Упражнения

5.1. Докажите, что полная группа симметрий задачи Кеплера в $\mathbb{R}^3$, включающая симметрии, задаваемые вектором Рунге — Ленца, локально изоморфна группе $SO(3, 1)$ «вращений» в $\mathbb{R}^4$, сохраняющих метрику Лоренца $(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2-(dx^4)^2$. (Goldstein [1; с. 422].)

***5.2.** Уравнение Шредингера для атома водорода — квантовый вариант задачи Кеплера. Оно имеет вид $\Delta u+|\mathbf{x}|^{-1}u=\lambda u$, где λ — константа, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ и $u\in\mathbb{R}$.

(a) Найдите геометрические симметрии этого уравнения для различных значений λ.

(b) Докажите, что «вектор Рунге — Ленца»

$$\mathbf{Q}[u]=(\mathbf{x}\times\nabla)\times\nabla u-\nabla\times(\mathbf{x}\times\nabla u)+2|\mathbf{x}|^{-1}\mathbf{x}u$$

дает три обобщенные симметрии второго порядка и их характеристики — это три компоненты вектора $\mathbf{Q}$. Покажите далее, что эти симметрии *не* выводятся из симметрий первого порядка этого уравнения, происходящих из эволюционного вида геометрических симметрий ч. (a).

(Miller [2; p. 376], Kalnins, Miller, Winternitz [1].)

***5.3.** Имеет ли система

$$u_t=u_{xx}+\frac{1}{2}v^2,\quad v_t=2v_{xx}$$

нетривиальные обобщенные симметрии кроме $\mathbf{v}=(u_{xxx}+3vv_x)\partial_u+4v_{xxx}\partial_v$? (Ср. Ибрагимов, Шабат [1].)

5.4. Предположим, что $P(u,u_x)=p(u)u_x+\tilde{p}(u)$ и $Q(u)=q(u)$ — многочлены. Докажите, что обобщенные векторные поля $\mathbf{v}_P$ и $\mathbf{v}_Q$ коммутируют, если и только если p — константа и либо $\tilde{p}=0$, либо $q=0$. (Это последний оставшийся частный случай, который нужен для доказательства теоремы 5.22.)

5.5. Пусть Δ — линейная система дифференциальных уравнений и $\mathscr{D}$ — линейный оператор рекурсии. Докажите, что если $u=f(x)$ — решение системы Δ, то $\tilde{u}=\mathscr{D}f(x)$ — тоже решение. Как связана $\exp(t\mathscr{D})u=u+t\mathscr{D}u+\ldots$ с потоком, порожденным симметрией с характеристикой $\mathscr{D}u$? Обобщается ли этот результат на операторы рекурсии для нелинейных систем?

5.6. Пусть $u_t=\mathscr{D}u$ — линейное эволюционное уравнение и $(\mathscr{E}u)\partial_u$ — линейная симметрия. Докажите, что $(\mathscr{E}^*u)\partial_u$ — линейная симметрия сопряженного уравнения $u_t=-\mathscr{D}^*u$.

5.7. Докажите, что при подходящих предположениях существования и единственности два эволюционных векторных поля коммутируют, $[\mathbf{v}_Q,\mathbf{v}_R]=0$, если и только если коммутируют их однопараметрические группы $\exp(\varepsilon\mathbf{v}_Q)$, $\exp(\varepsilon\mathbf{v}_R)$. Интерпретируйте этот факт.

5.8. Другой подход к определению потока, соответствующего обобщенному векторному полю $\mathbf{v}=\sum\xi^i\partial_{x^i}+\sum\varphi_\alpha\partial_{u^\alpha}$, может состоять в следующем. Рассмотрим бесконечное продолжение (5.3) и запишем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon}=\xi^i,\quad\frac{du^\alpha}{d\varepsilon}=\varphi_\alpha,\quad\frac{du^\alpha_J}{d\varepsilon}=\varphi^J_\alpha.$$

Определим поток поля $\mathbf{v}$ на пространстве бесконечных струй как решение этой системы с данными начальными значениями $(x,u^{(\infty)})=(x^i,u^\alpha,u^\alpha_J)$:

$$\exp[\varepsilon \operatorname{pr} \mathbf{v}](x, u^{(\infty)}) = (x(\varepsilon), u^{(\infty)}(\varepsilon)).$$

Сравните этот метод с эволюционным методом (5.18) для «векторного поля теплопроводности» $\mathbf{v} = u_{xx}\partial_u$ в случае аналитических начальных значений. Переносится ли это на векторные поля более общего вида? (Anderson, Ibragimov [1].)

5.9. (a) Что происходит при применении оператора рекурсии для уравнения Бюргерса к симметрии с характеристикой $\rho(x, t)e^{-u}$, где ρ — решение уравнения теплопроводности?

(b) Как связаны операторы рекурсии для уравнения Бюргерса и уравнения теплопроводности через преобразование Хопфа — Коула примера 2.42?

5.10. (a) Докажите, что нелинейное уравнение диффузии $u_t = D_x(u^{-2}u_x)$ допускает оператор рекурсии $\mathcal{R} = D_x^2 \cdot u^{-1}D_x^{-1}$. Как это связано с упр. 2.22(d)?

(b) Докажите, что общее нелинейное уравнение диффузии $u_t = D_x(K(u)u_x)$ допускает обобщенные симметрии, если и только если K — либо константа, либо кратное $(u+c)^{-2}$. (Bluman, Kumei [1].) [1])

5.11. Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза имеет вид $u_t = u_{xxx} + u^2u_x$.

(a) Вычислите группу геометрических симметрий этого уравнения.

(b) Докажите, что оператор $\mathcal{R} = \mathcal{D}_x^2 + (2/3)u^2 + (2/3)u_xD_x^{-1}\cdot u$ является оператором рекурсии. (Последнее слагаемое — оператор, который умножает дифференциальную функцию на u, затем применяет к ней D_x^{-1} (если это возможно) и, наконец, умножает результат на $(2/3)u_x$.) Каковы первые несколько обобщенных симметрий этого уравнения?

(c) Пусть $v_x = u$, так что v будет решением «потенциального модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза» $v_t = v_{xxx} + (1/3)v_x^3$. Найдите оператор рекурсии для этого уравнения.

(d) Докажите, что если u — любое решение модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза, то его преобразование Миуры $w = u^2 + \sqrt{-6}\,u_x$ является решением уравнения Кортевега — де Фриза. Как связаны симметрии и операторы рекурсий этих двух уравнений? (Miura [1], Olver [1].)

***5.12.** Докажите, что оператор $\mathcal{R} = D_x^2 + u_x^2 - u_xD_x^{-1}\cdot u_{xx}$ является оператором рекурсии для уравнения sin-Гордона $u_{xt} = \sin u$. (*Указание.* В формуле (5.42) $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^*$.) Каковы некоторые обобщенные симметрии? Можете ли вы связать их с обобщенными симметриями потенциального модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза из предыдущего примера? (*Указание.* Попробуйте растянуть v.) (Olver [1].)

5.13. Обсудите законы сохранения и линейные операторы рекурсии для следующих линейных уравнений:

(a) Телеграфное уравнение $u_{tt} = u_{xx} + u$. (См. упр. 2.9.)

(b) Волновое уравнение с осевой симметрией $u_{tt} - u_{xx} + (u/x) = 0$. (См. упр. 3.1.)

***5.14.** Обсудите симметрии и законы сохранения уравнения Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.

****5.15.** Обсудите обобщенные симметрии уравнений Максвелла. (См. упр. 2.16.) Что можно сказать о законах сохранения? (Фущич и Никитин [1], [2].)

***5.16.** (a) Выведите законы сохранения для двумерного волнового уравнения, перечисленные в примере 5.47. Сравните прямой метод с методом при-

---

[1]) См. п. 4 приложения I. — *Прим. ред.*

мера 5.49. Продолжите список, найдя новые плотности законов сохранения второго порядка для волнового уравнения.

(b) Пусть $x \in \mathbb{R}^p$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^q$. Рассмотрим автономную систему уравнений с частными производными $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$, содержащую u и производные от u по t и x и не содержащую t в явном виде. Докажите, что если $T(x, t, u^{(m)})$ — плотность закона сохранения, то $\partial T/\partial t$, $\partial^2 T/\partial t^2$ и т. д. — тоже плотности. Воспользуйтесь этим результатом, чтобы проверить вашу работу в ч. (a).

5.17. (a) Пусть $u_t = \mathscr{D}u$ — линейное эволюционное уравнение. Докажите, что $\int q(x, t)\, u\, dx$ сохраняется, если и только если $q(x, t)$ — решение сопряженного уравнения $q_t = -\mathscr{D}^* q$.

(b) Докажите, что если $q(x, t) = (x - 2t\partial_x)^m(1)$, то $\int q(x, t)\, u\, dx$ является законом сохранения для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Что вытекает отсюда об эволюции во времени импульса $\int x^m u(x, t)\, dx$, если u — решение уравнения теплопроводности?

(c) Сделайте то же, что в ч. (b), для уравнения Фоккера — Планка упр. 2.8. (Steinberg, Wolf [1].)

5.18. Попробуйте обобщить пример 5.34, обсудив справедливость следующего утверждения. Если $u_t = P(x, u, \ldots, u_{2m})$ — эволюционное уравнение от единственной пространственной переменной и $\partial P/\partial u_{2m} \neq 0$, то все нетривиальные законы сохранения имеют характеристики, не зависящие от u и ее производных.

5.19. Принцип Гамильтона в геометрической оптике требует минимизации интеграла $\int_a^b N(\mathbf{x})\, |d\mathbf{x}/dt|\, dt$, где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, $N(\mathbf{x})$ — оптический показатель среды и $|\,.\,|$ — обычная длина в $\mathbb{R}^3$. Какой вид имеют уравнения Эйлера — Лагранжа? Докажите, что вариационные симметрии пространственных сдвигов и вращений приводят соответственно к закону Снелла вида $N\mathbf{n} = \mathrm{const}$, где $\mathbf{n} = |d\mathbf{x}/dt|^{-1} d\mathbf{x}/dt$ — единичный вектор скорости, и «оптической теореме синусов» $N\mathbf{n} \times \mathbf{x} = \mathrm{const}$. Докажите, далее, что симметрии сдвигов по времени приводят к тривиальному закону сохранения. Что вытекает отсюда для уравнений Эйлера — Лагранжа, найденных вами? (Baker, Tavel [1].)

5.20. Пусть $p = q = 3$. Докажите, что всякий функционал $\mathscr{L}[u] = \int L(\operatorname{div} \mathbf{u})\, d\mathbf{x}$, зависящий лишь от $\operatorname{div} \mathbf{u} = u_x + v_y + w_z$, допускает бесконечномерную группу вариационных симметрий. Обсудите следствия из второй теоремы Нётер в этом случае.

5.21. В работе Kumei [1] автор нашел «новые» законы сохранения для уравнения sin-Гордона $u_{xt} = \sin u$, начиная с элементарного закона сохранения

$$D_t\left(\frac{1}{2} u_x^2\right) + D_x(\cos u) = 0$$

и применяя к нему обобщенные симметрии. Например, эволюционная симметрия с характеристикой $Q = u_{ttt} + (1/2)\, u_t^3$, как показано в этой работе, приводит к закону сохранения

$$D_t\left[u_x u_{xttt} + \frac{3}{2} u_x u_t^2 u_{xt}\right] - D_x\left[\left(u_{ttt} + \frac{1}{2} u_t^3\right) \sin u\right] = 0.$$

Покажите, что этот закон сохранения тривиален! (Какова его характеристика?) Более общо, докажите, что всякий закон сохранения, выведенный таким способом из симметрии, характеристика которой не зависит явно от x, обязательно является тривиальным.

5.22. Пусть $\mathscr{L}[u]=\int \frac{1}{2} u_x^2\,dx$. Покажите, что векторное поле $\mathbf{v}=u_x\partial_u$ является вариационной симметрией, но эквивалентое векторное поле (для уравнения Эйлера — Лагранжа $u_{xx}=0$) $\tilde{\mathbf{v}}=(u_x+u_{xx})\partial_u$ *не* является вариационной симметрией. Таким образом, отношение эквивалентности иа симметриях *не* согласовано со свойством вариационности.

***5.23.** *Нётеров вариант теоремы Нётер.* Обобщенное векторное поле $\mathbf{v}$ будет называться *строгой вариационной симметрией* функционала $\mathscr{L}=\int L\,dx$, если

$$\operatorname{pr}\mathbf{v}(L)+L\operatorname{Div}\xi=0,$$

т. е. в формуле (5.53) нет дивергентиого слагаемого, как было в нашем изначальном обсуждении вариационных симметрий в гл. 4.

(a) Докажите, что для каждого закона сохраиения уравиения Эйлера — Лагранжа $\mathsf{E}(L)=0$ существует соответствующая строгая вариационная симметрия, порождающая его в силу теоремы Нётер.

(b) Докажите, что такая строгая вариационная симметрия единственна с точностью до прибавления нулевой дивергенции в том смысле, что две строгие вариационные симметрии $\mathbf{v}=\sum\xi^i\partial_{x^i}+\sum\varphi_\alpha\partial_{u^\alpha}$ и $\tilde{\mathbf{v}}=\sum\tilde{\xi}^i\partial_{x^i}+\sum\tilde{\varphi}_\alpha\partial_{u^\alpha}$ порождают один и тот же закон сохранения, если и только если

$$\tilde{\xi}^i=\xi^i+\frac{1}{L}\sum_j D_jQ_{ij},\quad \text{где}\quad Q_{ij}=-Q_{ji}.$$

(c) Какие строгие вариационные симметрии соответствуют симметриям инверсий волнового уравнения?
(Noether [1].)

***5.24.** Докажите, что если уравнения Эйлера — Лагранжа $\mathsf{E}(L)=0$ допускают тривиальный закон сохранения, соответствующий нетривиальной вариационной симметрии, то они обязательно являются недоопределенной системой и допускают бесконечное семейство таких законов. (Ср. упр. 5.19.)

5.25. Пусть $\mathscr{L}[u]=\int L[u]\,dx$ — функционал, и пусть поле $\mathbf{v}$ порождает однопараметрическую (обобщенную) группу, которая не оставляет функционал $\mathscr{L}$ иивариантным, но только умножает его на скалярный множитель. (Например, симметрии растяжений для волнового уравнения образуют такую группу.) Докажите, что имеется дивергентиое тождество вида $\operatorname{Div}P[u]=L[u]$, которое выполняется, если u — решение уравнений Эйлера — Лагранжа $\mathsf{E}(L)=0$. (Steudel [2].)

***5.26.** Один прием, которым пользуются, чтобы построить вариационные принципы для произвольных систем дифференциальных уравнений, состоит в следующем. Если $\Delta_\nu[u]=0$, $\nu=1,\ldots,l$, — система дифференциальных уравнеиий, то мы полагаем $\mathscr{L}[u]=\int\frac{1}{2}|\Delta[u]|^2\,dx=\int\frac{1}{2}\sum_\nu(\Delta_\nu[u])^2\,dx$.

(В книге Anderson, Ibragimov [1; § 14.3] это называется «слабой лагранжевой структурой».)

(a) Докажите, что уравиеиия Эйлера — Лаграижа для $\mathscr{L}$ имеют вид $\delta\mathscr{L}=\mathsf{D}_\Delta^*(\Delta)=0$. Таким образом, решения системы $\Delta=0$ являются решениями уравнения Эйлера — Лагранжа для $\mathscr{L}$, но обратное, вообще говоря, неверно. Каковы $\mathscr{L}$ и $\delta\mathscr{L}$ в случае уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$?

(b) Докажите, что если $\mathbf{v}_Q$ — произвольная обобщенная симметрия системы Δ, то можно построить закон сохранения для Δ с характеристикой $\mathsf{D}_\Delta(Q)$, пользуясь техникой теоремы Нётер, однако этот закон сохранения всегда тривиален! Таким образом, *этот* способ нахождения вариационных принципов на практике приводит только к тривиальным законам сохранения.

***5.27.** Другой способ нахождения вариационных принципов для произвольных систем дифференциальных уравнений $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_l) = 0$ состоит в том, чтобы ввести вспомогательные переменные $v = (v^1, \ldots, v^l)$ и рассмотреть задачу $\mathscr{L}[u, v] = \int v \cdot \Delta[u]\, dx$.

(a) Докажите, что уравнения Эйлера —Лагранжа для $\mathscr{L}$ — это $\Delta = 0$ и $\mathsf{D}^*_\Delta(v) = 0$.

(b) Найдите вариационные симметрии и законы сохранения для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ этим способом. Как интерпретировать эти результаты физически?

(Atherton, Homsy [1].)

5.28. Определим псевдовариационную симметрию $\mathbf{v}$ как обобщенное векторное поле, удовлетворяющее условию (5.53) только на решениях u уравнений Эйлера — Лагранжа. Докажите, что каждой псевдовариационной симметрии нормальной вариационной задачи соответствует закон сохранения, однако всегда найдется также настоящая вариационная симметрия, приводящая к тому же закону. Как связана эта настоящая вариационная симметрия с псевдовариационной симметрией?

5.29. Пусть $\mathscr{D}\colon \mathscr{A}^r \to \mathscr{A}^s$ — матричный дифференциальный оператор. Докажите, что $\mathscr{D}Q = 0$ *для* всех $Q \in \mathscr{A}^r$, если и только если $\mathscr{D} = 0$ — нулевой оператор.

5.30. Пусть $\mathscr{D}$ — скалярный дифференциальный оператор.

(a) Докажите, что $\mathscr{D}$ симметричен, если и только если его можно записать в виде

$$\mathscr{D} = \sum_{\#J\ \text{четно}} (D_J \cdot P_J + P_J \cdot D_J),$$

где P_J — некоторые дифференциальные функции.

(b) Докажите, что $\mathscr{D}$ антисимметричен, если и только если

$$\mathscr{D} = \sum_{\#J\ \text{нечетно}} (D_J \cdot P_J + P_J \cdot D_J)$$

для некоторых P_J.

(c) В случае $p = 1$ докажите, что $\mathscr{D}$ симметричен, если и только если

$$\mathscr{D} = \sum_j D_x^j Q_j D_x^j$$

для некоторых дифференциальных функций Q_j. Обобщается ли этот результат на случай $p \geqslant 2$?

5.31. Пусть $p = q = 1$, и пусть $P(x, u^{(2n+1)})$ — дифференциальная функция. Докажите, что производная Фреше D_P антисимметрична, $\mathsf{D}^*_P = -\mathsf{D}_P$, если и только если P линейна по $u, u_x, \ldots, u_{2n+1}$. Верно ли это при $p > 1$?

***5.32.** *Принцип подстановки.* Для последующих приложений в гл. 7 нам потребуется небольшое обобщение технических результатов об обращении в нуль, таких, как в следствии 5.52 и лемме 5.61. Основная задача состоит в том, что имеется выражение, зависящее от одного или более наборов из q дифференциальных функций $Q^1, \ldots, Q^k \in \mathscr{A}^q$ и, возможно, от их *полных* производных, обладающее тем свойством, что оно обращается в нуль, когда каждая $Q^i = \delta \mathcal{Q}_i$ является вариационной производной некоторого функционала $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_k \in \mathcal{F}$. Заключение, которое нужно получить, состоит в том, что это выражение будет обращаться в нуль независимо от того, будут Q^i вариационными производными или нет.

Конкретнее, читателю нужно доказать следующее.

(a) Пусть $P \in \mathcal{A}^q$ — фиксированный набор из q дифференциальных функций. Тогда $\int P \cdot Q\, dx = 0$ при $Q = \delta \mathcal{Q} \in \mathcal{A}^q$, являющейся вариационной производной, если и только если $P = 0$ и, следовательно, $\int P \cdot Q\, dx = 0$ для всех $Q \in \mathcal{A}^q$.

(b) Пусть $\mathcal{D}$: $\mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^r$ — матричный дифференциальный оператор размера $r \times q$. Тогда $\mathcal{D}Q = 0$ при $Q = \delta \mathcal{Q} \in \mathcal{A}^q$, являющейся вариационной производной, если и только если $\mathcal{D} = 0$ и, следовательно, $\mathcal{D}Q = 0$ для всех $Q \in \mathcal{A}^q$.

c) Пусть $\mathcal{D}$: $\mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^q$ — дифференциальный оператор. Тогда $\int Q \cdot \mathcal{D}R\, dx = 0$ для всех вариационных производных $Q = \delta \mathcal{Q}$, $R = \delta \mathcal{R} \in \mathcal{A}^q$, если и только если $\mathcal{D} = 0$ и, следовательно, $\int Q \cdot \mathcal{D}R\, dx = 0$ для всех Q, $R \in \mathcal{A}^q$.

*5.33. Пусть $p = q = 1$. Докажите, что если $L = L(u^{(n)})$ не зависит явно от x, то $\int u_x \mathrm{E}(L)\, dx = 0$. Это показывает, что нужно быть осторожным с «принципом подстановки» предыдущего упражнения, поскольку следующее «небольшое» обобщение п. (a) *неверно*: если $\mathrm{P} \in \mathcal{A}^q$ и $\int P \cdot Q\, dx = 0$ для всех $Q(u^{(n)}) = \delta \mathcal{Q} \in \mathcal{A}^q$, не зависящих явно от x, то $P = 0$. Контрпример дает $P = u_x$. Является ли это единственным таким контрпримером?

5.34. Пусть $P(u^{(m)})$ — набор из q однородных дифференциальных функций степени $\alpha \neq -1$: $P(\lambda u^{(m)}) = \lambda^\alpha P(u^{(m)})$. Докажите, что $P = \mathrm{E}(L)$ для некоторого лагранжиана L, если и только если $\mathrm{E}(u \cdot P) = (\alpha + 1) P$. Верно ли это при $\alpha = -1$? (Olver, Shakiban [1], Shakiban [1].)

* **5.35.** Докажите теорему Гельмгольца 5.68 прямо, без использования вариационных форм: если $P \in \mathcal{A}^q$ имеет симметричную производную Фреше, то $P = \mathrm{E}(L)$, где L задается формулой (5.85). Обратно, если $P = \mathrm{E}(L)$ для некоторого L, то D_P симметрична.

5.36. (a) Покажите, что одно эволюционное уравнение $u_t = P[u]$, $u \in \mathbb{R}$, никогда не является уравнением Эйлера — Лагранжа ни для какой вариационной задачи. Верно ли то же самое для систем эволюционных уравнений?

(b) Один общий прием для приведения одного эволюционного уравнения к вариационному виду состоит в замене функции u на потенциальную функцию v: $u = v_x$, что приводит к уравнению $v_{xt} = P[v_x]$. Покажите, что таким способом уравнение Кортевега — де Фриза превращается в уравнение Эйлера — Лагранжа некоторого функционала. Какие геометрические и обобщенные симметрии уравнения Кортевега — де Фриза по теореме Нётер дают законы сохранения?

(c) Найдите необходимые и достаточные условия на P, чтобы прием из п. (b) приводил к уравнению Эйлера — Лагранжа.

(d) Другой прием для такого приведения эволюционного уравнения состоит в том, чтобы просто продифференцировать его по x: $u_{xt} = D_x P[u]$. Докажите, что это приводит к уравнению Эйлера — Лагранжа, если и только если $D_x P$ зависит только от x, u_x, u_{xx}, ... (но не от u), и это уравнение эквивалентно эволюционному уравнению $w_t = Q[w]$, $w = u_x$, для которого применим прием из п. (b).

***5.37.** (a) Докажите, что если $Q(x, u^{(n)})$ — произвольная система дифференциальных функций, удовлетворяющая условиям Гельмгольца $\mathrm{D}_Q = \mathrm{D}_Q^*$, и $P(\lambda, x, u^{(m)})$ — произвольное однопараметрическое семейство наборов из q дифференциальных функций, такое, что

$$P(0, x, u^{(m)}) = f(x), \quad P(1, x, u^{(m)}) = u$$

для некоторой фиксированной функции $f(x)$, то

$$L = \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial \lambda} \cdot Q(x, P^{(n)})\, d\lambda$$

является лагранжианом для Q: $\mathrm{E}(L) = Q$.

(b) Этот метод полезен для нахождения вариационных принципов для систем дифференциальных уравнений, не определенных на всем пространстве струй $M^{(n)}$. Например, пусть $p = q = 1$, $Q = u_x^{-2} u_{xx} + u_{yy}$. Воспользуйтесь семейством $P(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda u$, чтобы найти вариационный принцип для Q. Почему в этом случае не годится классическая конструкция (5.85)? (Horndeski [1].)

***5.38.** *Проблема интегрирующего множителя* в вариационном исчислении состоит в том, чтобы для даниого дифференциального уравнения $\Delta[u] = 0$ найти не обращающуюся в нуль дифференциальную функцию $Q[u]$, такую, что $0 = Q \cdot \Delta = \mathrm{E}(L)$ является уравнением Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи.

(a) Докажите, что если $\Delta[u] = u_{xx} - H(x, u, u_x)$ — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, то $Q(x, u, u_x)$ является таким множителем, если и только если Q удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + u_x \frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_x}(QH) = 0.$$

Выведите отсюда, что любое обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка всегда локально эквивалентно уравнению Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи первого порядка. (См. упр. 4.8 и 4.9.)

(b) Найдите все интегрирующие множители и соответствующие вариационные задачи для уравнения $u_{xx} - u_x = 0$.

(c) Обсудите случай дифференциального уравнения высшего порядка. (Hirsch [1]; см. Douglas [1], где имеется обобщение на системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и Anderson, Duchamp [2], где рассматривается случай уравнений с частными производными второго порядка.)

****5.39.** Здесь мы обобщаем формулу теоремы 4.8, описывающую действие оператора Эйлера при замене переменных; новые переменные теперь могут зависеть от производных от старых переменных. Пусть $x = (x^1, \ldots, x^p)$, $u = (u^1, \ldots, u^q)$ — исходные переменные. Пусть $\mathscr{L}[u] = \int L(x, u^{(n)})\, dx$ — вариационная задача с выражением Эйлера — Лагранжа $\mathrm{E}(L)$. Предположим, что $y = (y^1, \ldots, y^p)$ и $w = (w^1, \ldots, w^q)$ — новые переменные, причем $y = P(x, u^{(m)})$, $w = Q(x, u^{(m)})$ для некоторых дифференциальных функций $P \in \mathscr{A}^q$, $Q \in \mathscr{A}^q$. Пусть $\widetilde{\mathscr{L}}[w] = \int \widetilde{L}(y, w^{(l)})\, dy$ — соответствующая вариационная задача. Докажите, что

$$\mathsf{E}_{u^\alpha}(\widetilde{L})=\sum_{\beta=1}^{q}\frac{\mathsf{D}(P_1,\ldots,P_p,Q_\beta)}{\mathsf{D}(x^1,\ldots,x^p,u^\alpha)}\mathsf{E}_{w^\beta}(L).$$

Здесь коэффициент при E_{w^β} — дифференциальный оператор, заданный формулой

$$\frac{\mathsf{D}(P_1,\ldots,P_p,Q_\beta)}{\mathsf{D}(x^1,\ldots,x^p,u^\alpha)}=\det\begin{bmatrix} D_1P_1 & \ldots & D_pP_1 & \mathsf{D}^*_{P_1,\alpha}\\ \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \cdot\\ D_1P_p & \ldots & D_pP_p & \mathsf{D}^*_{P_p,\alpha}\\ D_1Q_\beta & \ldots & D_pQ_\beta & \mathsf{D}^*_{Q_\beta,\alpha}\end{bmatrix},$$

где

$$\mathsf{D}_{P,\alpha}=\sum_J\frac{\partial P}{\partial u^\alpha_J}D_J$$

— производная Фреше от P по u^α, а $\mathsf{D}^*_{P,\alpha}$ — ее сопряженная, причем в определителе во всех произведениях дифференциальные операторы пишутся первыми. Например,

$$\frac{\mathsf{D}(P,Q)}{\mathsf{D}(x,u)}(R)=\det\begin{pmatrix} D_xP & \mathsf{D}^*_P\\ D_xQ & \mathsf{D}^*_Q\end{pmatrix}R=\mathsf{D}^*_Q(D_xP\cdot R)-\mathsf{D}^*_P(D_xQ\cdot R).$$

Обсудите, почему формула (4.7) является частным случаем. Попробуйте разобрать несколько конкретных примеров, напрнмер $x=y$, $u=w_x$, чтобы увидеть, как это практически осуществляется.

5.40. *Дивергенция порядка* n — это дифференциальная фуикция $P[u]$, такая, что

$$P=\sum_{\#I=n}D_IQ_I$$

для некоторых дифференциальных функций Q_I. Например,

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=D_x^2\left(-\frac{1}{2}u_y^2\right)+D_xD_y(u_xu_y)+D_y^2\left(-\frac{1}{2}u_x^2\right)$$

— дивергенция второго порядка.

(a) Докажнте, что P является дивергенцией порядка n, если и только если $\mathsf{E}^I_\alpha(P)=0$ для всех $\alpha=1,\ldots,q$, $0\leqslant\#I\leqslant n-1$. (См. следствие 5.76.)

(b) Покажнте, что

$$u_{xx}u_{yy}-2u_{xy}v_{xy}+u_{yy}v_{xx}$$

— дивергенция второго порядка, а

$$u_{xxx}v_{yyy}-3u_{xxy}v_{xyy}+3u_{xyy}v_{xxy}-u_{yyy}v_{xxx}$$

- дивергенция третьего порядка. Можете ли вы обобщить этот результат? (Olver [6].)

* 5.41. Предположим, что $\Delta[u]=0$ — система дифференциальных уравнений, однородная в том смысле, что $\Delta[\lambda u]=\lambda^\alpha\Delta[u]$ для всех $\lambda\in\mathbb{R}$, где

α — степень однородности. Докажите, что если $\mathrm{Div}\, P = 0$ — закон сохранения с *тривиальной* характеристикой для такой системы, то сама P — тривиальный закон сохранения. (*Указание.* Сведите сначала к случаю однородного закона сохранения $P[\lambda u] = \lambda^{\beta} P[u]$. Воспользуйтесь формулой гомотопии (5.113), чтобы восстановить P по ее характеристической форме $\mathrm{Div}\, P = Q \cdot \Delta$, где $Q = 0$ при $\Delta = 0$, Q однородна.) (Olver [11].)

5.42. (a) Если $\mathscr{L}[u] = \int L[u]\, dx$ — функционал, а $\mathbf{v}_Q$ — эволюционное векторное поле, докажите, что продолженное действие

$$\mathrm{pr}\, \mathbf{v}_Q(\mathscr{L}) \equiv \int \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_Q(L)\, dx$$

дает корректно определенное отображение на пространстве $\mathscr{F}$ функционалов.

(b) Докажите, что это действие эффективно, т. е. $\mathrm{pr}\, \mathbf{v}_Q(\mathscr{L}) = 0$ для всех $\mathscr{L} \in \mathscr{F}$, если и только если $Q = 0$. Аналогично, докажите, что $\mathrm{pr}\, \mathbf{v}_Q(\mathscr{L}) = 0$ для всех $Q \in \mathscr{A}^q$, если и только если $\mathscr{L} = 0$ в $\mathscr{F}$.

(c) Обобщите это, чтобы определить производную Ли от функциональной формы по эволюционному векторному полю. Докажите формулу гомотопии, обобщающую формулу (1.66) или (5.84) на функциональные формы.

5.43. Пусть $\hat{\omega}$ — вертикальная k-форма, а $\mathbf{v}_Q$ — эволюционное векторное поле с потоком $\exp(\varepsilon \mathbf{v}_Q)$, заданным формулой (5.14). Определите подходящее действие $\exp(\varepsilon \mathbf{v}_Q)_* \hat{\omega}$ этого потока на $\hat{\omega}$ и докажите формулу для производной Ли

$$\mathrm{pr}\, \mathbf{v}_Q(\hat{\omega}) = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\exp(\varepsilon \mathbf{v}_Q)_* \hat{\omega}\right].$$

(Как всегда, мы предполагаем существование и единственность решения соответствующей задачи с начальными данными.) Можно ли сделать то же самое, если использовать определение упр. 5.8 для потока, порожденного полем $\mathbf{v}_Q$?