где

$$Q=\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} u\mathsf{E}^{(y)}(P) + \frac{1}{3} D_x [u\mathsf{E}^{(xy)}(P)] + \right.$$
$$+ \frac{2}{3} D_y [u\mathsf{E}^{(yy)}(P)] + \ldots - \frac{1}{2} u\mathsf{E}^{(x)}(\tilde{P}) -$$
$$\left. - \frac{2}{3} D_x [u\mathsf{E}^{(xx)}(\tilde{P})] - \frac{1}{3} D_y [u\mathsf{E}^{(xy)}(\tilde{P})] - \ldots \right\} d\lambda, \qquad (5.116)$$

причем $\mathsf{E}^{(x)}(\tilde{P})$, $\mathsf{E}^{(y)}(P)$ и т. д. все вычислены в λu. В качестве характерного примера рассмотрим $P = u_y u_{xy} + u_x u_{yy}$, $\tilde{P} = -u_y u_{xx} - u_x u_{xy}$, которые дают нулевую дивергенцию. Отличные от нуля выражения Эйлера, появляющиеся в (5.116), — это лишь

$$\mathsf{E}^{(y)}(P) = -2u_{xy}, \quad \mathsf{E}^{(xy)}(P) = u_y, \quad \mathsf{E}^{(yy)}(P) = u_x,$$
$$\mathsf{E}^{(x)}(\tilde{P}) = 2u_{xy}, \quad \mathsf{E}^{(xx)}(\tilde{P}) = -u_y, \quad \mathsf{E}^{(xy)}(\tilde{P}) = -u_x.$$

Таким образом,

$$Q=\int_0^1 \left\{ u(-\lambda u_{xy}) + \frac{1}{3} D_x [u(\lambda u_y)] + \frac{2}{3} D_y [u(\lambda u_x)] - u(\lambda u_{xy}) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3} D_x [u(\lambda u_y)] + \frac{1}{3} D_y [u(\lambda u_x)] \right\} d\lambda = u_x u_y$$

удовлетворяет условию $P = D_y Q$, $\tilde{P} = -D_x Q$.

Замечания

Обобщенные симметрии в своем теперешнем виде впервые появились в фундаментальной статье Нётер Noether [1], в которой была ясно сформулирована их роль в построении законов сохранения. В работах Anderson, Ibragimov [1] и Ибрагимов [1] утверждается, что их возникновение связано с исследованиями Ли и Бэклунда, отсюда их выбор термина «преобразование Ли — Бэклунда» для этих объектов. Насколько я могу судить, Ли допускал зависимость групповых преобразований от производных от зависимых переменных лишь в своей теории контактных преобразований (класс которых гораздо у́же класса обобщенных симметрий). Затем он (см. Lie [1; § 1.4]) поставил вопрос о существовании обобщений высших порядков этих контактных преобразований. При решении этой задачи Бэклунд (см. Bäcklund [1]) рассматривал преобразования, зависящие от производных от зависимых переменных произвольного порядка, и, таким образом, в некотором смысле предвосхитил теорию обобщенных симметрий. Однако и он, и Ли всегда требовали, чтобы соответствующие продолжения были связаны с геометрическими преобразованиями некоторого конечномерного пространства струй. Бэклунд заключает, что такие преобразования — это лишь продолжения обычных точечных преобразований или контактных преобразований Ли. Следовательно, на этом пути не удалось совершить скачок к собственно обобщенным симметриям. Существенно, что Бэклунд требует, чтобы его преобразования зависели лишь от конечного числа производных от зависимых переменных, тогда как для истинных обобщенных симметрий это верно после перехода к инфинитезимальным образующим (которые Бэклунд никогда не рассматривал); групповые преобразования, которые определяются решениями соответствующего эволюционного уравнения (5.14), существенно нелокальны и не определяются значениями конечного числа производных от зависимых переменных в одной точке.

С тех пор как они были введены Нётер, обобщенные симметрии много раз переоткрывались — среди прочих см. работы Johnson [1], [2] по дифференциальной геометрии, Steudel [1] по вариационному исчислению, Anderson, Kumei, Wulfman [1]. Современные приложения к дифференциальным уравнениям можно найти в работах Anderson, Ibragimov [1], Kosmann-Schwarzbach [1], [2], Fokas [3], Ибрагимов [1]; последняя книга содержит обзор работ по классификации эволюционных уравнений второго и третьего порядка, а также уравнений второго порядка от двух независимых переменных общего вида, которые допускают обобщенные симметрии [1]. В работе Steudel [1] впервые была отмечена важность эволюционного вида обобщенных векторных полей. Современные исследования по свойствам симметрий систем линейных уравнений, включая линейные уравнения теории поля (Фущчич, Никитин [1], [2*], Kalnins, Miller, Williams [1]) и теории упругости (Olver [9]), обнаружили новые обобщенные симметрии, зависящие от производных первого порядка от зависимых переменных, значение которых еще не вполне понято, хотя они, кажется, играют роль в разделении переменных в таких системах. Более полное обсуждение свойств уравнения теплопроводности, упомянутых в примере 5.11, можно найти в работе Ковалевской [1] и в книгах Forsyth [1; v. 5, § 26], Copson [1; § 12.4, § 12.5].

[1]) Дальнейшее развитие этого направления обсуждается в работе Михайлова, Шабата и Ямилова [2**]. — *Прим. ред.*

Использование операторов рекурсии для построения бесконечного семейства обобщенных симметрий и высших уравнений Кортевега — де Фриза основано на конструкции, принадлежащей Ленарду (см. Gardner, Greene, Kruskal, Miura [1]), и в общем виде появилось впервые в работе Olver [1]. Операторы рекурсии тесно связаны с сильными и наследственными симметриями из работы Fuchssteiner [1]; см. Захаров, Конопельченко [1], где имеются дальнейшие результаты. Другой метод порождения бесконечных семейств обобщенных симметрий использует понятие «мастер-симметрии», введенное в работе Fokas, Fuchssteiner [1*]. См. также Fuchssteiner [2], Chen, Lee, Lin [1*] и Oevel [1*] по поводу дальнейших исследований. (Метод построения симметрий в примере 5.18 — частный случай общего метода «мастер-симметрий».) Для линейных уравнений с частными производными симметрии высших порядков непосредственно применяются к методу разделения переменных в работах Миллера, Калнинса, Бойера, Винтерница и других с использованием операторного подхода, упомянутого в тексте; см. Miller [3] и ссылки там. Результаты, относящиеся к классификации независимых симметрий данного порядка уравнения Лапласа и волнового уравнения, появились в диссертации Делонга Delong [1]. В работе Weir [1] доказано, что все симметрии второго порядка этих двух уравнений являются линейными симметриями, однако общий случай остается открытым. Делонг доказал также, что каждая линейная симметрия уравнения Лапласа и волнового уравнения является многочленом от симметрий первого порядка. Однако это неверно для более общих линейных уравнений; см. упр. 5.2.

Если опустить часть, связанную с тривиальными симметриями и законами сохранения, вариант теоремы Нётер 5.42, сформулированный здесь, восходит к работе Bessel-Hagen [1]. (См. упр. 5.23, где приведен исходный вариант Нётер, в котором не используются дивергентные симметрии.) Соответствие между нетривиальными законами сохранения и нетривиальными группами вариационных симметрий, доказанное здесь, является новым (см. Olver [11]), хотя близко связанная с этим теорема появилась в работе Виноградова [5]. Предложение 5.40, относящееся к геометрической интерпретации групповых преобразований вариационной симметрии, можно найти в книге Edelen [1; p. 149]. Существование бесконечных семейств законов сохранения для симметрических линейных систем дифференциальных уравнений было причиной некоторого изумления в середине 1960-х гг. в связи с появлением «zilchtenzor» и связанных с ним объектов (см. работы Lipkin [1], Morgan T. A. [1] и Kibble [1] по теории поля). Объяснение, использующее обобщенные симметрии и полный вариант теоремы Нётер, аналогичный предложению 5.46, было вскоре предложено в работе Steudel [3]. Предложение 5.48 о действии симметрий на законы сохранения появилось также в работе Хамитовой [1].

Формулировка и доказательство второй теоремы Нётер 5.50 о бесконечномерных группах симметрий взяты из статьи Noether [1]. Связи с анормальностью соответствующей системы уравнений Эйлера — Лагранжа, однако, являются новыми; см. Olver [11]. Нерешенная задача здесь — завершить классификацию симметрий и законов сохранения для переопределенных систем уравнений Эйлера — Лагранжа. В частности, существует ли переопределенная система, для которой тривиальные вариационные симметрии дают нетривиальные законы сохранения? Такая система должна быть достаточно сложной; например, упр. 5.41 показывает, что она не может быть однородной по u и ее производным. (В работе Fokas [2] имеется по этому поводу ссылка на пример Ибрагимова, но цитированная там работа не содержит нужного примера.)

История вариационного комплекса и, в частности, обратной задачи вариационного исчисления довольно интересна. Гельмгольц в работе Helmholtz [1] впервые предложил задачу выяснения того, какие системы дифференциальных уравнений являются уравнениями Эйлера — Лагранжа некоторой вариационной задачи, и нашел необходимые условия для случая одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В работе Mayer [1] получено обобщение условий Гельмгольца на случай лагранжианов первого порядка, содержащих одну независимую переменную и несколько зависимых, а также доказано, что они достаточны, чтобы гарантировать существование подходящего функционала. В двух серьезных статьях на эту тему Hirsch [1], [2] Хирш распространил эти результаты на случаи лагранжианов высших порядков, содержащих либо одну независимую и несколько зависимых переменных, либо две или три независимых и одну зависимую переменные. Работы Хирша содержат также дальнейшие результаты о том, каких порядков производные могут возникать в лагранжиане, а также о «проблеме интегрирующего множителя»: когда можно умножить дифференциальное уравнение на дифференциальную функцию так, чтобы превратить его в уравнение Эйлера — Лагранжа? Однако общее условие самосопряженности и формула гомотопии (5.85) были независимо открыты Вольтерра (Volterra [1; p. 43, 48]); см. также Вайнберг [1], где приводится современный вариант. Следующей важной работой по обратной задаче была глубокая статья Douglas [1], в которой сформулирована и решена задача определения, когда система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка *эквивалентна* уравнениям Эйлера — Лагранжа некоторого функционала, зависящего от производных не больше первого порядка от зависимых переменных; сложность его решения, несомненно, помешала дальнейшим исследованиям в этом направлении. Недавние результаты, относящиеся к этому более сложному варианту обратной задачи — когда система дифференциальных уравнений эквивалентна системе уравнений Эйлера — Лагранжа — можно найти в работах Anderson, Duchamp [2], Henneaux [1]. Общий случай, однако, остается нерешенным и по сей день, см. также работу Atherton, Homsy [1], где имеются дальнейшие ссылки по обратной задаче.

В начале 1970-х годов стало ясно, что обратная задача является частью более общей конструкции — вариационного комплекса и, более общо, вариационного бикомплекса, занявшего видное положение в геометрической теории вариационного исчисления. Намеки на эту технику можно найти в работе Dedecker [1] о приложениях алгебраической топологии к вариационному исчислению. Этот комплекс впервые возник явно в работе Виноградова [1], где для доказательства точности использовались глубокие методы алгебраической топологии. Комплекс, тесно связанный с этим, появился одновременно в работах Тульчиева [1], [2]. Дальнейшее развитие этой техники можно найти в работах Kupershmidt [1], Takens [1], Anderson, Duchamp [1], Tsujishita [1]. (Другой комплекс, включающий решение обратной задачи, можно найти в работах Olver, Shakiban [1], Shakiban [1].) Методы формального вариационного исчисления, использованные в построении этого комплекса, изложенном в § 5.4, и в особенности абстрактное определение функционала многим обязаны работам Гельфанда и Дикого [1], [2] об уравнении Кортевега — де Фриза. Дальнейшее развитие этот комплекс получил в глубоких работах Виноградова [2], [3], [4] и Olver [4]. Новое доказательство точности вариационного комплекса, представленное здесь, было получено Андерсоном; операторы гомотопии (5.109) позволяют значительно упростить ранние вычислительные доказательства точности D-комплекса, имеющиеся в работе Takens [1], Anderson, Duchamp [1]. Сами операторы Эйлера высших порядков появились впервые в работе Kruskal, Miura, Gardner, Zabusky [1] об уравнении Кортевега — де Фриза и получили дальнейшее развитие в работах Aldersley [1], Galindo, Martinez-Alonso [1], Olver [3]. Настоящее изложение следует Андерсону (I. Anderson). Есть надежда, что эти методы вдохновят дальнейшие исследования в геометрической теории вариационного исчисления.