6. Конечномерные гамильтоновы системы

Важное понятие гамильтоновой системы дифференциальных уравнений составляет основу большинства наиболее продвинутых теорий классической механики, включая движение твердого тела, небесную механику, теорию квантования и т. д. В последнее время возросла важность гамильтоновых методов в изучении уравнений механики сплошной среды, включая механику жидкости, физику плазмы и теорию упругости. В этой книге мы интересуемся лишь одним аспектом этого обширного предмета, а именно взаимодействием между группами симметрий, законами сохранения и понижением порядка систем в гамильтоновой форме. Гамильтонов вариант теоремы Нётер обладает исключительно притягательным геометрическим ароматом, который остается скрытым, если оставаться в рамках лагранжева подхода.

Поскольку предварительное знакомство с гамильтоновой механикой не предполагается, первым делом нужно разъяснить понятие гамильтоновой системы дифференциальных уравнений. В этой главе мы сосредоточимся на более известном и концептуально более легком случае обыкновенных дифференциальных уравнений. После этого обобщение на системы эволюционных уравнений, предпринятое в гл. 7, окажется вполне естественным. Есть несколько различных подходов к изложению гамильтоновой механики. Подход, предложенный здесь, является в какой-то степени новым. Важно осознать необходимость бескоординатного рассмотрения «гамильтоновых структур», не предполагающего введения специальных канонических координат (p и q в элементарных учебниках по классической механике). Конечно, всегда имеется искушение упростить дело, насколько возможно. Теорема Дарбу утверждает, что для конечномерных систем постоянного ранга мы при желании всегда можем ввести такие координаты, упрощающие формулы. Однако такой подход к задаче не всегда оказывается наиболее естественным и прямым. Кроме того, в бесконечномерном варианте этой теории, который будет обсуждаться позже, аналогичный результат неверен; следовательно, если мы хотим заложить надлежащее основание в конечномерной теории, позволяющее совершить переход к бесконечномерному случаю и эволюционным уравнениям, мы должны отбросить прочь «костыль» канонических координат и подходить к гамильтоновой структуре с более внутренней точки зрения.

Но и бескоординатных подходов к гамильтоновой механике существует несколько. Наименьшей подготовительной работы по дифференциально-геометрическому обоснованию требует подход, сосредоточенный на изучении скобки Пуассона в качестве основного объекта. Он позволяет почти совсем избежать дифференциальных форм и перейти прямо к существу предмета. К тому же подход, основанный на скобке Пуассона, допускает гамильтоновы структуры переменного ранга (в смысле, который будет вскоре определен), оказавшиеся важными в недавней работе о коллективном возбуждении и устойчивости. Этот подход включает как важный частный случай скобку Ли — Пуассона на алгебре, двойственной к алгебре Ли, которая играет ключевую роль в теории представлений и геометрическом квантовании, а также дает теоретическую основу общей теории редукции гамильтоновых систем с симметрией.

6.1. СКОБКИ ПУАССОНА

Пусть дано гладкое многообразие M. *Скобка Пуассона* на M сопоставляет каждой паре гладких вещественнозначных функций $F, H: M \to \mathbb{R}$ новую гладкую вещественнозначную функцию, которую мы будем обозначать через $\{F, H\}$. Чтобы называться скобкой Пуассона, такая скобочная операция должна обладать определенными свойствами. Мы сформулируем эти свойства сначала в простом бескоординатном виде. Впоследствии мы перепишем их в локальных координатах, и в таком виде их также можно взять в качестве определяющих свойств скобки Пуассона, особенно если M — открытое подмножество некоторого евклидова пространства.

Определение 6.1. *Скобка Пуассона* на гладком многообразии M — это операция, сопоставляющая каждой паре F, H гладких вещественнозначных функций гладкую вещественнозначную функцию $\{F, H\}$ на M и обладающая следующими свойствами:

(а) *билинейность*:

$$\{cF + c'P, H\} = c\{F, H\} + c'\{P, H\},$$
$$\{F, cH + c'P\} = c\{F, H\} + c'\{F, P\}$$

для любых $c, c' \in \mathbb{R}$;

(b) *кососимметричность*:

$$\{F, H\} = -\{H, F\};$$

(c) *тождество Якоби*:

$$\{\{F, H\}, P\} + \{\{P, F\}, H\} + \{\{H, P\}, F\} = 0;$$

(d) *правило Лейбница*:

$$\{F, H \cdot P\} = \{F, H\} \cdot P + H \cdot \{F, P\}.$$

(Здесь $\cdot$ обозначает обычное умножение функций.) Во всех этих равенствах F, H и P — произвольные гладкие вещественнозначные функции на M.

Многообразие M со скобкой Пуассона называется *пуассоновым многообразием*, а скобка определяет *пуассонову структуру* на M. Понятие пуассонова многообразия является несколько более общим, чем понятие симплектического многообразия или многообразия с гамильтоновой структурой; в частности, многообразие M не обязано быть четномерным. Это подтверждается стандартными примерами из классической механики.

Пример 6.2. Пусть M — четномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(p, q) = (p^1, \ldots, p^n, q^1, \ldots, q^n)$ (в физических задачах координаты p задают импульсы, а q — положения механических объектов). Мы определяем скобку Пуассона двух гладких функций $F(p, q)$ и $H(p, q)$ формулой

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right\}. \tag{6.1}$$

Ясно, что эта операция билинейна и кососимметрична; проверка тождества Якоби и правила Лейбница является упражнением по тензорному исчислению, и мы оставляем ее читателю. Отметим, в частности, тождества

$$\{p^i, p^j\} = 0, \quad \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{q^i, p^j\} = \delta^i_j, \tag{6.2}$$

где i и j пробегают от 1 до n, а δ^i_j — символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и 0 в противном случае. (В (6.2) мы рассматриваем сами координаты как функции на M.)

Более общо, мы можем определить скобку Пуассона на произвольном евклидовом пространстве $M = \mathbb{R}^m$. Пусть $(p, q, z) = (p^1, \ldots, p^n, q^1, \ldots, q^n, z^1, \ldots, z^l)$ — координаты, так что $2n + l = m$. Определим скобку Пуассона двух функций $F(p, q, z)$, $H(p, q, z)$ той же формулой (6.1). В частности, если функция

$F(z)$ зависит только от z, то $\{F, H\}=0$ для всех функций H. Такие функции, в частности сами z^k, называются *отмеченными функциями* или *функциями Казимира*. Они характеризуются тем, что их скобка Пуассона с любой другой функцией всегда равна нулю. Следует дополнить при этом основные координатные соотношения (6.2) дополнительными соотношениями

$$\{p^i, z^k\}=\{q^i, z^k\}=\{z^j, z^k\}=0 \tag{6.3}$$

для всех $i=1, \ldots, n$ и $j, k=1, \ldots, l$. Хотя этот пример выглядит несколько специальным, теорема Дарбу 6.22 покажет, что, если исключить особые точки, локально каждая скобка Пуассона имеет такой вид. Поэтому мы называем (6.1) *канонической скобкой Пуассона.*

Определение 6.3. Пусть M — пуассоново многообразие. Гладкая вещественнозначная функция $C\colon M\to\mathbb{R}$ называется *отмеченной функцией*, если скобка Пуассона функции C с любой другой вещественнозначной функцией тождественно обращается в 0, т. е. $\{C, H\}=0$ для всех $H\colon M\to\mathbb{R}$.

В случае канонической скобки Пуассона (6.1) на $\mathbb{R}^{2n}$ единственными отмеченными функциями являются константы, которые всегда удовлетворяют требованиям определения 6.3. Ему противоположен случай тривиальной скобки Пуассона, когда $\{F, H\}=0$ для всех F, H и любая функция является отмеченной.

Гамильтоновы векторные поля

Пусть M — пуассоново многообразие, так что скобка Пуассона удовлетворяет требованиям определения 6.1. Для заданной гладкой функции H на M отображение $F\mapsto\{F, H\}$ определяет ввиду билинейности и правила Лейбница дифференцирование на пространстве гладких функций F на M, а следовательно, в силу (1.20) и (1.21) и векторное поле на M. Это наблюдение приводит к фундаментальному определению.

Определение 6.4. Пусть M — пуассоново многообразие и $H\colon M\to\mathbb{R}$ — гладкая функция. *Гамильтоновым векторным полем*, соответствующим функции H, называется единственное гладкое векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_H$ на M, удовлетворяющее условию

$$\hat{\mathbf{v}}_H(F)=\{F, H\}=-\{H, F\} \tag{6.4}$$

для каждой гладкой функции $F: M \to \mathbb{R}$. Уравнения потока векторного поля $\hat{\mathbf{v}}_H$ называются *уравнениями Гамильтона* для «гамильтониана» H.

Пример 6.5. В случае канонической скобки Пуассона (6.1) на $\mathbb{R}^m$, $m = 2n + l$, гамильтоново векторное поле, соответствующее функции $H(p, q, z)$, очевидно, имеет вид

$$\hat{\mathbf{v}}_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right). \tag{6.5}$$

Соответствующий поток получается интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6.6}$$

$$\frac{dz^j}{dt} = 0, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{6.7}$$

которые в этом случае являются уравнениями Гамильтона. В невырожденном случае $m = 2n$ мы получаем только (6.6). Это каноническая форма уравнений Гамильтона классической механики. В более общем случае (6.7) просто добавляет условие постоянства отмеченных координат z^j под действием потока. В частности, если функция H зависит только от отмеченных координат z, ее гамильтонов поток тривиален. Это замечание справедливо и в общем случае: функция C на пуассоновом многообразии является отмеченной, если и только если ее гамильтоново векторное поле всюду равно нулю: $\hat{\mathbf{v}}_C = 0$.

Между скобкой Пуассона пары функций и скобкой Ли соответствующих гамильтоновых векторных полей имеется глубокая связь, которая во многом составляет основу теории гамильтоновых систем.

Предложение 6.6. *Пусть M — пуассоново многообразие. Пусть $F, H: M \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, $\hat{\mathbf{v}}_F$, $\hat{\mathbf{v}}_H$ — соответствующие им гамильтоновы векторные поля. Гамильтоново векторное поле, соответствующее скобке Пуассона функций F и H, с точностью до знака совпадает со скобкой Ли этих двух гамильтоновых векторных полей:*

$$\hat{\mathbf{v}}_{\{F, H\}} = -[\hat{\mathbf{v}}_F, \hat{\mathbf{v}}_H] = [\hat{\mathbf{v}}_H, \hat{\mathbf{v}}_F]. \tag{6.8}$$

Доказательство. Пусть $P\colon M \to \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция. Пользуясь определением скобки Ли, получаем, что

$$[\hat{\mathbf{v}}_H, \hat{\mathbf{v}}_F]P = \hat{\mathbf{v}}_H \cdot \hat{\mathbf{v}}_F(P) - \hat{\mathbf{v}}_F \cdot \hat{\mathbf{v}}_H(P) = \hat{\mathbf{v}}_H\{P, F\} - \hat{\mathbf{v}}_F\{P, H\} =$$
$$= \{\{P, F\}, H\} - \{\{P, H\}, F\} = \{P, \{F, H\}\} = \hat{\mathbf{v}}_{\{F, H\}}(P).$$

Здесь мы использовали тождество Якоби, кососимметричность скобки Пуассона и определение (6.4) гамильтонова векторного поля. Поскольку P — произвольная функция, это доказывает формулу (6.8). □

Пример 6.7. Пусть $M = \mathbb{R}^2$ с координатами (p, q) и канонической скобкой Пуассона $\{F, H\} = F_qH_p - F_pH_q$. Гамильтоново векторное поле, соответствующее функции $H(p, q)$, имеет вид $\hat{\mathbf{v}}_H = H_p\partial_q - H_q\partial_p$. Таким образом, для $H = (1/2)(p^2 + q^2)$ имеем $\hat{\mathbf{v}}_H = p\partial_q - q\partial_p$, а для $F = pq$ имеем $\hat{\mathbf{v}}_F = q\partial_q - p\partial_p$. Скобка Пуассона функций F и H равна $\{F, H\} = p^2 - q^2$, а соответствующее гамильтоново векторное поле имеет вид $\hat{\mathbf{v}}_{\{F, H\}} = 2p\partial_q + 2q\partial_p$. Как может проверить читатель, оно совпадает с коммутатором $[\hat{\mathbf{v}}_H, \hat{\mathbf{v}}_F]$.

Структурные функции

Чтобы получить общую картину пуассонова многообразия в локальных координатах, рассмотрим сначала гамильтоновы векторные поля. Пусть $x = (x^1, \ldots, x^m)$ — локальные координаты на M и $H(x)$ — вещественнозначная функция. Соответствующее гамильтоново векторное поле будет в общем случае иметь вид $\hat{\mathbf{v}}_H = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\partial/\partial x^i$, где функции $\xi^i(x)$, зависящие от H, следует определить. Пусть $F(x)$ — другая гладкая функция. Используя (6.4), находим

$$\{F, H\} = \hat{\mathbf{v}}_H(F) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial F}{\partial x^i}.$$

Но снова в силу (6.4)

$$\xi^i(x) = \hat{\mathbf{v}}_H(x^i) = \{x^i, H\},$$

так что эта формула принимает вид

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{m} \{x^i, H\}\frac{\partial F}{\partial x^i}. \tag{6.9}$$

С другой стороны, кососимметричность скобки Пуассона позволяет нам обратить всю процедуру и выразить скобку Пуассона любой пары функций через гамильтоновы векторные поля $\hat{\mathbf{v}}_i=\hat{\mathbf{v}}_{x^i}$, соответствующие локальным координатным функциям x^i. А именно,

$$\{x^i, H\}=-\{H, x^i\}=-\hat{\mathbf{v}}_i(H)=-\sum_{j=1}^{m}\{x^j, x^i\}\frac{\partial H}{\partial x^j},$$

где последнее равенство получается применением формулы (6.9) с заменой F на H, а H на x^i. Таким образом, получаем основную формулу

$$\{F, H\}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\{x^i, x^j\}\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j} \tag{6.10}$$

для скобки Пуассона. Другими словами, для вычисления скобки Пуассона любой пары функций в некоторой данной системе локальных координат достаточно знать скобки Пуассона самих координатных функций. Эти базисные скобки

$$J^{ij}(x)=\{x^i, x^j\}, \quad i, j=1, \ldots, m, \tag{6.11}$$

называются *структурными функциями* пуассонова многообразия M относительно данной локальной системы координат. Они однозначно определяют пуассонову структуру. Для удобства мы сведем структурные функции в кососимметричную матрицу $J(x)$ размера $m\times m$, называемую *структурной матрицей* многообразия M. Обозначая вектор градиента функции H через ∇H, перепишем формулу (6.10) для скобки Пуассона в локальных координатах в виде

$$\{F, H\}=\nabla F\cdot J\nabla H. \tag{6.12}$$

Например, в случае канонической скобки (6.1) на $\mathbb{R}^m$, $m=2n+l$, структурная матрица имеет простой вид

$$J=\begin{pmatrix}0 & -I & 0\\ I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

относительно координат (p, q, z), где I — единичная матрица размера $n\times n$.

Гамильтоново векторное поле, соответствующее функции $H(x)$, имеет вид

$$\hat{\mathbf{v}}_H=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}J^{ij}(x)\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \tag{6.13}$$

или, в матричной записи, $\hat{\mathbf{v}}_H = (J\nabla H)\cdot\partial_x$, где ∂_x — «вектор» с компонентами $\partial/\partial x^i$. Поэтому в данной координатной карте уравнения Гамильтона принимают вид [1])

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\nabla H(x). \tag{6.14}$$

С другой стороны, используя (6.9), мы могли бы переписать это выражение в «скобочной форме»

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\},$$

где i-я компонента правой части равна $\{x^i, H\}$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка называется *гамильтоновой*, если существуют такая функция $H(x)$ и такая матрица функций $J(x)$, определяющая скобку Пуассона (6.13), что система принимает вид (6.14). Конечно, нам нужно знать, какие матрицы $J(x)$ являются структурными матрицами скобок Пуассона.

Предложение 6.8. *Пусть $J(x) = (J^{ij}(x))$ — матрица размера $m\times m$ функций от $x = (x^1, \ldots, x^m)$, определенных на открытом подмножестве $M\subset\mathbb{R}^m$. Тогда $J(x)$ является структурной матрицей для некоторой скобки Пуассона $\{F, H\} = \nabla F\cdot J\nabla H$* на M, *если и только если выполняются следующие условия:*

(a) кососимметричность:

$$J^{ij}(x) = -J^{ji}(x), \quad i, j = 1, \ldots, m;$$

(b) тождество Якоби:

$$\sum_{l=1}^{m}\{J^{il}\partial_l J^{jk} + J^{kl}\partial_l J^{ij} + J^{jl}\partial_l J^{ki}\} = 0, \quad i, j, k = 1, \ldots, m, \tag{6.15}$$

для всех $x\in M$ (здесь, как обычно, $\partial_l = \partial/\partial x^l$).

Доказательство. В своей основной форме (6.12) скобка Пуассона автоматически билинейна и удовлетворяет правилу Лейбница. Кососимметричность структурной матрицы, очевидно, эквивалентна кососимметричности скобки. Таким образом, нужно проверить лишь эквивалентность условия (6.15) тождеству Якоби. Заметим, что в силу (6.10) и (6.11)

$$\{\{x^i, x^j\}, x^k\} = \sum_{l=1}^{m} J^{lk}(x)\,\partial_l J^{ij}(x),$$

---

[1]) Более общо, мы можем рассматривать функции $H(x, t)$, зависящие от времени. Это приведет к зависящим от времени гамильтоновым векторным полям; см. § 6.3.

и поэтому равенство (6.15) эквивалентно тождеству Якоби для координатных функций x^i, x^j и x^k. В общем случае для функций F, H, P: $M \to \mathbb{R}$ имеем

$$\{\{F, H\}, P\} = \sum_{k,l=1}^{m} J^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\sum_{i,j=1}^{m} J^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j}\right\}\frac{\partial P}{\partial x^k} =$$

$$= \sum_{i,j,k,l}\left\{J^{lk}\frac{\partial J^{ij}}{\partial x^l}\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial P}{\partial x^k} + \right.$$

$$\left. + J^{lk}J^{ij}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^l \partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial P}{\partial x^k} + \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial^2 H}{\partial x^l \partial x^j}\frac{\partial P}{\partial x^k}\right)\right\}.$$

Суммируя по циклическим перестановкам F, H, P, получаем, что первое множество слагаемых обращается в нуль в силу (6.15), а остальные члены взаимно уничтожаются в силу кососимметричности структурной матрицы. □

Заметим, что мы могли бы принять условия предложения 6.8 на структурную матрицу за определение скобки Пуассона (6.12) в локальной координатной карте. Условия (6.15), обеспечивающие выполнение тождества Якоби, составляют большую систему *нелинейных* дифференциальных уравнений с частными производными, которым должны удовлетворять структурные функции. В частности, любая постоянная кососимметричная матрица J тривиально удовлетворяет уравнениям (6.15) и тем самым определяет некоторую скобку Пуассона.

Структура Ли — Пуассона

Один из наиболее важных примеров пуассоновой структуры связан с алгебрами Ли. Рассмотрим r-мерную алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Пусть c_{ij}^k, $i, j, k = 1, \ldots, r$, — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$. Пусть V — другое r-мерное векторное пространство с координатами $x = (x^1, \ldots, x^r)$, определенными базисом $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$. Определим *скобку Ли — Пуассона* пары функций F, H: $V \to \mathbb{R}$ формулой

$$\{F, H\} = \sum_{i,j,k=1}^{r} c_{ij}^k x^k \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j}. \tag{6.16}$$

Ясно, что это равенство имеет вид (6.10) с линейными структурными функциями $J^{ij}(x) = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k x^k$. Свойства структурной матрицы из предложения 6.8 легко вытекают из основных свойств

(1.43), (1.44) структурных констант. В частности, как легко может проверить читатель, (6.15) сводится к тождеству Якоби (1.44).

Скобку Ли — Пуассона можно описать более инвариантно. Напомним, прежде всего, что для любого векторного пространства V и гладкой вещественнозначной функции $F\colon V \to \mathbb{R}$ градиент $\nabla F(x)$ в любой точке $x \in V$ естественно является элементом двойственного векторного пространства V^*, состоящего из всех (непрерывных) линейных функций на V. В самом деле, по определению

$$\langle \nabla F(x);\ y\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(x+\varepsilon y) - F(x)}{\varepsilon}$$

для любого $y \in V$, где $\langle\ ;\ \rangle$ — естественное спаривание пространства V и двойственного к нему пространства V^*. Учитывая это, мы отождествляем линейное пространство V, участвующее в исходной конструкции скобки Ли — Пуассона, с двойственным пространством $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, причем $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ — двойственный базис к $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$. Градиент $\nabla F(x)$ любой гладкой функции $F\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ является элементом пространства $(\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$ (поскольку алгебра $\mathfrak{g}$ конечномерна). Тогда скобка Ли — Пуассона в инвариантной форме имеет вид

$$\{F, H\}(x) = \langle x;\ [\nabla F(x), \nabla H(x)]\rangle, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \tag{6.17}$$

где $[\ ,\ ]$ — обычная скобка Ли на самой алгебре Ли $\mathfrak{g}$; доказательство мы оставляем читателю. Для любой функции $H\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ соответствующая система уравнений Гамильтона имеет вид

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j,k=1}^{r} c_{ij}^k x^k \frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

куда явно входят координаты x^k.

Пример 6.9. Рассмотрим трехмерную алгебру Ли $\mathfrak{so}(3)$ группы вращений $\mathrm{SO}(3)$. Используя базис $\mathbf{v}_1 = y\partial_z - z\partial_y$, $\mathbf{v}_2 = z\partial_x - x\partial_z$, $\mathbf{v}_3 = x\partial_y - y\partial_x$ инфинитезимальных вращений вокруг осей x, y и z в $\mathbb{R}^3$ (или их матричные представления), мы получим соотношения для коммутаторов $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = -\mathbf{v}_3$, $[\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] = -\mathbf{v}_2$, $[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = -\mathbf{v}_1$. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — двойственный базис в $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ и $u = u^1\omega_1 + u^2\omega_2 + u^3\omega_3$ — точка общего вида. Градиент функции $F\colon \mathfrak{so}(3)^* \to \mathbb{R}$ тогда является вектором

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial u^1}\mathbf{v}_1 + \frac{\partial F}{\partial u^2}\mathbf{v}_2 + \frac{\partial F}{\partial u^3}\mathbf{v}_3 \in \mathfrak{so}(3).$$

Таким образом, из (6.17) получаем формулу для скобки Ли—Пуассона на $\mathfrak{so}(3)^*$:

$$\{F, H\} = u^1\left(\frac{\partial F}{\partial u^3}\frac{\partial H}{\partial u^2} - \frac{\partial F}{\partial u^2}\frac{\partial H}{\partial u^3}\right) + u^2\left(\frac{\partial F}{\partial u^1}\frac{\partial H}{\partial u^3} - \frac{\partial F}{\partial u^3}\frac{\partial H}{\partial u^1}\right) +$$
$$+ u^3\left(\frac{\partial F}{\partial u^2}\frac{\partial H}{\partial u^1} - \frac{\partial F}{\partial u^1}\frac{\partial H}{\partial u^2}\right) =$$
$$= -u \cdot \nabla F \times \nabla H,$$

где $\times$ — обычное векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, структурная матрица имеет вид

$$J(u) = \begin{pmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathfrak{so}(3)^*.$$

Уравнения Гамильтона, соответствующие гамильтониану $H(u)$, поэтому принимают вид

$$\frac{du}{dt} = u \times \nabla H(u).$$

Например, если

$$H(u) = \frac{(u^1)^2}{2I_1} + \frac{(u^2)^2}{2I_2} + \frac{(u^3)^2}{2I_3},$$

где I_1, I_2, I_3 — некоторые константы, то уравнения Гамильтона становятся *уравнениями Эйлера* движения твердого тела

$$\frac{du^1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} u^2 u^3, \quad \frac{du^2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} u^3 u^1, \quad \frac{du^3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} u^1 u^2, \qquad (6.18)$$

где (I_1, I_2, I_3) — моменты инерции относительно координатных осей, а u^1, u^2, u^3 — соответствующие моменты количества движения (угловые скорости равны $\omega^i = u^i/I_i$). Гамильтониан является кинетической энергией тела.

6.2. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И СЛОЕНИЯ

Чтобы достичь более полного понимания геометрии, лежащей в основе общей пуассоновой структуры на гладком многообразии, мы должны тщательно изучить структурную матрицу $J(x)$, задающую скобку Пуассона в локальных координатах. Важнейшим инвариантом этой матрицы является ее ранг. Если ранг всюду максимален, то, как будет видно, мы находимся в наиболее стандартной ситуации «симплектической структуры». Эта ситуация рассмотрена в большинстве работ по гамильтоновой механике. Мы увидим, что в более общем случае немаксималь-