5.4. ВАРИАЦИОННЫЙ КОМПЛЕКС

Как отмечалось во введении к этой главе, вариационный комплекс берет свое начало из трех главных результатов, составляющих основу большей части нашей работы по симметриям, законам сохранения, дифференциальным операторам и т. д. Первый — это характеризация ядра оператора Эйлера как пространства полных дивергенций, данная теоремой 4.7; второй — характеризация всех нулевых дивергенций как полных роторов, данная теоремой 4.24; третий — характеризация уравнений Эйлера — Лагранжа симметричностью их производных Фреше, см. доказательство леммы 5.38. Два последних результата, как мог обнаружить читатель, доказать особенно нелегко. Однако, если их переформулировать на более естественном языке дифференциальных форм, их можно получить снова посредством построения подходящих операторов гомотопии, аналогичных тем, которые использовались в доказательстве леммы Пуанкаре в § 1.5. (Мы настоятельно рекомендуем читателю основательно ознакомиться с понятиями обычных дифференциальных форм на многообразиях, изложенными в § 1.5, прежде чем пытаться изучать формы более сложных типов, с которыми приходится иметь дело здесь.) Хотя в этой книге нам потребуются лишь три указанных выше частных примера полного вариационного комплекса, мы предпочли включить его целиком, поскольку (a) в общем случае доказательства ничуть не труднее и (b) знакомство с этим комплексом обеспечит читателю прекрасную подготовку к дальнейшему чтению современных работ и к исследованиям по геометрической теории вариационного исчисления на многообразиях.

Вариационный комплекс естественно расщепляется на две составляющие. В первой части соответствующие дифференциальные формы — это выражения, включающие дифференциалы dx^i независимых переменных, коэффициенты которых, однако, являются дифференциальными функциями. Обычный дифференциал d при этом заменяется «полным» дифференциалом D, который используется вместо частных производных. Хотя определения здесь проще, доказательство точности является намного более сложным и требует техники «операторов Эйлера высших порядков», развитой в конце этого параграфа. Результат о нулевых дивергенциях появляется в предпоследнем члене этой части комплекса. Во второй части вариационного комплекса роль функций берут на себя функционалы вариационного исчисления, а «функциональные формы» определяются аналогично. Дифференциал теперь является аналогом вариационной производной функционала и называется поэтому вариационным дифференциалом. Хотя объекты этой части меньше нам знакомы, доказательство точности получается с помощью относительно простого расширения оператора гомотопии де Рама. Сюда включается решение обратной задачи Гельмгольца вариационного исчисления. Сам оператор Эйлера обеспечивает связь между этими двумя составляющими; характеризация нулевых лагранжианов дает оставшийся шаг в полной точности вариационного комплекса.

D-комплекс

Первая часть вариационного комплекса получается переформулировкой комплекса де Рама для пространства дифференциальных функций, определенных на $M \subset X \times U$. *Полная дифференциальная r-форма* будет иметь вид

$$\omega = \sum_J P_J[u]\, dx^J,$$

где коэффициенты $P_J \in \mathcal{A}$ — теперь дифференциальные функции, а $dx^J = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant p$, составляют стандартный базис пространства $\bigwedge_r T^*X$. Если мы заменим u некоторой функцией $u = f(x)$, то снова получим обычную дифференциальную r-форму на пространстве X. Мы дифференцируем ω, обращаясь с u как с функциями от x, что приводит к *полному дифференциалу*

$$\mathrm{D}\omega = \sum_{i=1}^{p} \sum_J D_i P_J\, dx^i \wedge dx^J. \tag{5.69}$$

Например, если $p = 2$, то

$$\omega = yu_x\, dx + uu_{xy}\, dy$$

— полная один-форма с полным дифференциалом

$$\mathrm{D}\omega = [D_x(uu_{xy}) - D_y(yu_x)]\, dx \wedge dy =$$
$$= [uu_{xxy} + u_x u_{xy} - u_x - yu_{xy}]\, dx \wedge dy.$$

Поскольку при подстановке $u = f(x)$ полный дифференциал совпадает с внешней производной, легко видеть, что D определяет комплекс (называемый D-*комплексом*) на пространстве полных дифференциальных форм. Это означает, что $\mathrm{D}(\mathrm{D}\omega) = 0$ для любой формы ω. На подходящих подобластях $M \subset X \times U$ этот комплекс точен. Явное требование на M состоит в том, что эта подобласть должна быть *вполне звездной*. Это означает, что она (a) *вертикально звездная*, так что каждый вертикальный слой $M_x = \{u\colon (x, u) \in M\}$ — звездная подобласть в U, и (b) горизонтальный слой в базе $\Omega = \{x\colon (x, 0) \in M\}$ — звездная подобласть в X.

Теорема 5.56. *Пусть M — вполне звездная подобласть. Тогда D-комплекс*

$$0 \to \mathbb{R} \to \wedge_0 \xrightarrow{\mathrm{D}} \wedge_1 \xrightarrow{\mathrm{D}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{D}} \wedge_{p-1} \xrightarrow{\mathrm{D}} \wedge_p$$

точен ($\wedge_r$ обозначает пространство полных r-форм). Иными словами, если $\omega \in \wedge_r$ при $0 < r < p$, то форма ω D-замкнута: $\mathrm{D}\omega = 0$, если и только если форма ω D-точна: $\omega = \mathrm{D}\eta$ для некоторой полной $(r-1)$-формы η, а если $\omega \in \wedge_0$, так что ω — просто дифференциальная функция, то $\mathrm{D}\omega = 0$, если и только если ω — константа.

Пример 5.57. Точность D-комплекса в члене $\wedge_{p-1}$, как легко видеть, эквивалентна характеризации нулевых дивергенций, данной в теореме 4.24. В самом деле, пользуясь обозначениями из примера 1.62, получаем, что каждую $(p-1)$-форму $\omega = \sum (-1)^{j-1} P_j \, d\hat{x^j}$ можно отождествить с ее коэффициентами $P = (P_1, \ldots, P_p) \in \mathscr{A}^p$. Имеем $\mathrm{D}\omega = (\mathrm{Div}\, P)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$, так что форма ω D-замкнута, если и только если P — нулевая дивергенция. С другой стороны, $(p-2)$-форма принимает вид $\eta = \sum (-1)^{j+k-1} Q_{jk}\, d\hat{x^{jk}}$, где $Q_{jk} = -Q_{kj}$, и $\mathrm{D}\eta = \omega$, если и только если $P_j = \sum D_k Q_{jk}$. (Явные формулы, выражающие Q через P, будут найдены в процессе доказательства теоремы 5.56.)

Если мы всюду подставим $u = f(x)$, то D-комплекс сведется к обычному комплексу де Рама, который по лемме Пуанкаре (теорема 1.61) точен. Однако это *не* доказывает точность D-комплекса! Чтобы увидеть это, рассмотрим полную r-форму $\omega[u]$, зависящую от u и ее производных, и соответствующую r-форму $\tilde{\omega}_f(x) = \omega[f(x)]$ на $\Omega \subset X$, полученную подстановкой всюду вместо u функции $f(x)$. Тогда $\mathrm{D}\omega = 0$, если и только если $d\tilde{\omega}_f = 0$ для каждого f и, следовательно, $\tilde{\omega}_f = d\tilde{\eta}_f$ для некоторой $(r-1)$-формы $\tilde{\eta}_f(x)$. Из формулы гомотопии Пуанкаре (1.69) *не* ясно, почему для $\tilde{\eta}_f$ существует полная $(r-1)$-форма $\eta[u]$, зависящая лишь от u и ее производных, которая в каждом случае при подстановке $u = f(x)$ дает $\tilde{\eta}_f$: $\eta[f(x)] = \tilde{\eta}_f(x)$ для всех f. Причина состоит в том, что (1.69) не является локальным отображением.

В самом деле, комплекс де Рама точен даже в члене $\wedge_{p-1} T^*\Omega \xrightarrow{d} \wedge_p T^*\Omega \to 0$, но это совершенно неверно для

D-комплекса. Каждая полная p-форма $\omega = L[u]\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$, очевидно, D-замкнута, но она D-точна, $\omega = \mathrm{D}\eta$, если и только если L — полная дивергенция, $L = \mathrm{Div}\, P$, а, как мы знаем, не каждая дифференциальная функция является полной дивергенцией. Доказательство теоремы 5.56 потребует поэтому новых методов, в частности нового «оператора полной гомотопии». Мы откладываем его до конца этого параграфа.

Следующий шаг в построении вариационного комплекса — продолжить D-комплекс дальше за член $\bigwedge_p$. В сущности мы уже знаем, как это делать, поскольку по теореме 4.7 форма $\omega = L\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$ D-точна (это означает, что $L = \mathrm{Div}\, P$ для некоторого $P \in \mathcal{A}^p$), если и только если $\mathrm{E}(L) = 0$, где E — оператор Эйлера. Таким образом, за отображением $\mathrm{D}\colon \bigwedge_{p-1} \to \bigwedge_p$ должен следовать оператор Эйлера или вариационная производная, возможно, в более внутренней форме. Это будет осуществлено, и вариационный комплекс продолжится даже дальше посредством введения «функциональных форм» и «вариационных дифференциалов», которые в некотором смысле делают с зависимыми переменными то, что D-комплекс делает с независимыми переменными.

Вертикальные формы

Полные r-формы активны на «горизонтальных» переменных x из $M \subset X \times U$ — в них присутствуют лишь дифференциалы dx^i. Вертикальные формы строятся аналогично — они активны на «вертикальных» переменных, состоящих из u и их производных[1]. А именно, *вертикальная* k-форма — это *конечная* сумма

$$\hat{\omega} = \sum P_J^\alpha[u]\, du_{J_1}^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge du_{J_k}^{\alpha_k}, \tag{5.70}$$

в которой коэффициенты $P_J^\alpha \in \mathcal{A}$ — дифференциальные функции. Поскольку в этих формах появляются лишь дифференциалы du_J^α, аналогом дифференциала обычного комплекса де Рама является *вертикальный дифференциал*

$$\hat{d}\hat{\omega} = \sum \frac{\partial P_J^\alpha}{\partial u_K^\beta}\, du_K^\beta \wedge du_{J_1}^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge du_{J_k}^{\alpha_k}. \tag{5.71}$$

Если $p = q = 1$, то типичная вертикальная форма — например, $\hat{\omega} = x u_{xx}\, du \wedge du_x$. Ее вертикальный дифференциал тогда равен

[1]) Можно, конечно, строить «гибридные» формы на обоих множествах переменных, что приводит к важному «вариационному бикомплекту». Однако это увело бы нас слишком далеко.

$\hat{d}\hat{\omega} = x\,du \wedge du_x \wedge du_{xx}$, независимая переменная x присутствует только как параметр.

Поскольку всякая данная вертикальная форма $\hat{\omega}$ зависит лишь от конечного числа переменных u_J^α и, следовательно, обитает на пространстве конечных струй $M^{(n)}$, вертикальный дифференциал $\hat{d}\hat{\omega}$ в действительности — то же самое, что и дифференциал де Рама по этим переменным, причем остальные независимые переменные играют роль параметров. Таким образом, легко видеть, что вертикальный дифференциал обладает обычными свойствами билинейности, антидифференцирования и замкнутости, как и обычный дифференциал:

$$\hat{d}(c\hat{\omega} + c'\hat{\omega}') = c\hat{d}\hat{\omega} + c'\hat{d}\hat{\omega}',$$

$$\hat{d}(\hat{\omega} \wedge \hat{\eta}) = (\hat{d}\hat{\omega}) \wedge \hat{\eta} + (-1)^k \hat{\omega} \wedge \hat{d}\hat{\eta},$$

$$\hat{d}(\hat{d}\hat{\omega}) = 0,$$

где $\hat{\omega}$, $\hat{\omega}' \in \hat{\Lambda}^k$ ($\hat{\Lambda}^k$ — пространство вертикальных k-форм на M), $\hat{\eta} \in \hat{\Lambda}^l$ и c, c' — константы. Кроме того, доказательство леммы Пуанкаре немедленно распространяется на эту ситуацию и дает доказательство точности «вертикального комплекса» на подходящих подобластях $M \subset X \times U$.

Теорема 5.58. *Пусть $M \subset X \times U$ — вертикально звездная область. Тогда вертикальный комплекс*

$$\hat{\Lambda}^0 \xrightarrow{\hat{d}} \hat{\Lambda}^1 \xrightarrow{\hat{d}} \hat{\Lambda}^2 \xrightarrow{\hat{d}} \ldots$$

точен. Иными словами, при $k > 0$ вертикальная k-форма $\hat{\omega}$ замкнута: $\hat{d}\hat{\omega} = 0$, если и только если она точна: $\hat{\omega} = \hat{d}\hat{\eta}$ для некоторой $(k-1)$-формы $\hat{\eta}$. При $k = 0$ 0-форма или дифференциальная функция $\hat{d}$-замкнута, если и только если она является функцией только от x.

Заметим, что, хотя всякая данная вертикальная форма зависит только от конечного числа переменных, весь вертикальный комплекс никогда не оборвется, поскольку мы можем продолжать его, добавляя производные от u все более высоких порядков, чтобы строить ненулевые вертикальные k-формы для любого $k \geqslant 0$.

Доказательство теоремы 5.58 использует тот же оператор гомотопии, который использовался в обычной лемме Пуанкаре, но приспособленный к бесконечному числу переменных u_J^α. Основное векторное поле растяжений — это поле $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_u =$

$=\sum u_J^\alpha \partial/\partial u_J^\alpha$ — бесконечное продолжение эволюционного векторного поля $\mathbf{v}_u=\sum u^\alpha \partial/\partial u^\alpha$. Для таких векторных полей и вертикальных форм корректно определено их внутреннее произведение, причем $\{\partial/\partial u_J^\alpha\}$ и $\{du_J^\alpha\}$ — двойственные базисы соответствующих касательного и кокасательного пространств. (Заметим, что, поскольку вертикальные формы должны быть конечными суммами (5.70), мы можем допускать бесконечные суммы в наших векторных полях, поскольку при вычислении, скажем, $\operatorname{pr}\mathbf{v}_u \rfloor \omega$ нам понадобится лишь конечное число членов полного продолжения поля $\mathbf{v}_u$.) Формула для оператора гомотопии, соответствующая формуле (1.69), принимает тогда вид

$$\hat{h}(\hat{\omega})=\int_0^1 \{\operatorname{pr}\mathbf{v}_u \rfloor \hat{\omega}[\lambda u]\}\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{5.72}$$

и для $\hat{\omega}\in\hat{\wedge}^k$, $k>0$, мы находим

$$\hat{\omega}=\hat{d}\hat{h}(\hat{\omega})+\hat{h}(\hat{d}\hat{\omega}).$$

В (5.72) обозначение $\hat{\omega}[u]$ указывает на зависимость $\hat{\omega}$ от u и всех ее производных. Поэтому, чтобы найти $\hat{\omega}[\lambda u]$, мы заменяем каждую u_J^α, возникающую в $\hat{\omega}$ (либо явно, либо как дифференциал), на λu_J^α. Беря внутреннее произведение и интегрируя затем по λ, мы находим $\hat{h}(\hat{\omega})$. (В частности, у подынтегральной функции при $\lambda=0$ нет особенности.)

Пример 5.59. Пусть $p=q=1$. Если $\hat{\omega}=xu_x\,du\wedge du_x$, то $\hat{d}\hat{\omega}=x\,du_x\wedge du\wedge du_x=0$, так что форма $\hat{\omega}$ замкнута. Чтобы найти один-форму $\hat{\eta}$, такую, что $\omega=\hat{d}\hat{\eta}$, нам нужно лишь вычислить

$$\hat{\eta}=\hat{h}(\hat{\omega})=\int_0^1 \{\operatorname{pr}\mathbf{v}_u \rfloor [x(\lambda u_x)\,d(\lambda u)\wedge d(\lambda u_x)]\}\frac{d\lambda}{\lambda}=$$

$$=\int_0^1 \lambda^2\{xuu_x\,du_x-xu_x^2\,du\}\,d\lambda=\frac{1}{3}(xuu_x\,du_x-xu_x^2\,du).$$

Каждая вертикальная k-форма определяет кососимметричное k-линейное отображение из пространства *вертикальных векторных полей* $\mathbf{v}^*=\sum Q_\alpha^J \partial/\partial u_J^\alpha$ в пространство $\mathscr{A}$ дифференциальных функций; в частности, она определяет кососимметричное полилинейное отображение на пространстве T_0 эволюционных векторных полей. Явная формула записывается с помощью определителей, как в (1.49), так что если форма $\hat{\omega}$ задана формулой (5.70), то

$$\left\langle \hat{\omega};\ \mathbf{pr}\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{pr}\,\mathbf{v}_k \right\rangle = \sum_{\alpha, \mathbf{J}} P_{\mathbf{J}}^{\alpha} \det\left(D_{J_i} Q_{\alpha_i}^{j}\right), \tag{5.73}$$

где $Q^j \in \mathcal{A}^q$ — характеристика поля $\mathbf{v}_j$, а определитель берется от матрицы размера $k \times k$ с указанными элементами. Например,

$$\langle xu_{xx}\, du \wedge du_x;\ \mathbf{pr}\,\mathbf{v}_Q,\ \mathbf{pr}\,\mathbf{v}_R \rangle = xu_{xx} \det\begin{pmatrix} Q & R \\ D_x Q & D_x R \end{pmatrix} =$$
$$= xu_{xx}(QD_xR - RD_xQ).$$

Полные производные вертикальных форм

Для каждого $i = 1, \ldots, p$ полную производную D_i можно представлять себе как своего рода векторное поле на пространстве бесконечных струй. Раз так, оно может действовать на вертикальные формы как «производная Ли», которая определяется следующими правилами:

(a) *линейность*

$$D_i(c\hat{\omega} + c'\hat{\omega}') = cD_i\hat{\omega} + c'D_i\hat{\omega}', \quad c,\ c' \in \mathbb{R}; \tag{5.74a}$$

(b) *свойство дифференцирования*

$$D_i(\hat{\omega} \wedge \hat{\eta}) = (D_i\hat{\omega}) \wedge \hat{\eta} + \hat{\omega} \wedge (D_i\hat{\eta}); \tag{5.74b}$$

(c) *коммутирование с вертикальным дифференциалом*

$$D_i(\hat{d}\hat{\omega}) = \hat{d}(D_i\hat{\omega}) \tag{5.74c}$$

вместе с уже определенным его действием на дифференциальные функции. (См. (1.59), (1.60), (1.61).) В частности, D_i действует на базисные формы следующим образом: $D_i\, du_J^\alpha = d(D_i u_J^\alpha) = du_{J,i}^\alpha$. Это действие легко восстанавливается по этим свойствам. Например,

$$D_x(xu_{xx}\, du \wedge du_x) = D_x(xu_{xx})\, du \wedge du_x + xu_{xx} D_x(du) \wedge du_x +$$
$$+ xu_{xx}\, du \wedge D_x(du_x) =$$
$$= (xu_{xxx} + u_{xx})\, du \wedge du_x + xu_{xx}\, du \wedge du_{xx}, \tag{5.75}$$

средний член обращается в нуль, поскольку $D_x(du) = du_x$. Доказательство того, что (5.74) определяет корректное действие D_i, нетрудно; в сущности это прямое следствие того же свойства единственности обычной производной Ли. Одно ключевое свойство состоит в том, что полная производная совместима с вычислением вертикальных форм на *эволюционных* векторных полях:

$$D_i\langle\hat{\omega};\ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_k\rangle = \langle D_i\hat{\omega};\ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_k\rangle \qquad (5.76)$$

при $1 \leqslant i \leqslant p$, $\hat{\omega} \in \hat{\bigwedge}^k$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{Q^i}$, $Q^i \in \mathcal{A}^q$. Таким образом, например, значение производной D_x от $xu_{xx}(QD_xR - RD_xQ)$ совпадает со значением два-формы (5.75) на $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q$ и $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_R$. Доказательство формулы (5.76) основано на формуле для производной Ли из упр. 1.35 и том факте, что полные производные коммутируют с эволюционными векторными полями (см. (5.19)).

Функционалы и функциональные формы

На самом деле нас сейчас интересуют «функциональные варианты» наших вертикальных форм, которые связаны с ними точно так же, как функционалы связаны с дифференциальными функциями. Хотя основное понятие функционала появилось в гл. 4 в своем традиционном облике, последующее развитие нуждается в более алгебраическом подходе к этим фундаментальным объектам вариационного исчисления. Каждая дифференциальная функция $L \in \mathcal{A}$ задает функционал $\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L[u]\,dx$, определенный на произвольной подобласти $\Omega \subset X$ своей области определения. Если игнорировать вклад границы (рассматривая, скажем, только функции $u = f(x)$, достаточно быстро стремящиеся к нулю вблизи границы), то другая дифференциальная функция $\tilde{L} \in \mathcal{A}$ будет определять тот же функционал, т. е. $\int_\Omega L[u]\,dx = \int_\Omega \tilde{L}[u]\,dx$ для всех таких u, если и только если она отличается от L на полную дивергенцию:

$$\tilde{L} = L + \mathrm{Div}\,P \text{ для некоторого } P \in \mathcal{A}^p. \qquad (5.77)$$

В этом суть содержания теоремы 4.7 в случае, когда $P[u] = 0$ на $\partial\Omega$. Условие (5.77) уже не зависит от области Ω и определяет отношение эквивалентности на пространстве дифференциальных функций. А именно, L и $\tilde{L}$ эквивалентны и определяют один и тот же функционал, если выполняется условие (5.77). Каждый функционал, таким образом, единственным образом определяется классом эквивалентности дифференциальных функций и наоборот. Поэтому разумно *определить* пространство *функционалов*, обозначаемое $\mathcal{F}$, как множество классов эквивалентности на пространстве $\mathcal{A}$ дифференциальных функций относительно отношения эквивалентности (5.77). Иначе говоря, положим $\mathcal{F} = \mathcal{A}/\mathrm{Div}(\mathcal{A}^p)$ — факторпространство векторного пространства $\mathscr{A}$ по подпространству полных дивергенций, т. е. «коядро» отображения полной дивергенции $\mathbf{Div}$: $\mathscr{A}^p \to \mathscr{A}$. Естественное проектирование из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{F}$, ставящее в соответствие каждой дифференциальной функции L ее класс эквивалентности или функционал, разумно обозначать знаком интеграла, так что $\int L\,dx \in \mathscr{F}$ — это функционал или класс эквивалентности, соответствующий дифференциальной функции $L \in \mathscr{A}$. В частности, $\int L\,dx = 0$, если и только если $L = \mathbf{Div}\,P$ для некоторого P. Это дает нам возможность «интегрировать функционалы по частям»:

$$\int (P \cdot D_i Q)\,dx = -\int (Q \cdot D_i P)\,dx, \quad P,\ Q \in \mathscr{A}.$$

(С нашей предшествующей точки зрения образ оператора полной дивергенции можно отождествить с образом отображения D: $\bigwedge_{p-1} \to \bigwedge_p$, где $L[u]$ соответствует p-форме $L[u]\,dx = L[u] dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$. Можно отождествить $\mathscr{F}$, пространство функционалов, с коядром $\mathscr{F} \simeq \bigwedge_p / \mathrm{D} \bigwedge_{p-1}$, причем проекцией формы $\omega = L dx$ будет функционал $\int \omega = \int L\,dx$. На самом деле, если бы мы стремились к поистине бескоординатному представлению, нам нужно было бы работать с $\bigwedge_p$, пространством полных p-форм, а не с $\mathscr{A}$, пространством дифференциальных функций. Заметим также, что нам следовало бы, таким образом, пополнить D-комплекс добавлением тривиального точного куска: $\bigwedge_{p-1} \xrightarrow{\mathrm{D}} \bigwedge_p \to \mathscr{F} \to 0$, но это не так интересно, как полный вариационный комплекс.)

Важный момент состоит в том, что, тогда как пространство $\mathscr{A}$ дифференциальных функций является алгеброй, это становится неверным для пространства $\mathscr{F}$ функционалов, поскольку мы не можем естественным способом перемножать функционалы. Например, дифференциальные функции u_x и u_{xxx} обе определяют тривиальные функционалы: $\int u_x\,dx = 0 = \int u_{xxx}\,dx$, однако их произведение $u_x u_{xxx}$ *не* является дивергенцией и, следовательно, $\mathscr{L} = \int u_x u_{xxx}\,dx \neq 0$ не является тривиальным функционалом. В самом деле, $\delta\mathscr{L} = -2u_{xxxx} \neq 0$; следовательно, по теореме 4.7 $\mathscr{L} \neq 0$. Конечно, мы можем брать линейные комбинации функционалов с постоянными коэффициентами, так что $\mathscr{F}$ является векторным пространством.

Аналогично, мы определяем отношение эквивалентности на пространстве $\hat{\wedge}^k$ вертикальных k-форм, причем $\hat{\omega}$ эквивалентна $\hat{\omega}'$, если они отличаются на полную дивергенцию:

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}' + \mathbf{Div}\, \hat{\eta} = \hat{\omega}' + \sum_{i=1}^{p} D_i \hat{\eta}_i, \qquad \hat{\eta}_i \in \hat{\wedge}^k,$$

где D_i действует на η_i в соответствии с (5.74). Пространство классов эквивалентности — это пространство *функциональных k-форм*, обозначаемое

$$\wedge_*^k = \hat{\wedge}^k / \mathbf{Div}\, (\hat{\wedge}^k)^p.$$

Естественное проектирование из $\hat{\wedge}^k$ в $\wedge_*^k$ снова обозначается знаком интеграла, так что $\int \hat{\omega}\, dx$ — класс эквивалентности, содержащий $\hat{\omega} \in \hat{\wedge}^k$. В частности, $\int \mathbf{Div}\, \hat{\eta}\, dx = 0$ для любого набора из p вертикальных k-форм $\hat{\eta}$. В совокупности со свойством дифференцирования для полной производной (5.74b) это дает формулу интегрирования по частям

$$\int \hat{\omega} \wedge D_i \hat{\eta}\, dx = -\int (D_i \hat{\omega}) \wedge \hat{\eta}\, dx, \qquad \hat{\omega} \in \hat{\wedge}^k, \qquad \hat{\eta} \in \hat{\wedge}^l. \tag{5.78}$$

Пример 5.60. Пусть $p = q = 1$. Рассмотрим функциональную два-форму

$$\omega = \int \{u_x\, du \wedge du_{xx}\}\, dx.$$

Мы можем проинтегрировать ее по частям, пользуясь тем фактом, что $du_{xx} = D_x(du_x)$, так что в силу (5.78)

$$\omega = -\int \{D_x(u_x\, du) \wedge du_x\}\, dx = -\int \{(u_{xx}\, du + u_x\, du_x) \wedge du_x\}\, dx =$$
$$= -\int \{u_{xx}\, du \wedge du_x\}\, dx.$$

Это не помогает, даже если мы попробуем еще раз проинтегрировать по частям, поскольку мы получаем

$$\omega = +\int \{D_x(u_{xx}\, du) \wedge du\}\, dx = +\int \{u_{xx}\, du_x \wedge du\}\, dx,$$

а это в точности то же, что и выше.

Раз мы не можем перемножать функционалы, для функциональных форм нет корректно определенного внешнего произведения, поскольку если

$$\hat{\omega} = \tilde{\omega} + \mathbf{Div}\, \eta \quad \text{и} \quad \hat{\theta} = \tilde{\theta} + \mathbf{Div}\, \zeta$$

— эквивалентные формы, то нет никаких гарантий, что формы $\hat{\omega}\wedge\hat{\theta}$ и $\tilde{\omega}\wedge\tilde{\theta}$ тоже эквивалентны. В предыдущем примере форма $du_{xx}=D_x(du_x)$ тривиальна, но функциональная два-форма ω не тривиальна. (См. предложение 5.64.)

Каждая функциональная форма является кососимметричным полилинейным отображением из пространства эволюционных векторных полей в пространство функционалов, определенным так, что

$$\langle\omega;\ \mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_k\rangle=\int\langle\hat{\omega};\ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_k\rangle\,dx,\quad \mathbf{v}_i\in T_0, \tag{5.79}$$

где $\omega=\int\hat{\omega}\,dx$, $\hat{\omega}\in\hat{\wedge}^k$. В силу (5.76) это определение корректно. Например, если $\omega=\int\{u_x\,du\wedge du_{xx}\}\,dx$, как выше, то

$$\langle\omega;\ \mathbf{v}_Q,\ \mathbf{v}_R\rangle=\int u_x\left(QD_x^2R-RD_x^2Q\right)dx.$$

Менее очевидным является то, что это действие единственным образом определяет форму ω.

Лемма 5.61. *Если ω и ω' — функциональные k-формы, то $\omega=\omega'$ тогда и только тогда, когда $\langle\omega;\ \mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_k\rangle=\langle\omega';\ \mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_k\rangle$ для каждого множества эволюционных векторных полей $\mathbf{v}_1,\ \ldots,\ \mathbf{v}_k$.*

Доказательство опирается на более важный результат.

Лемма 5.62. *Предположим, что $u\in\mathbb{R}^q$ и $v\in\mathbb{R}^r$ — зависимые переменные, зависящие от $x\in\mathbb{R}^p$. Предположим, что $\mathscr{L}[u,\ v]=\int L(x,\ u^{(n)},\ v^{(n)})\,dx$ — функционал, обладающий тем свойством, что $\mathscr{L}[u,\ Q[u]]=0$ для всех наборов из r дифференциальных функций $Q\in\mathscr{A}^r$, зависящих от x, u и производных от u. Тогда $\mathscr{L}[u,\ v]=0$ как функционал от u и v.*

Доказательство. Эквивалентный способ сформулировать этот результат — сказать, что если для каждого $Q\in\mathscr{A}^r$

$$L[u,\ Q[u]]=\mathrm{Div}\,P_Q[u]$$

для некоторого $P_Q\in\mathscr{A}^p$, зависящего от x, u и производных от u, то

$$L[u,\ v]=\mathrm{Div}\,P^*[u,\ v]$$

для некоторого набора из p дифференциальных функций P^*, зависящих от x, u, v и производных от u и v. В частности,

$$L[u,\ Q[u]]=\mathrm{Div}\,P^*[u,\ Q[u]],$$

где P^* зависит только от Q и ее полных производных. (Это не обязательно справедливо для P_Q, особенно если P_Q построено с помощью метода доказательства теоремы 4.7.)

Чтобы доказать этот результат, рассмотрим Q, $R \in \mathscr{A}^r$. Тогда по определению вариационной производной

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathscr{L}[u, Q+\varepsilon R] = \int \mathsf{E}_v(L)[u, Q] \cdot R\, dx,$$

где $\mathsf{E}_v(L)$ обозначает вариационную производную от L по v. По следствию 5.52 $\mathsf{E}_v(L)[u, Q[u]] \equiv 0$ для всех Q, значит, $\mathsf{E}_v(L)[u, v] = 0$ для всех u, v. Аналогично, дифференцируя $\mathscr{L}[u+\varepsilon P[u], Q[u+\varepsilon P[u]]]$ по ε при $\varepsilon = 0$ и пользуясь обращением в нуль $\mathsf{E}_v(L)$, мы находим, что $\mathsf{E}_u(L) \equiv 0$. Из теоремы 4.7 непосредственно следует, что $L[u, v] = \mathrm{Div}\, P^*[u, v]$ для некоторого P^*, что и доказывает лемму. □

Чтобы доказать лемму 5.61, нам нужно лишь показать, что

$$\mathscr{L}[u; Q^1, , Q^k] \quad \equiv \langle \omega; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = 0$$

для всех $Q^\nu \in \mathscr{A}^q$, $\nu = 1, \ldots, k$, если и только если $\hat{\omega} = \mathrm{Div}\, \hat{\eta}$ для некоторого набора из p вертикальных форм $\hat{\eta}$. Из леммы 5.62 вытекает, что

$$\langle \hat{\omega}; \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_k \rangle = \mathrm{Div}\, P^*[u; Q^1, \ldots, Q^k],$$

где P^* зависит только от $Q^1, \ldots, Q^k$ и их полных производных. Оказывается, что компоненты P^*_j набора P^* всегда можно выбрать линейными по всем Q^ν, но это могут не быть кососимметричные функции. Однако, если мы заменим P^* на его «антисимметризацию»

$$\hat{P}^*[u; Q^1, \ldots, Q^k] = \frac{1}{k!} \sum_{\pi} (-1)^\pi P^*[u; Q^{\pi 1}, \ldots, Q^{\pi k}]$$

(сумма берется по всем перестановкам π чисел $\{1, \ldots, k\}$), мы сохраним условие

$$\langle \hat{\omega}; \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_k \rangle = \mathrm{Div}\, \hat{P}^*[u; Q^1, \ldots, Q^k].$$

Кроме того, каждая компонента набора P^* является кососимметричной полилинейной функцией от Q^ν и их полных производных и, следовательно, может быть отождествлена с вертикальной k-формой

$$\hat{P}^*_j[u; Q^1, \ldots, Q^k] = \langle \hat{\eta}_j; \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_k \rangle.$$

Поскольку это справедливо для всех таких $Q^1, \ldots, Q^k$, мы заключаем, что $\hat{\omega} = \mathrm{Div}\, \eta$, и лемма доказана. □

Рассмотрим более подробно случаи функциональных один- и два-форм. Всякая один-форма

$$\omega = \int \Big\{ \sum_{\alpha, J} P_\alpha^J [u]\, du_J^\alpha \Big\} dx$$

определяется конечным набором дифференциальных функций P_α^J, но P_α^J определяются формой ω неоднозначно. В самом деле, поскольку $du_J^\alpha = D_J\, du^\alpha$, мы можем проинтегрировать каждое слагаемое по частям, что приводит к более простому выражению

$$\omega = \int \Big\{ \sum_{\alpha=1}^{q} P_\alpha [u]\, du^\alpha \Big\} dx \equiv \int \{P \cdot du\}\, dx,$$

$$\text{где} \quad P_\alpha = \sum_J (-D)_J P_\alpha^J, \qquad (5.80)$$

называемому *каноническим* видом формы ω. Нетрудно видеть, что каждая функциональная один-форма имеет однозначно определенный канонический вид.

Предложение 5.63. *Пусть* $\omega = \int \{P \cdot du\}\, dx$ *и* $\tilde{\omega} = \int \{\tilde{P} \cdot du\}\, dx$ *— функциональные один-формы в каноническом виде, так что* P, $\tilde{P} \in \mathcal{A}^q$. *Тогда* $\omega = \tilde{\omega}$, *если и только если* $P = \tilde{P}$.

Доказательство. Достаточно показать, что функциональная один-форма ω равна 0 тогда и только тогда, когда набор из p дифференциальных функций P, присутствующий в каноническом виде, тождественно равен нулю. Вычисляя (5.80) на произвольном векторном поле, мы имеем

$$\langle \omega;\, \mathbf{v}_Q \rangle = \int (P \cdot Q)\, dx.$$

Согласно лемме 5.61, $\omega = 0$, если и только если это выражение обращается в нуль для всех таких полей $\mathbf{v}_Q$, но в силу следствия 5.52 это происходит, если и только если $P = 0$, что и доказывает наш результат. □

Далее, рассмотрим случай функциональных два-форм. Наиболее общий внд функциональной два-формы.

$$\omega = \int \Big\{ \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ J, K}} P_{\alpha\beta}^{JK} [u]\, du_J^\alpha \wedge du_K^\beta \Big\} dx.$$

(Сумма, как обычно, будет конечной.) Чтобы упростить вертикальную два-форму, стоящую под знаком интеграла, мы переписываем $du_J^\alpha = D_J du^\alpha$ и интегрируем по частям. Это приводит к выражению вида

$$\omega = \int \left\{ \sum_{\alpha, \beta, I} P_{\alpha\beta}^I [u]\, du^\alpha \wedge du_I^\beta \right\} dx,$$

где $P_{\alpha\beta}^I$ определяются по $P_{\alpha\beta}^{JK}$ и их производным. Определим дифференциальные операторы

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta} = \sum_I P_{\alpha\beta}^I [u]\, D_I.$$

Тогда выписанное выше выражение можно переписать в виде

$$\omega = \int \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^{q} du^\alpha \wedge \tilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}\, du^\beta \right\} dx \tag{5.81}$$

или, пользуясь более компактным матричным обозначением,

$$\omega = \int \{du \wedge \tilde{\mathcal{D}}\, du\}\, dx.$$

Оказывается, тем не менее, что матричный дифференциальный оператор $\tilde{\mathcal{D}} = (\tilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta})$ неоднозначно определяется формой ω. В самом деле, (5.81) можно проинтегрировать по частям, что приводит к эквивалентному выражению

$$\omega = \int \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \tilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}^* (du^\alpha) \wedge du^\beta \right\} dx = -\int \left\{ \sum_{\alpha, \beta} du^\beta \wedge \tilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}^* (du^\alpha)\, dx \right\},$$

содержащему оператор $\tilde{\mathcal{D}}^* = (\tilde{\mathcal{D}}_{\beta\alpha}^*)$, сопряженный к оператору $\tilde{\mathcal{D}}$. Если мы положим $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}} - \tilde{\mathcal{D}}^*$, так что $\mathcal{D}\colon \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^q$ — антисимметрический дифференциальный оператор: $\mathcal{D}^* = -\mathcal{D}$, то ω примет *канонический вид*

$$\omega = \frac{1}{2} \int \{du \wedge \mathcal{D}\, du\}\, dx, \quad \mathcal{D}^* = -\mathcal{D}. \tag{5.82}$$

Ее значение на паре эволюционных векторных полей тогда равно

$$\langle \omega;\, \mathbf{v}_Q, \mathbf{v}_R \rangle = \frac{1}{2} \int \{Q \cdot \mathcal{D}R - R \cdot \mathcal{D}Q\}\, dx = \int \{Q \cdot \mathcal{D}R\}\, dx,$$

поскольку оператор $\mathcal{D}$ антисимметрический. *Этот* канонический вид *однозначно* определяется формой ω.

Предложение 5.64. *Пусть* $\omega = \frac{1}{2}\int \{du \wedge \mathscr{D}(du)\}\,dx$, $\tilde{\omega} = \frac{1}{2}\int \{du \wedge \tilde{\mathscr{D}}(du)\}\,dx$ — *функциональные два-формы в каноническом виде, так что* $\mathscr{D}$ *и* $\tilde{\mathscr{D}}$ — *антисимметрические матричные дифференциальные операторы размера* $q \times q$. *Тогда* $\omega = \tilde{\omega}$, *если и только если* $\mathscr{D} = \tilde{\mathscr{D}}$.

Доказательство. По лемме 5.61 достаточно доказать, что если $\mathscr{D}\colon \mathscr{D}^q \to \mathscr{A}^q$ — антисимметрический оператор, то $\int (Q \cdot \mathscr{D}R)\,dx = 0$ для всех Q, $R \in \mathscr{A}^q$, если и только если $\mathscr{D} = 0$. Из следствия 5.52 вытекает, что $\mathscr{D}R = 0$ для всех R, откуда следует, что $\mathscr{D} = 0$. (См. упр. 5.29.) □

Вариационный дифференциал

Определение 5.65. Пусть $\omega = \int \hat{\omega}\,dx$ — функциональная k-форма, соответствующая вертикальной k-форме $\hat{\omega}$. *Вариационный дифференциал* формы ω — это функциональная $(k+1)$-форма, соответствующая вертикальному дифференциалу формы ω:

$$\delta\omega = \int (\hat{d}\hat{\omega})\,dx. \tag{5.83}$$

Соотношение коммутативности (5.74c) гарантирует, что этот оператор корректно определен на пространствах функциональных форм. Основные свойства сразу же выводятся из свойств вертикального дифференциала, так что мы немедленно получаем точный *вариационный комплекс*.

Теорема 5.66. *Пусть* $M \subset X \times U$ — *вертикально звездная область. Вариационный дифференциал определяет точный комплекс*

$$0 \to \Lambda^0_* \xrightarrow{\delta} \Lambda^1_* \xrightarrow{\delta} \Lambda^2_* \xrightarrow{\delta} \Lambda^3_* \xrightarrow{\delta} \cdots$$

на пространствах функциональных форм на M. *Иными словами, функциональная форма замкнута*: $\delta\omega = 0$, *если и только если она точна*: $\omega = \delta\eta$.

Доказательство. Формула гомотопии (5.72) непосредственно проектируется в формулу гомотопии для вариационного дифференциала: если ω — произвольная функциональная k-форма, $k > 0$, то

$$\omega = \delta h(\omega) + h(\delta\omega),$$

где для $\omega=\int\hat{\omega}\,dx$

$$h(\omega)=\int\hat{h}(\hat{\omega})\,dx=\int\left\{\int_0^1(\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_u \rfloor \hat{\omega}[\lambda u])\frac{d\lambda}{\lambda}\right\}dx. \qquad (5.84)$$

Это также распространяется на случай, когда $k=0$, т. е. ω — функционал, поскольку $\hat{\omega}$ отличается от $\hat{d}\hat{h}(\hat{\omega})+\hat{h}(\hat{d}\hat{\omega})$ лишь на функцию, зависящую только от x, а всякая такая функция определяет тривиальный функционал. Этого достаточно, чтобы доказать теорему 5.66 во всех случаях. $\square$

Пример 5.67. Рассмотрим функциональную два-форму

$$\omega=\int\{u_{xxx}\,du\wedge du_x\}\,dx.$$

(Заметим, что ω не в каноническом виде. Канонический вид в этом случае

$$\frac{1}{2}\int\{du\wedge(2u_{xxx}\,du_x+u_{xxxx}\,du)\}\,dx$$

и соответствует антисимметрическому оператору $2u_{xxx}D_x+$ $+u_{xxxx}$.) Вариационная производная — это функциональная три-форма

$$\delta\omega=\int\{du_{xxx}\wedge du\wedge du_x\}\,dx.$$

Эта форма тривиальна: интегрируя по частям, мы видим, что

$$\delta\omega=-\int\{du_{xx}\wedge D_x(du\wedge du_x)\}\,dx=$$

$$=-\int\{du_{xx}\wedge du_x\wedge du_x+du_{xx}\wedge du\wedge du_{xx}\}\,dx=0.$$

Это эквивалентно тому, что $du_{xxx}\wedge du\wedge du_x=D_x(du_{xx}\wedge du\wedge$ $\wedge du_x)$ — полная производная по x. (Другой способ убедиться в этом — заметить, что значение соответствующей вертикальной три-формы на тройке эволюционных векторных полей есть производная по x:

$$\langle du\wedge du_x\wedge du_{xxx};\ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_P,\ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q,\ \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_R\rangle=$$

$$=\det\begin{pmatrix}P & Q & R\\ D_xP & D_xQ & D_xR\\ D_x^3P & D_x^3Q & D_x^3R\end{pmatrix}=D_x\left\{\det\begin{pmatrix}P & Q & R\\ D_xP & D_xQ & D_xR\\ D_x^2P & D_x^2Q & D_x^2R\end{pmatrix}\right\}.)$$

Чтобы вычислить один-форму η, вариационным дифференциалом которой является форма ω, мы пользуемся формулой гомотопии (5.84),

$$\eta = h(\omega) = \int \left\{ \int_0^1 \lambda^2 (u u_{xxx}\, du_x - u_x u_{xxx}\, du)\, d\lambda \right\} dx =$$
$$= \int \left\{ \frac{1}{3} u u_{xxx}\, du_x - \frac{1}{3} u_x u_{xxx}\, du \right\} dx.$$

Она имеет канонический вид

$$\eta = \int \left\{ \left(-\frac{1}{3} u u_{xxxx} - \frac{2}{3} u_x u_{xxx} \right) du \right\} dx$$

и на самом деле

$$\delta\eta = \int \left\{ -\frac{1}{3} u\, du_{xxxx} \wedge du - \frac{2}{3} u_x\, du_{xxx} \wedge du - \frac{2}{3} u_{xxx}\, du_x \wedge du \right\} dx.$$

Можно показать, что $\delta\eta$ эквивалентна форме ω, проинтегрировав два раза по частям.

Точность вариационного комплекса в члене $\bigwedge_*^1$ особенно важна, поскольку она дает вышеупомянутое решение обратной задачи вариационного исчисления. Чтобы увидеть это, нам нужно сначала связать вариационный дифференциал с вариационной производной. Если $\mathscr{L} = \int L\, dx$ — функционал, который мы рассматриваем как элемент пространства $\bigwedge_*^0$, то его вариационный дифференциал есть функциональная один-форма

$$\delta\mathscr{L} = \int \{\hat{d}L\}\, dx = \int \left\{ \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} du_J^\alpha \right\} dx.$$

Как в (5.80), мы можем проинтегрировать эту последнюю форму по частям, что приводит к каноническому виду

$$\delta\mathscr{L} = \int \left\{ \sum_{\alpha=1}^{q} \left(\sum_J (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} \right) du^\alpha \right\} dx = \int \{\mathsf{E}(L) \cdot du\}\, dx,$$

ср. (4.3). Из предложения 5.63 следует, что $\delta\mathscr{L}$ можно однозначно отождествить с выражением Эйлера — Лагранжа $\mathsf{E}(L)$, и это доставляет связь между вариационным дифференциалом и нашим предыдущим обозначением для вариационной производной. (На самом деле если мы интерпретируем дифференциалы du^α как инфинитезимальные вариации по u^α, а $du_J^\alpha = D_J du^\alpha$ — как соответствующие вариации по производным, то проведенное вычисление — то же самое, что традиционное определение уравнений Эйлера — Лагранжа из определения вариационной производной.) Точность вариационного комплекса в члене $\bigwedge_*^0$ тогда эквивалентна теореме 4.7 о том, что функционал тривиален, если и только если его вариационная производная есть тождественный нуль.

Мы можем, таким образом, «склеить» D-комплекс с комплексом, определенным вариационным дифференциалом, получив в результате полный *вариационный комплекс*

$$0 \to \mathbb{R} \to \bigwedge_0 \xrightarrow{\mathsf{D}} \bigwedge_1 \xrightarrow{\mathsf{D}} \dots \xrightarrow{\mathsf{D}} \bigwedge_{p-1} \xrightarrow{\mathsf{D}} \bigwedge_p \xrightarrow{\mathsf{E}} \bigwedge_*^1 \xrightarrow{\delta} \bigwedge_*^2 \xrightarrow{\delta} \dots .$$

Он точен на вполне звездных областях $M \subset X \times U$.

Далее, рассмотрим вариационный дифференциал от функциональной один-формы, которую мы берем в каноническом виде $\omega = \int \{P \cdot du\}\, dx$. Мы получаем

$$\delta\omega = \int \left\{ \sum_{\alpha} \sum_{\beta,\, J} \frac{\partial P_\alpha}{\partial u_J^\beta} du_J^\beta \wedge du^\alpha \right\} dx = \int \{\mathsf{D}_P(du) \wedge du\}\, dx,$$

где D_P — производная Фреше от P, ср. (5.40). Как и в (5.82), мы можем проинтегрировать по частям второй раз, что приводит к каноническому виду

$$\delta\omega = \frac{1}{2} \int \left\{ du \wedge \left(\mathsf{D}_P^* - \mathsf{D}_P\right) du \right\} dx.$$

В частности, форма ω замкнута, если и только если D_P — симметрический дифференциальный оператор. Точность вариационного комплекса в совокупности с явным видом оператора гомотопии (5.84) дают, таким образом, полное решение задачи характеризации образа оператора Эйлера — Лагранжа.

Теорема 5.68. *Пусть $P[u] \in \mathcal{A}^p$ определен на вертикально звездной области $M \subset X \times U$. Тогда P — выражение Эйлера — Лагранжа для некоторой вариационной задачи $\mathcal{L} = \int L\, dx$, т. е. $P = \mathsf{E}(L)$, если и только если производная Фреше D_P симметрична: $\mathsf{D}_P^* = \mathsf{D}_P$. В этом случае лагранжиан для P можно явно построить с помощью формулы гомотопии*

$$L[u] = \int_0^1 u \cdot P[\lambda u]\, d\lambda. \tag{5.85}$$

Пример 5.69. Пусть $p = q = 1$. Функционал

$$\mathcal{L}[u] = \int \left(\frac{1}{2} u_{xx}^2 - u u_x^2 \right) dx$$

имеет выражение Эйлера — Лагранжа

$$\mathsf{E}(L)[u] = P[u] = u_{xxxx} + 2uu_{xx} + u_x^2.$$

Производная Фреше от P — это обычный дифференциальный оператор

$$\mathsf{D}_P = D_x^4 + 2uD_x^2 + 2u_xD_x + 2u_{xx},$$

который, как легко видеть, симметрический. С другой стороны, если бы нам было дано лишь P, мы могли бы восстановить вариационную задачу с помощью (5.85):

$$\mathscr{L}[u] = \int \left\{ \int_0^1 u\left(\lambda u_{xxxx} + 2\lambda^2 uu_{xx} + \lambda^2 u_x^2\right) d\lambda \right\} dx =$$
$$= \int \left\{ \frac{1}{2} uu_{xxxx} + \frac{2}{3} u^2 u_{xx} + \frac{1}{3} uu_x^2 \right\} dx.$$

Этот лагранжиан — не тот же самый, что исходный, но эквивалентен ему, поскольку

$$\frac{1}{2} uu_{xxxx} + \frac{2}{3} u^2u_{xx} + \frac{1}{3} uu_x^2 =$$
$$= \frac{1}{2} u_{xx}^2 - uu_x^2 + D_x\left(\frac{1}{2} uu_{xxx} - \frac{1}{2} u_xu_{xx} + \frac{2}{3} u^2u_x\right).$$

Таким образом, нами решена версия Гельмгольца обратной задачи вариационного исчисления: характеризация тех $P[u] \in \mathscr{A}^q$, которые являются выражениями Эйлера — Лагранжа. (Условия, требующие симметричности оператора D_P, часто называют *условиями Гельмгольца*.) Хотя это решение очень четкое, оно является отчасти неудовлетворительным с точки зрения более широкой перспективы определения того, какие системы дифференциальных уравнений $\Delta = 0$ возникают из вариационных принципов. Если уравнения оказываются записанными в «неправильном» порядке, скажем, $\Delta_1 = \mathsf{E}_2(L)$, $\Delta_2 = \mathsf{E}_1(L)$ и т. д., то условия Гельмгольца для Δ будут не выполнены и вариационная структура системы останется необнаруженной. Еще труднее будет ее обнаружить, когда система Δ *эквивалентна* множеству уравнений Эйлера — Лагранжа, так что $\Delta = A \cdot \mathsf{E}(L)$ для некоторой обратимой матрицы A дифференциальных функций размера $q \times q$, или, даже более общо, $\Delta = \mathscr{D}\mathsf{E}(L)$ для некоторого дифференциального оператора $\mathscr{D}$. Решение общей проблемы эквивалентности не найдено даже в случае, когда A — постоянная матрица! (Рассмотрены некоторые частные случаи — см. замечания в конце этой главы.)

Операторы Эйлера высших порядков

Хотя D-комплекс, возможно, проще было выписать, построение подходящего оператора гомотопии является значительно более сложным. Обычная формула де Рама больше не работает, и мы вынуждены ввести так называемые операторы Эйлера высших порядков. Наиболее естественно они возникают при подробном анализе фундаментальной формулы интегрирования по частям (4.39), которая использовалась в доказательстве теоремы Нётер.

Определение 5.70. Для каждого $1 \leqslant \alpha \leqslant q$ и каждого мультииндекса J *операторы Эйлера высшего порядка* E_α^J определяются так, что формула

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(P) = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J D_J\left(Q_\alpha \cdot \mathsf{E}_\alpha^J(P)\right) \tag{5.86}$$

справедлива для всякого эволюционного векторного поля $\mathbf{v}_Q$ и всякой дифференциальной функции $P \in \mathcal{A}$.

Тот факт, что формула (5.86) может служить для однозначного определения этих операторов, возможно, лучше всего можно понять с помощью примера.

Пример 5.71. Пусть $p = q = 1$, так что имеются операторы Эйлера $\mathsf{E}^{(0)}$, $\mathsf{E}^{(1)}$, $\mathsf{E}^{(2)}$ и т. д., удовлетворяющие условию

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(P) = Q\mathsf{E}^{(0)}(P) + D_x\left(Q\mathsf{E}^{(1)}(P)\right) + D_x^2\left(Q\mathsf{E}^{(2)}(P)\right) + \dots \tag{5.87}$$

для функции $P = P(x, u, u_x, \dots)$ общего вида. Предположим, что $P = P(x, u, u_x, u_{xx})$ зависит лишь от производных второго порядка, так что

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(P) = Q\frac{\partial P}{\partial u} + D_xQ\frac{\partial P}{\partial u_x} + D_x^2Q\frac{\partial P}{\partial u_{xx}}.$$

Чтобы переписать это в виде (5.87), мы должны проинтегрировать второе и третье слагаемые по частям:

$$D_xQ \cdot \frac{\partial P}{\partial u_x} = -Q \cdot D_x\frac{\partial P}{\partial u_x} + D_x\left(Q\frac{\partial P}{\partial u_x}\right),$$

$$D_x^2Q \cdot \frac{\partial P}{\partial u_{xx}} = Q \cdot D_x^2\frac{\partial P}{\partial u_{xx}} - 2D_x\left(Q \cdot D_x\frac{\partial P}{\partial u_{xx}}\right) + D_x^2\left(Q\frac{\partial P}{\partial u_{xx}}\right).$$

Сравнивая с (5.87), мы видим, что для такого P

$$\mathsf{E}^{(0)}(P) = \frac{\partial P}{\partial u} - D_x\frac{\partial P}{\partial u_x} + D_x^2\frac{\partial P}{\partial u_{xx}}, \quad \mathsf{E}^{(1)}(P) = \frac{\partial P}{\partial u_x} - 2D_x\frac{\partial P}{\partial u_{xx}},$$

$$\mathsf{E}^{(2)}(P) = \frac{\partial P}{\partial u_{xx}}.$$

Если мы выполним такую же процедуру для P общего вида, мы получим, что (5.87) будет удовлетворяться, если положить

$$\mathsf{E}^{(k)}(P)=\sum_{l=k}^{\infty}\binom{l}{k}(-D_x)^{l-k}\frac{\partial P}{\partial u_l},$$

так что

$$\mathsf{E}^{(0)}(P)=\frac{\partial P}{\partial u}-D_x\frac{\partial P}{\partial u_x}+D_x^2\frac{\partial P}{\partial u_{xx}}-D_x^3\frac{\partial P}{\partial u_{xxx}}+\dots$$

совпадает с обычным оператором Эйлера, тогда как

$$\mathsf{E}^{(1)}(P)=\frac{\partial P}{\partial u_x}-2D_x\frac{\partial P}{\partial u_{xx}}+3D_x^2\frac{\partial P}{\partial u_{xxx}}-4D_x^3\frac{\partial P}{\partial u_{xxxx}}+\dots,$$

$$\mathsf{E}^{(2)}(P)=\frac{\partial P}{\partial u_{xx}}-3D_x\frac{\partial P}{\partial u_{xxx}}+6D_x^2\frac{\partial P}{\partial u_{xxxx}}-10D_x^3\frac{\partial P}{\partial u_{xxxxx}}+\dots$$

и т. д.

Чтобы установить общую формулу для операторов Эйлера высших порядков, нам нужны еще некоторые мультииндексные обозначения. Пусть I, J — неупорядоченные мультииндексы типа, введенного в гл. 2. Скажем, что $J\subset I$, если все индексы из J имеются в I. Остальные индексы из I мы обозначаем через $I\diagdown J$. Например, если $p=4$, то $J=(1,1,2,4)$ содержится в $I=(1,1,1,2,4,4)$ и $I\diagdown J=(1,4)$. Для данного $I=(i_1,\dots,i_n)$ обозначим через $\tilde I=(\tilde\imath_1,\dots,\tilde\imath_p)$ «транспонированный» упорядоченный мультииндекс, где $\tilde\imath_j$ равно числу появлений индекса j в I; для рассмотренного примера $\tilde I=(3,1,0,2)$, поскольку в I три раза встречается индекс 1, один раз — индекс 2, 3 не встречается, а 4 встречается два раза. Положим $I!=\tilde I!=\tilde\imath_1!\tilde\imath_1!\dots\tilde\imath_p!$ и определим обобщенный биномиальный коэффициент $\binom{I}{J}$ формулой $\binom{I}{J}=I!/(J!\,(I\diagdown J)!)$ при $J\subset I$ и $\binom{I}{J}=0$ в противном случае. В рассмотренном примере $I!=3!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 2!=12$; $\binom{I}{J}=$ $=12/(2\cdot 1)=6$.

Предложение 5.72. *Пусть* $1\leqslant\alpha\leqslant q$, $\#J\geqslant 0$. *Тогда*

$$\mathsf{E}_\alpha^J(P)=\sum_{I\supset J}\binom{I}{J}(-D)_{I\diagdown J}\frac{\partial P}{\partial u_I^\alpha}\tag{5.88}$$

для всех $P\in\mathcal{A}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$R\cdot D_IQ=\sum_{J\subset I}\binom{I}{J}D_J(Q\cdot(-D)_{I\diagdown J}R)\tag{5.89}$$

для любого I. Это легко доказывается индукцией, начинающейся с правила Лейбница $RD_iQ = D_i(QR) - QD_iR$. Вычисляем левую часть равенства (5.86):

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(P) = \sum_{\alpha, I} D_I Q_\alpha \cdot \frac{\partial P}{\partial u_I^\alpha} = \sum_{\alpha, I} \sum_{J \subset I} D_J \left(Q_\alpha \cdot \binom{I}{J} (-D)_{I \setminus J} \frac{\partial P}{\partial u_I^\alpha} \right).$$

Изменение порядка суммирования доказывает формулу (5.88) и, следовательно, единственность операторов Эйлера высших порядков. В частности, для $J = 0$ $\mathrm{E}_\alpha^0 = \mathrm{E}_\alpha$ совпадает с обычным оператором Эйлера. □

Пример 5.73. Пусть $p = 2$, $q = 1$. Пусть x, y — независимые переменные. Тогда, например,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{(x)}(P) &= \frac{\partial P}{\partial u_x} - 2D_x \frac{\partial P}{\partial u_{xx}} - D_y \frac{\partial P}{\partial u_{xy}} + \\ &\quad + 3D_x^2 \frac{\partial P}{\partial u_{xxx}} + 2D_x D_y \frac{\partial P}{\partial u_{xxy}} + D_y^2 \frac{\partial P}{\partial u_{xyy}} - \ldots, \\ \mathrm{E}^{(xy)}(P) &= \frac{\partial P}{\partial u_{xy}} - 2D_x \frac{\partial P}{\partial u_{xxy}} - 2D_y \frac{\partial P}{\partial u_{xyy}} + \\ &\quad + 3D_x^2 \frac{\partial P}{\partial u_{xxxy}} + 4D_x D_y \frac{\partial P}{\partial u_{xxyy}} + 3D_y^2 \frac{\partial P}{\partial u_{xyyy}} \end{aligned}$$

и т. д.

На самом деле для теоретических целей не важны явные формулы для E_α^J; важно то, что они однозначно определяются интегрированием по частям формулы (5.86). В качестве первого приложения мы находим явное выражение для дивергенции в ключевой формуле (4.39), которая использовалась в теореме Нётер.

Предложение 5.74. *Пусть $Q \in \mathcal{A}^q$, $L \in \mathcal{A}$. Тогда*

$$\operatorname{pr} \mathbf{v}_Q(L) = Q \cdot \mathrm{E}(L) + \operatorname{Div} A, \tag{5.90}$$

где

$$A_k = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\# I \geq 0} \frac{\tilde{i}_k + 1}{\# I + 1} D_I \left[Q_\alpha \mathrm{E}_\alpha^{I,k}(L) \right], \quad k = 1, \ldots, p. \tag{5.91}$$

Доказательство. Вычисляем

$$\operatorname{Div} A = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\# I \geq 0} \sum_{k=1}^{p} \frac{\tilde{i}_k + 1}{\# I + 1} D_{I,k} \left[Q_\alpha \mathrm{E}_\alpha^{I,k}(L) \right].$$

Изменим теперь переменную, по которой суммируем: $J = (I, k)$, так что $\tilde{i}_k + 1 = \tilde{j}_k$ и $\#I + 1 = \#1 = \sum \tilde{j}_k$. Таким образом, коэффициент при $D_J\left[Q_\alpha \mathsf{E}_\alpha^J(L)\right]$ равен единице. Сравнивая с (5.86), мы видим, что недостает лишь членов $Q_\alpha \mathsf{E}_\alpha(L)$, отвечающих $\#J = 0$. Отсюда непосредственно следует (5.90). □

Операторы Эйлера высших порядков также тесно связаны с полными производными.

Предложение 5.75. *Пусть* $1 \leqslant \alpha \leqslant q$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $\#J \geqslant 0$. *Тогда*

$$\mathsf{E}_\alpha^J(D_i P) = \begin{cases} \mathsf{E}_\alpha^{J \setminus i}(P), & i \subset J, \\ 0, & i \not\subset J, \end{cases} \tag{5.92}$$

для любого $P \in \mathscr{A}$.

Доказательство. Хотя это можно вывести из (5.88) непосредственно, проще использовать свойство единственности (5.86). Имеем

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(D_i P) = \sum_{\alpha, J} D_J\left[Q_\alpha \mathsf{E}_\alpha^J(D_i P)\right].$$

С другой стороны, в силу (5.19) это равно

$$D_i\,\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P) = \sum_{\alpha, K} D_i D_K\left[Q_\alpha \mathsf{E}_\alpha^K(P)\right].$$

Замена K на $J = (K, i)$ и сравнение этих двух выражений в силу единственности немедленно дает (5.92). □

Следствие 5.76. *Дифференциальная функция P является «дивергенцией порядка n», т. е. существует $Q_I \in \mathscr{A}$, $\#I = n$, такая, что $P = \sum D_I Q_I$, если и только если $\mathsf{E}_\alpha^J(P) = 0$ для всех $\alpha = 1, \ldots, q$, $0 \leqslant \#J \leqslant n - 1$.*

Оператор полной гомотопии

Как и в нашем доказательстве леммы Пуанкаре в § 1.5, построение оператора гомотопии для D-комплекса основано на формуле для производной Ли полной дифференциальной формы по эволюционному векторному полю. Чтобы установить этот результат, мы начинаем с замечания о том, что каждый оператор, такой, как полная производная, оператор Эйлера высшего порядка или продолженное векторное поле, действующий на пространстве $\mathscr{A}$ дифференциальных функций, может действовать покоэффициентно на полные дифференциальные формы. Например, если $\omega = \sum P_I\, dx^I$, $P_I \in \mathcal{A}$, то

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\omega) = \sum \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P_I)\, dx^I. \tag{5.93}$$

В частности, полный дифференциал можно записать в виде

$$\mathrm{D}\omega = \sum_{i=1}^{p} D_i (dx^i \wedge \omega) = \sum_{i=1}^{p} dx^i \wedge D_i\omega, \tag{5.94}$$

где D_i действуют лишь на коэффициенты формы ω.

Первая цель в нашем построении — установить формулу вида (1.65), но для полного дифференциала. Таким образом, нам нужно найти операторы «внутреннего произведения» $\mathrm{I}_Q\colon \bigwedge_k \to \bigwedge_{k-1}$, $k = 1, \ldots, p$, $Q \in \mathcal{A}^q$, такие, что

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\omega) = \mathrm{DI}_Q(\omega) + \mathrm{I}_Q(\mathrm{D}\omega) \tag{5.95}$$

для любой $\omega \in \bigwedge_r$, $0 < r < p$. Оказывается, это *полное внутреннее произведение* можно записать более сжато в терминах операторов Эйлера высших порядков:

$$\mathrm{I}_Q(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\# I \geqslant 0} \sum_{k=1}^{p} \frac{\tilde{i}_k + 1}{p - r + \# I + 1} D_I \left\{ Q_\alpha \mathrm{E}_\alpha^{I,k} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner\, \omega \right) \right\}, \quad \omega \in \bigwedge_r. \tag{5.96}$$

Прежде чем доказывать, что оно удовлетворяет условию (5.95), рассмотрим два частных случая.

Пример 5.77. Если $\omega = L\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$, то $\mathrm{I}_Q(\omega) \in \bigwedge_{p-1}$ и, следовательно, имеет вид

$$\mathrm{I}_Q(\omega) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} A_k\, dx^{\hat{k}}.$$

Поскольку $(-1)^{k-1} dx^{\hat{k}} = \partial_{x^k} \lrcorner\, (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p)$, из (5.96) вытекает, что

$$A_k = \sum_{\alpha, I} \frac{\tilde{i}_k + 1}{\# I + 1} D_I \left[Q_\alpha \mathrm{E}_\alpha^{I,k}(L) \right].$$

Мы снова получили (5.91), и (5.90) можно переписать в каноническом для гомотопий виде

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\omega) = \mathrm{D}(\mathrm{I}_Q(\omega)) + Q \cdot \mathrm{E}(\omega). \tag{5.97}$$

Пример 5.78. Пусть $r = p - 1$, так что ω имеет вид

$$\omega = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} P_k\, dx^{\hat{k}}.$$

$(p-2)$-форма $\mathsf{I}_Q(\omega)$ имеет вид

$$\mathsf{I}_Q(\omega)=\sum_{j<k}(-1)^{j+k-1}R_{jk}\,dx^{\widehat{jk}},$$

где

$$R_{jk}=\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\# I\geqslant 0}D_I\left\{Q_\alpha\left(\frac{\tilde{i}_j+1}{\# I+2}\mathsf{E}_\alpha^{I,j}(P_k)-\frac{\tilde{i}_k+1}{\# I+2}\mathsf{E}_\alpha^{I,k}(P_j)\right)\right\}.$$

Формула (5.95) для производной Ли принимает вид

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(P_k)=\sum_{j=1}^{p}D_jR_{jk}+A_k, \tag{5.98}$$

где A_k дается формулой (5.91) при $L=\mathrm{Div}\,P$. Учитывая (5.92), получаем

$$A_k=\sum_{\alpha,\,I}\sum_{l\subset I}\frac{\tilde{i}_k+1}{\# I+1}D_l\left[Q_\alpha\mathsf{E}_\alpha^{I,\,k\setminus l}(P_l)\right]. \tag{5.99}$$

(Мы оставляем прямую проверку формулы (5.98) читателю.)

Доказательство формулы (5.95) — возможно, самое длинное вычисление во всей книге. (Однако представленное здесь доказательство точности D-комплекса гораздо проще более ранних вычислительных доказательств!) Мы начинаем с анализа правой части. Пользуясь (5.94), получаем

$$\mathsf{I}_Q(\mathrm{D}\omega)=\sum_{l=1}^{p}\mathsf{I}_Q\left[D_l(dx^l\wedge\omega)\right]=$$

$$=\sum_{\alpha,\,I}\sum_{k,\,l=1}^{p}\frac{\tilde{i}_k+1}{p-r+\# I}D_I\left\{Q_\alpha\mathsf{E}_\alpha^{I,k}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\lrcorner D_l(dx^l\wedge\omega)\right]\right\}, \tag{5.100}$$

поскольку $\mathrm{D}\omega$ есть $(r+1)$-форма. Главная составляющая в (5.100) — внутренняя сумма

$$\sum_{k,\,l=1}^{p}(\tilde{i}_k+1)\mathsf{E}_\alpha^{I,k}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\lrcorner D_l(dx^l\wedge\omega)\right]=$$

$$=\sum_{k,\,l=1}^{p}(\tilde{i}_k+1)\mathsf{E}_\alpha^{I,k}\left[D_l\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\lrcorner(dx^l\wedge\omega)\right)\right], \tag{5.101}$$

которую мы разбиваем на две части в соответствии с тем, $k=l$ или $k\neq l$. Если $k\neq l$, то по (5.92) $\mathsf{E}_\alpha^{I,k}\cdot D_l=\mathsf{E}_\alpha^{I\setminus l,\,k}$, где по соглашению этот оператор нулевой, если l отсутствует в I. Кроме того, согласно упр. 1.37,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner (dx^l \wedge \omega) = -dx^l \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega\right), \quad k \neq l.$$

Мы заключаем, что

$$\mathsf{E}_\alpha^{I,k}\left[\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner D_l (dx^l \wedge \omega)\right] = -\mathsf{E}_\alpha^{I \setminus l, k}\left[dx^l \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega\right)\right] \text{ при } k \neq l. \tag{5.102}$$

Случай $k = l$ немного более тонкий. Заметим сначала, что $\mathsf{E}_\alpha^{I,k} \cdot D_k = \mathsf{E}_\alpha^I$, так что соответствующая сумма равна

$$\sum_{k=1}^{p} (\tilde{i}_k + 1)\mathsf{E}_\alpha^{I,k}\left[\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner D_k (dx^k \wedge \omega)\right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \mathsf{E}_\alpha^{I}\left[\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner (dx^k \wedge \omega)\right] + \sum_{k=1}^{p} \tilde{i}_k \mathsf{E}_\alpha^{I}\left[\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner (dx^k \wedge \omega)\right]. \tag{5.103}$$

В правой части (5.103) мы пользуемся двумя другими тождествами из упр. 1.37:

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner (dx^k \wedge \omega) = (p - r)\omega$$

при первом суммировании и

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner (dx^k \wedge \omega) = \omega - dx^k \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega\right)$$

при втором. Это приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{p} (\tilde{i}_k + 1)\mathsf{E}_\alpha^{I,k}\left[\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner D_k (dx^k \wedge \omega)\right] =$$
$$= (p - r + \# I)\,\mathsf{E}_\alpha^{I}(\omega) - \sum_{k=1}^{p} \tilde{i}_k \mathsf{E}_\alpha^{I}\left[dx^k \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega\right)\right], \tag{5.104}$$

поскольку $\sum_{k=1}^{p} \tilde{i}_k = \# I$. Комбинируя (5.101), (5.102) и (5.104), мы заключаем, что

$$\sum_{k,l=1}^{p} (\tilde{i}_k+1)\,\mathsf{E}_\alpha^{I,k}\left[\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner D_l(dx^l \wedge \omega)\right] = (p-r+\# I)\,\mathsf{E}_\alpha^I(\omega) -$$
$$-\sum_{k,l=1}^{p} (\tilde{i}_k+1-\delta_l^k)\,\mathsf{E}_\alpha^{I\setminus l,k}\left[dx^l \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega\right)\right]. \qquad (5.105)$$

Это ключевое тождество в доказательстве формулы (5.95).

Теперь

$$\mathsf{I}_Q(\mathsf{D}\omega) = \sum_{\alpha, I} D_I\left(Q_\alpha \mathsf{E}_\alpha^I(\omega)\right) -$$
$$-\sum_{\alpha, I}\sum_{k, l} \frac{\tilde{i}_k+1-\delta_l^k}{p-r+\# I} D_I\left\{Q_\alpha \mathsf{E}_\alpha^{I\setminus l,k}\left[dx^l \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega\right)\right]\right\}.$$

В силу (5.86) первая сумма в правой части — это в точности $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_Q(\omega)$, так что для завершения доказательства формулы (5.95) нам нужно лишь отождествить вторую сумму с

$$-\mathsf{DI}_Q(\omega) =$$
$$= -\sum_{l=1}^{p} D_l\left\{dx^l \wedge \sum_{\alpha, J}\sum_{k} \frac{\tilde{j}_k+1}{p-r+\# J+1} D_J\left[Q_\alpha \mathsf{E}_\alpha^{J,k}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega\right)\right]\right\} =$$
$$= -\sum_{\alpha, J}\sum_{k, l} \frac{\tilde{j}_k+1}{p-r+\# J+1} D_{J,l}\left[Q_\alpha \mathsf{E}_\alpha^{J,k}\left(dx^l \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \lrcorner \omega\right)\right)\right].$$

Но эти две суммы совпадают; чтобы увидеть это, нужно заменить мультииндекс J, по которому производится суммирование, на $I = (J, l)$ и заметить, что $\tilde{i}_k = \tilde{j}_k + \delta_l^k$, $\# I = \# J + 1$. Это завершает доказательство формулы (5.95).

Теперь мы применим формулу (5.95) к случаю векторного поля растяжения $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_u$, введенного ранее в доказательстве точности вариационного комплекса. Заметим, что если $P[u] = P(x, u^{(n)})$ — произвольная гладкая дифференциальная функция, определенная на вертикально звездной области, то

$$\frac{d}{d\lambda} P[\lambda u] = \sum_{\alpha, J} u_J^\alpha \frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha}[\lambda u] = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_u(P)[\lambda u],$$

где обозначение указывает, что мы сначала применяем к P поле $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_u$, а затем вычисляем значение в λu. Интегрируя, находим

$$P[u]-P[0]=\int_0^1 \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_u(P)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda},$$

где $P[0]=P(x,0)$ — функция только от x. Поскольку $\mathrm{pr}\,\mathbf{v}_u$ действует на полную дифференциальную форму $\omega(x,u^{(n)})$ покоэффициентно, имеем аналогичную формулу

$$\omega[u]-\omega[0]=\int_0^1 \mathrm{pr}\,\mathbf{v}_u(\omega)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{5.106}$$

где $\omega[0]=\omega(x,0)$ — обычная дифференциальная форма на пространстве X. Если мы воспользуемся теперь формулой (5.95) в случае $Q=u$, в котором

$$\mathrm{I}_u(\omega)=\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{I}\sum_{k=1}^{p}\frac{\tilde{i}_k+1}{p-r+\#I+1}D_I\left\{u^\alpha \mathrm{E}_\alpha^{I,k}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\rfloor\omega\right)\right\}, \tag{5.107}$$

мы получаем формулу гомотопии

$$\omega[u]-\omega[0]=\mathrm{DH}(\omega)+\mathrm{H}(\mathrm{D}\omega), \tag{5.108}$$

где *оператор полной гомотопии* равен

$$\mathrm{H}(\omega)=\int_0^1 \mathrm{I}_u(\omega)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{5.109}$$

(это означает, что мы сначала вычисляем $\mathrm{I}_u(\omega)$, а затем заменяем u на λu там, где встречается u). Этого было бы достаточно для доказательства точности D-комплекса, если бы не член $\omega[0]$. Однако, $\omega[0]$ — обычная дифференциальная форма на $\Omega=M\cap\{u=0\}$. Поэтому, если область Ω тоже звездная, мы можем воспользоваться обычным оператором гомотопии Пуанкаре (1.69):

$$\omega[0]-\omega_0=dh(\omega[0])+h(d\omega[0]), \tag{5.110}$$

где $\omega_0=0$ при $r>0$ и $\omega_0=f(0)$, если $\omega[0]=f(x)$ — функция, $r=0$. Для таких форм полные производные D_i и частные производные $\partial/\partial x^i$ — одно и то же, так что мы можем заменить дифференциал d полным дифференциалом D. Комбинируя (5.108) и (5.110), получаем

$$\omega-\omega_0=\mathrm{DH}^*(\omega)+\mathrm{H}^*(\mathrm{D}\omega) \tag{5.111}$$

при $\omega \in \wedge_r$, $0 \leqslant r < p$, где

$$\mathsf{H}^*(\omega) = \mathsf{H}(\omega) + h(\omega[0])$$

— комбинированный оператор гомотопии. Теперь, раз мы установили формулу (5.111), доказательство теоремы 5.56 получается отсюда непосредственно.

Формула гомотопии (5.108) распространяется также на полные p-формы $\omega = L[u]\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$, если мы используем модифицированную формулу (5.97) для производной Ли. Переводя с языка дифференциальных форм, мы видим, что если $L[u] = L(x, u^{(n)})$ определена на вполне звездной области $M \subset X \times U$, то

$$L[u] = \mathrm{Div}\, B^*[u] + \int_0^1 u \cdot \mathsf{E}(L)[\lambda u]\, d\lambda, \qquad (5.112)$$

где B^* — сумма наборов из p дифференциальных функций $B[u] \in \mathcal{A}^p$ и функций $b(x)$ с составляющими

$$B_k[u] = \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{I} \frac{\tilde{i}_k + 1}{\# I + 1} D_I\left(u^\alpha \mathsf{E}_\alpha^{I,k}(L)[\lambda u]\right) d\lambda, \qquad k = 1, \ldots, p.$$
$$b_k(x) = \int_0^1 x^k L(\lambda x, 0)\, d\lambda, \qquad (5.113)$$

В частности, если $\mathsf{E}(L) = 0$, то $L = \mathrm{Div}\, B^*$, где B^* указано выше. Таким образом, мы имеем явную формулу, по которой всякий нулевой лагранжиан записывается в виде дивергенции.

Пример 5.79. Пусть $p = 2$, $q = 1$. Рассмотрим нулевой лагранжиан $L = u_x u_{yy}$. Согласно (5.112), $L = D_x A + D_y B$, где

$$A = \int_0^1 \left\{ u\mathsf{E}^{(x)}(L) + D_x(u\mathsf{E}^{(xx)}(L)) + \frac{1}{2} D_y(u\mathsf{E}^{(xy)}(L)) + \ldots \right\} d\lambda,$$

$$B = \int_0^1 \left\{ u\mathsf{E}^{(y)}(L) + \frac{1}{2} D_x(u\mathsf{E}^{(xy)}(L)) + D_y(u\mathsf{E}^{(yy)}(L)) + \ldots \right\} d\lambda,$$

где дифференциальные функции $\mathsf{E}^{(x)}(L)$, $\mathsf{E}^{(y)}(L)$ и т. д. вычислены в λu. В случае $L = u_x u_{yy}$ имеем

$$\mathsf{E}^{(x)}(L) = u_{yy}, \quad \mathsf{E}^{(y)}(L) = -2u_{xy}, \quad \mathsf{E}^{(yy)}(L) = u_x,$$

все остальные слагаемые в A и B равны нулю. (См. пример 5.73.) Таким образом,

$$A=\int_0^1 u\,(\lambda u_{yy})\,d\lambda=\frac{1}{2}uu_{yy},$$

$$B=\int_0^1 u\,(-2\lambda u_{xy})+D_y\,[u\,(\lambda u_x)]\,d\lambda=-\frac{1}{2}uu_{xy}+\frac{1}{2}u_xu_y$$

удовлетворяют указанному выше дивергентному тождеству. Даже в этом относительно простом примере легко увидеть, как быстро формула гомотопии (5.113) может стать труднообозримой. На практике часто легче угадать форму дивергенции непосредственно, прибегая к формулам (5.113) лишь в крайнем случае.

Мы заключаем этот параграф применением формулы (5.111) к случаю полных $(p-1)$-форм.

Теорема 5.80. *Пусть $P\in\mathcal{A}^q$, и пусть $L=\operatorname{Div}P$. Тогда*

$$P_k=\sum_{j=1}^{p}D_jQ^*_{jk}+B^*_k,\quad k=1,\ \ldots,\ p,\tag{5.114}$$

где $B^*=B+b$ определено равенствами (5.113) *и $Q^*_{jk}=Q_{jk}+q_{jk}$, где*

$$Q_{jk}[u]=\int_0^1\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_I D_I\left\{u^\alpha\left[\frac{\tilde{i}_j+1}{\#I+2}\mathrm{E}_\alpha^{I,\,j}(P_k)[\lambda u]-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\tilde{i}_k+1}{\#I+2}\mathrm{E}_\alpha^{I,\,k}(P_j)[\lambda u]\right]\right\}d\lambda,\tag{5.115}$$
$$q_{jk}(x)=\int_0^1\{x^jP_k(\lambda x,\ 0)-x^kP_j(\lambda x,\ 0)\}\,d\lambda.$$

В частности, если P — нулевая дивергенция, то (5.115) показывает, как явно записать P в виде «полного ротора» $P_k=\sum D_jQ^*_{jk}$, где $Q^*_{jk}=-Q^*_{kj}$. Например, в случае $p=2$ мы имеем

$$D_xP+D_y\tilde{P}=0,$$

если и только если

$$P=D_yQ,\quad \tilde{P}=-D_xQ,$$

где

$$Q=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}u\mathsf{E}^{(y)}(P)+\frac{1}{3}D_x[u\mathsf{E}^{(xy)}(P)]+\right.$$
$$+\frac{2}{3}D_y[u\mathsf{E}^{(yy)}(P)]+\ldots-\frac{1}{2}u\mathsf{E}^{(x)}(\tilde{P})-$$
$$\left.-\frac{2}{3}D_x[u\mathsf{E}^{(xx)}(\tilde{P})]-\frac{1}{3}D_y[u\mathsf{E}^{(xy)}(\tilde{P})]-\ldots\right\}d\lambda, \qquad (5.116)$$

причем $\mathsf{E}^{(x)}(\tilde{P})$, $\mathsf{E}^{(y)}(P)$ и т. д. все вычислены в λu. В качестве характерного примера рассмотрим $P=u_yu_{xy}+u_xu_{yy}$, $\tilde{P}=-u_yu_{xx}-u_xu_{xy}$, которые дают нулевую дивергенцию. Отличные от нуля выражения Эйлера, появляющиеся в (5.116),— это лишь

$$\mathsf{E}^{(y)}(P)=-2u_{xy},\quad \mathsf{E}^{(xy)}(P)=u_y,\quad \mathsf{E}^{(yy)}(P)=u_x,$$
$$\mathsf{E}^{(x)}(\tilde{P})=2u_{xy},\quad \mathsf{E}^{(xx)}(\tilde{P})=-u_y,\quad \mathsf{E}^{(xy)}(\tilde{P})=-u_x.$$

Таким образом,

$$Q=\int_0^1\left\{u(-\lambda u_{xy})+\frac{1}{3}D_x[u(\lambda u_y)]+\frac{2}{3}D_y[u(\lambda u_x)]-u(\lambda u_{xy})+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}D_x[u(\lambda u_y)]+\frac{1}{3}D_y[u(\lambda u_x)]\right\}d\lambda=u_xu_y$$

удовлетворяет условию $P=D_yQ$, $\tilde{P}=-D_xQ$.

Замечания

Обобщенные симметрии в своем теперешнем виде впервые появились в фундаментальной статье Нётер Noether [1], в которой была ясно сформулирована их роль в построении законов сохранения. В работах Anderson, Ibragimov [1] и Ибрагимов [1] утверждается, что их возникновение связано с исследованиями Ли и Бэклунда, отсюда их выбор термина «преобразование Ли — Бэклунда» для этих объектов. Насколько я могу судить, Ли допускал зависимость групповых преобразований от производных от зависимых переменных лишь в своей теории контактных преобразований (класс которых гораздо у́же класса обобщенных симметрий). Затем он (см. Lie [1; § 1.4]) поставил вопрос о существовании обобщений высших порядков этих контактных преобразований. При решении этой задачи Бэклунд (см. Bäcklund [1]) рассматривал преобразования, за-