанную нами лемму, мы заключаем, что $P = p(x)$ зависит только от x. Далее для данного $1 \leqslant \nu \leqslant r$ выберем $Q_\mu[u] = \delta_\mu^\nu u^\alpha$ для произвольного $1 \leqslant \alpha \leqslant q$. Тогда $\mathrm{E}_\alpha(p \cdot Q) = p_\nu(x) \equiv 0$ по теореме 4.7. Следовательно, $P \equiv 0$ для всех x, u. □

Обращаясь к (5.68), мы видим, что

$$\widetilde{\mathcal{D}}_1^* \mathrm{E}_1(L) + \ldots + \widetilde{\mathcal{D}}_q^* \mathrm{E}_q(L) = r(x)$$

является функцией только от x. Если $r \equiv 0$, то все доказано; в противном случае поделим на $r(x)$ и еще раз продифференцируем (по любой переменной x^i). В результате получим тождество требуемого вида (5.66). □

Более общо, если $h(x)$ присутствует в $Q[u; h]$ нелинейно, мы можем тем не менее с помощью следующей леммы свести этот случай к предыдущему.

Лемма 5.53. *Предположим, что* $Q[u; h]$ *— характеристика вариационной симметрии функционала* $\mathcal{L}$, *зависящая от произвольной функции* $h(x)$. *Пусть* $\mathcal{D}_Q = \mathcal{D}_{Q[u;\,h]}$ *обозначает производную Фреше от* Q *по* h *с элементами*

$$\mathcal{D}_Q^\nu = \sum \partial Q_\nu / \partial h_J \cdot D_J, \quad \nu = 1, \ldots, q \quad (h_J = \partial_J h).$$

Тогда $Q' = \mathcal{D}_Q[k]$ *является характеристикой вариационной симметрии, линейно зависящей от произвольной функции* $k(x)$.

Доказательство. По предположению для любой функции $h(x)$ существует набор $B_h[u] \in \mathcal{A}^p$, такой, что

$$\mathbf{pr}\,\mathbf{v}_{Q[u;\,h]}(L) = \mathrm{Div}\, B_h.$$

Если в этом тождестве заменить h на $h+\varepsilon k$ и продифференцировать по ε, то получим при $\varepsilon=0$

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_{Q'}(L)=\operatorname{Div} B', \quad B'=\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} B_{h+\varepsilon k},$$

что и доказывает лемму. □

В теореме 5.50 каждая нетривиальная симметрия $Q[u;\ h]$ (линейная по h) дает тривиальный закон сохранения с характеристикой Q. Имеет место также и обратное утверждение: если система уравнений Эйлера — Лагранжа обладает тривиальным законом сохранения, соответствующим нетривиальной вариационной симметрии, то эта система обязательно является недоопределенной и, следовательно, допускает целое бесконечномерное семейство таких симметрий, зависящих от произвольной функции. (См. упр. 5.24.) (В теории относительности, ср. Goldberg [1], эти «тривиальные» законы сохранения на самом деле являются одними из наиболее важных тождеств. Возможно, здесь наш выбор терминологии несколько сбивает с толку.)

Пример 5.54. *Параметрические вариационные задачи.* Рассмотрим вариационный функционал первого порядка вида

$$\mathscr{L}[u,\ v]=\int L(x,\ u,\ v,\ u_x,\ v_x)\,dx,$$

где $x\in\mathbb{R}$. Рассмотрим бесконечномерную группу симметрий, состоящую из произвольных замен $x\longmapsto\psi(x)$ независимой переменной. Ее инфинитезимальные образующие будут иметь вид $\mathbf{v}_h=h(x)\partial_x$, где h — произвольная функция от x. В силу инфинитезимального критерия (4.15) это группа вариационных симметрий, если только

$$h(x)L_x+h'(x)\left[-u_xL_{u_x}-v_xL_{v_x}+L\right]=0$$

(нижние индексы означают производные). (Обобщение на дивергентные симметрии здесь ничего не добавляет). Поскольку и h и h' произвольны, функция L должна не зависеть от x и иметь вид $L=u_x\tilde{L}(u,v,v_x/u_x)$. Мы заключаем, что здесь обязательно имеем дело с параметрической вариационной задачей

$$\mathscr{L}[u]=\int\tilde{L}\left(u,\ v,\ \frac{v_x}{u_x}\right)u_x\,dx=\int\tilde{L}\left(u,\ v,\ \frac{dv}{du}\right)du,$$

где v можно считать, скажем, функцией только от u.

Вторая теорема Нётер утверждает, что между двумя указанными уравнениями Эйлера — Лагранжа

$$\mathsf{E}_u(L) = u_x\widetilde{L}_u - D_x\left(\widetilde{L} - \frac{v_x}{u_x}\widetilde{L}_{v_u}\right) = 0, \quad \mathsf{E}_v(L) = u_x\widetilde{L}_v - D_x\widetilde{L}_{v_u} = 0$$

имеется зависимость. Эволюционный вид поля $\mathbf{v}_h$ есть $-h(x)(u_x\partial_u + v_x\partial_v)$. Поэтому, согласно (5.66), (5.67), имеем тождество

$$u_x\mathsf{E}_u(L) + v_x\mathsf{E}_v(L) = 0.$$

Это рассуждение, очевидно, распространяется на вариационные задачи бóльших порядков и бóльших размерностей.

Пример 5.55. Рассмотрим вариационную задачу

$$\mathscr{L}[u] = \frac{1}{2}\iint (u_x + v_y)^2\, dx\, dy,$$

уравнения Эйлера — Лагранжа

$$-\mathsf{E}_u(L) = u_{xx} + v_{xy} = 0, \quad -\mathsf{E}_v(L) = u_{xy} + v_{yy} = 0$$

которой составляют, как мы видели в § 2.6, недоопределенную систему, причем $D_y\mathsf{E}_u(L) - D_x\mathsf{E}_v(L) \equiv 0$. Доказательство теоремы 5.50 дает соответствующую бесконечномерную группу симметрий, порожденную полем $\mathbf{v}_h = -h_y\partial_u + h_x\partial_v$, где $h(x, y)$ — произвольная функция. Преобразования из этой группы

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v}_h)(u, v) = (u - \varepsilon h_y,\ v + \varepsilon h_x),$$

очевидно, не меняют $\mathscr{L}$. Хотя эти однопараметрические группы явно нетривиальны, соответствующие законы сохранения тривиальны. Например, если $h(x, y) = -y$, так что $\mathbf{v}_h = \partial_u$, мы получаем тривиальный закон с компонентами $(u_x + v_y,\ 0)$, т. е.

$$D_x(u_x + v_y) = u_{xx} + v_{xy}.$$

На первый взгляд этот закон не выглядит тривиальным, но если мы прибавим очевидно тривиальный закон (первого типа) $(y(u_{xy} + v_{yy}),\ -y(u_{xx} + v_{xy}))$, то получим эквивалентный тривиальный закон сохранения второго типа, поскольку

$$(u_x + v_y) + y(u_{xy} + v_{yy}) = D_y(y(u_x + v_y)),$$
$$-y(u_{xx} + v_{xy}) = -D_x(y(u_x + v_y)).$$

Урок состоит в том, что для анормальных систем требуется еще больше тщательности, чтобы отличить тривиальные законы от нетривиальных; даже характеристики здесь не являются больше верным указателем тривиальности.