Таким образом, из (6.17) получаем формулу для скобки Ли — Пуассона на $\mathfrak{so}(3)^*$:

$$\{F, H\} = u^1\left(\frac{\partial F}{\partial u^3}\frac{\partial H}{\partial u^2} - \frac{\partial F}{\partial u^2}\frac{\partial H}{\partial u^3}\right) + u^2\left(\frac{\partial F}{\partial u^1}\frac{\partial H}{\partial u^3} - \frac{\partial F}{\partial u^3}\frac{\partial H}{\partial u^1}\right) + u^3\left(\frac{\partial F}{\partial u^2}\frac{\partial H}{\partial u^1} - \frac{\partial F}{\partial u^1}\frac{\partial H}{\partial u^2}\right) = -u \cdot \nabla F \times \nabla H,$$

где $\times$ — обычное векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, структурная матрица имеет вид

$$J(u) = \begin{pmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathfrak{so}(3)^*.$$

Уравнения Гамильтона, соответствующие гамильтониану $H(u)$, поэтому принимают вид

$$\frac{du}{dt} = u \times \nabla H(u).$$

Например, если

$$H(u) = \frac{(u^1)^2}{2I_1} + \frac{(u^2)^2}{2I_2} + \frac{(u^3)^2}{2I_3},$$

где I_1, I_2, I_3 — некоторые константы, то уравнения Гамильтона становятся *уравнениями Эйлера* движения твердого тела

$$\frac{du^1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} u^2 u^3, \quad \frac{du^2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} u^3 u^1, \quad \frac{du^3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} u^1 u^2, \tag{6.18}$$

где (I_1, I_2, I_3) — моменты инерции относительно координатных осей, а u^1, u^2, u^3 — соответствующие моменты количества движения (угловые скорости равны $\omega^i = u^i/I_i$). Гамильтониан является кинетической энергией тела.

6.2. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И СЛОЕНИЯ

Чтобы достичь более полного понимания геометрии, лежащей в основе общей пуассоновой структуры на гладком многообразии, мы должны тщательно изучить структурную матрицу $J(x)$, задающую скобку Пуассона в локальных координатах. Важнейшим инвариантом этой матрицы является ее ранг. Если ранг всюду максимален, то, как будет видно, мы находимся в наиболее стандартной ситуации «симплектической структуры». Эта ситуация рассмотрена в большинстве работ по гамильтоновой механике. Мы увидим, что в более общем случае немаксимального ранга пуассоново многообразие M естественно расслаивается на симплектические подмногообразия таким образом, что любая гамильтонова система на M естественно ограничивается на любое из этих симплектических подмногообразий, и, следовательно, это ограничение возвращает нас к более классической гамильтоновой механике. Однако во многих задачах более естественно оставаться на само́м объемлющем многообразии, особенно когда нас интересует совместное поведение систем, зависящих от параметров, и соответствующие симплектические структуры сами меняются при изменении параметров.

Соответствие между 1-формами и векторными полями

Как мы видели в предыдущем параграфе, пуассонова структура на многообразии M устанавливает соответствие между гладкими функциями $H\colon M \to \mathbb{R}$ и ассоциированными с ними гамильтоновыми векторными полями $\hat{\mathbf{v}}_H$ на M. В локальных координатах это соответствие задается умножением градиента ∇H на структурную матрицу $J(x)$, определенную скобкой Пуассона. Этому можно придать более инвариантную формулировку, вспомнив, что бескоординатной формой градиента вещественнозначной функции H является ее дифференциал dH. Таким образом, пуассонова структура определяет соответствие между дифференциальными 1-формами dH на M и соответствующими гамильтоновыми векторными полями $\hat{\mathbf{v}}_H$, которое на самом деле продолжается на 1-формы общего вида:

Предложение 6.10. *Пусть M — пуассоново многообразие и $x \in M$. Тогда существует единственное линейное отображение*

$$\mathsf{B} = \mathsf{B}|_x\colon T^*M|_x \to TM|_x$$

из кокасательного пространства к M в точке x в соответствующее касательное пространство, такое, что для любой гладкой вещественнозначной функции $H\colon M \to \mathbb{R}$

$$\mathsf{B}(dH(x)) = \hat{\mathbf{v}}_H|_x. \tag{6.19}$$

Доказательство. Кокасательное пространство $T^*M|_x$ в любой точке $x \in M$ порождено дифференциалами $\{dx^1, \ldots, dx^m\}$, соответствующими локальным координатным функциям вблизи точки x. Из (6.13) мы видим, что в точке $x \in M$

$$\mathsf{B}(dx^j) = \sum_{i=1}^{m} J^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Ввиду линейности для любого ковектора $\omega = \sum a_j dx^j \in T^*M|_x$

$$\mathbf{B}(\omega) = \sum_{i,\, j=1}^{m} J^{ij}(x)\, a_j \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x$$

есть по существу результат умножения ω на структурную матрицу $J(x)$, что и доказывает предложение. □

Пример 6.11. На $\mathbb{R}^m$ с каноническими координатами (p, q, z), как в примере 6.2, для любой 1-формы

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} [a_i\, dp^i + b_i\, dq^i] + \sum_{j=1}^{l} c_j\, dz^j$$

имеем

$$\mathbf{B}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ a_i \frac{\partial}{\partial q^i} - b_i \frac{\partial}{\partial p^i} \right\}.$$

В этом частном случае вид отображения $\mathbf{B}$ не меняется от точки к точке. В частности, размерность ядра $\mathbf{B}$ равна числу отмеченных координат $z^1, \ldots, z^l$.

Ранг пуассоновой структуры

Определение 6.12. Пусть M — пуассоново многообразие и $x \in M$. *Рангом M* в точке x называется ранг линейного отображения $\mathbf{B}|_x\colon T^*M|_x \to TM|_x$.

В локальных координатах отображение $\mathbf{B}|_x$ совпадает с умножением на структурную матрицу $J(x)$; поэтому ранг M в точке x равен рангу $J(x)$ независимо от выбора координат. Из кососимметричности J немедленно следует

Предложение 6.13. *Ранг пуассонова многообразия в любой точке четен.*

Например, ранг канонической пуассоновой структуры (6.1) на $\mathbb{R}^m$, $m = 2n + l$, постоянен и равен $2n$. Позднее мы покажем, что любая пуассонова структура постоянного ранга $2n$ локально выглядит как каноническая структура такого ранга. Ранг структуры Ли — Пуассона на $\mathfrak{so}(3)^*$ равен 2 всюду, кроме начала координат $u = 0$, где он обращается в 0.

Поскольку ранг линейного отображения определяется размерностью его ядра или его образа, мы можем вычислить ранг $2n$ пуассонова многообразия в любой точке, либо рассматривая ядро $\mathscr{K}|_x = \{\omega \in T^*M|_x\colon \mathsf{B}(\omega) = 0\}$, размерность которого равна $m - 2n$, либо рассматривая образ $\mathscr{H}|_x = \{\mathbf{v} = \mathsf{B}(\omega) \in TM|_x\colon \omega = T^*M|_x\}$, размерность которого равна $2n$. Например, в случае канонической скобки Пуассона (6.1) ядро $\mathscr{K}|_x$ порождено «отмеченными дифференциалами» $dz^1, \ldots, dz^l$, а образ порожден элементарными гамильтоновыми векторными полями $\partial/\partial q^i$, $\partial/\partial p^i$, отвечающими координатным функциям p^i, $-q^i$ соответственно. Образ $\mathscr{H}|_x$ имеет особое значение; это пространство можно охарактеризовать как линейную оболочку всех гамильтоновых векторных полей на M в точке x:

$$\mathscr{H}|_x = \{\hat{\mathbf{v}}_H|_x\colon H\colon M \to \mathbb{R} \text{ — гладкая функция}\}.$$

Симплектические многообразия

В классической механике обычно на скобку Пуассона накладывается дополнительное требование невырожденности, которое приводит к более узкому понятию симплектической структуры на многообразии.

Определение 6.14. Пуассоново многообразие M размерности m называется *симплектическим*, если его пуассонова структура имеет всюду максимальный ранг m.

В частности, согласно предложению 6.13, симплектическое многообразие обязательно четномерно. Каноническим примером служит скобка Пуассона (6.1) на $\mathbb{R}^m$ в случае $m = 2n$, т. е. в отсутствие дополнительных отмеченных координат. В терминах локальных координат условие, что матрица $J(x)$ определяет симплектическую структуру, накладывает на нее дополнительное требование невырожденности $\det J(x) \neq 0$ всюду. В этом случае сложные нелинейные уравнения (6.15), выражающие тождество Якоби, упрощаются до системы *линейных* дифференциальных уравнений, содержащей элементы обратной матрицы $K(x) = [J(x)]^{-1}$.

Предложение 6.15. *Матрица $J(x)$ определяет симплектическую структуру на $M \subset \mathbb{R}^m$, если и только если обратная к ней матрица $K(x) = [J(x)]^{-1}$ удовлетворяет следующим условиям*:

(а) кососимметричность:

$$K_{ij}(x) = -K_{ji}(x), \quad i, j = 1, \ldots, m;$$

(b) замкнутость (тождество Якоби):

$$\partial_k K_{ij} + \partial_i K_{kj} + \partial_j K_{ik} = 0, \quad i, j, k = 1, \ldots, m, \tag{6.20}$$

всюду.

Доказательство. Эквивалентность условий кососимметричности матриц J и K очевидна. Для доказательства эквивалентности условий (6.20) и (6.15) мы воспользуемся формулой для производной обратной матрицы $\partial_k K = -K \cdot \partial_k J \cdot K$, где $K = J^{-1}$. Подставляя в (6.20), получаем

$$\sum_{l, n=1}^{m} \{K_{il} K_{jn} \partial_k J^{ln} + K_{kl} K_{in} \partial_j J^{ln} + K_{jl} K_{kn} \partial_i J^{ln}\} = 0.$$

Умножая на $J^{\tilde{i}i} J^{\tilde{j}j} J^{\tilde{k}k}$ и суммируя по i, j, k от 1 до m, получаем (6.15) с несколько иначе расставленными индексами. □

Отображения пуассоновых многообразий

Пусть M и N — пуассоновы многообразия. *Пуассоновым отображением* называется гладкое отображение $\varphi: M \to N$, сохраняющее скобку Пуассона:

$$\{F \circ \varphi, H \circ \varphi\}_M = \{F, H\}_N \circ \varphi \text{ для всех } F, H: N \to \mathbb{R}.$$

В случае симплектических многообразий это *канонические преобразования* классической механики. Хороший пример дает поток, порождаемый произвольным гамильтоновым векторным полем.

Предложение 6.16. *Пусть M — пуассоново многообразие и $\hat{\mathbf{v}}_H$ — гамильтоново векторное поле. Для каждого t поток* $\exp(t\hat{\mathbf{v}}_H)$: *$M \to M$ определяет (локально) пуассоново отображение M в себя.*

Доказательство. Пусть F и P — вещественнозначные функции, и пусть $\varphi_t = \exp(t\hat{\mathbf{v}}_H)$. Продифференцировав по t условие Пуассона $\{F \circ \varphi_t, P \circ \varphi_t\} = \{F, P\} \circ \varphi_t$, получим его инфинитезимальный вариант

$$\{\hat{\mathbf{v}}_H(F), P\} + \{F, \hat{\mathbf{v}}_H(P)\} = \hat{\mathbf{v}}_H(\{F, P\})$$

в точке $\varphi_t(x)$. Из формулы (6.4) следует, что это равенство совпадает с тождеством Якоби. При $t = 0$ φ_0 — тождественное отображение и, следовательно, очевидно, пуассоново. Поэтому простое интегрирование доказывает выполнение условия Пуассона при произвольном t. □

Например, для $M = \mathbb{R}^2$ с каноническими координатами (p, q) функция $H = (1/2)(p^2 + q^2)$ порождает группу вращений плоскости, задаваемую полем $\hat{\mathbf{v}}_H = p\partial_q - q\partial_p$. Таким образом, каждое вращение в $\mathbb{R}^2$ является каноническим отображением.

Поскольку любой гамильтонов поток сохраняет скобку Пуассона на M, в частности, он сохраняет и ее ранг.

Следствие 6.17. *Для любого гамильтонова векторного поля* $\hat{\mathbf{v}}_H$ *на пуассоновом многообразии* M *ранг* M *в точке* $\exp(t\hat{\mathbf{v}}_H)x$ *совпадает с рангом* M *в точке* x *для любого* $t \in \mathbb{R}$.

Например, так как начало координат в $\mathfrak{so}(3)^*$ является единственной точкой ранга 0, оно будет неподвижной точкой любой гамильтоновой системы в данной структуре Ли—Пуассона. На самом деле любая точка ранга 0 на пуассоновом многообразии является неподвижной точкой любой гамильтоновой системы на нем.

Пуассоновы подмногообразия

Определение 6.18. Подмногообразие $N \subset M$ называется *пуассоновым подмногообразием*, если погружение φ: $\tilde{N} \to M$ является пуассоновым отображением.

Эквивалентный способ дать это определение состоит в том, что для всякой пары функций F, H: $M \to \mathbb{R}$, ограничения которых на N суть функции $\tilde{F}$, $\tilde{H}$: $N \to \mathbb{R}$, естественное ограничение на N их скобки Пуассона $\{F, H\}_M$ является скобкой Пуассона $\{\tilde{F}, \tilde{H}\}_N$. Например, подмногообразия $\{z = c\}$ в $\mathbb{R}^m$, $m = 2n + l$, соответствующие постоянным значениям отмеченных координат, как легко видеть, являются пуассоновыми подмногообразиями с естественно ограниченной на оставшиеся координаты (p, q) скобкой Пуассона.

Есть простой способ проверить, можно ли превратить данное произвольное подмногообразие $N \subset M$ в пуассоново подмногообразие; ввиду предыдущего замечания редуцированная пуассонова структура, если она существует, определяется однозначно.

Предложение 6.19. *Подмногообразие* N *пуассонова многообразия* M *является пуассоновым, если и только если* $TN|_y \supset \mathscr{H}|_y$ *для всех* $y \in N$, *т. е. каждое гамильтоново векторное поле на* M *всюду касается* N. *В частности, если* $TN|_y = \mathscr{H}|_y$ *для всех* $y \in N$, *то* N *является симплектическим подмногообразием многообразия* M.

Доказательство. Так как скобка Пуассона определяется своими локальными свойствами, мы можем без потери общности считать N регулярным подмногообразием многообразия M и воспользоваться плоскими локальными координатами $(y, w) = (y^1, \ldots, y^n, w^1, \ldots, w^{m-n})$, в которых $N = \{(y, w): w = 0\}$. Предположим сначала, что N — пуассоново подмногообразие. Пусть $\tilde{H}: N \to \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция. Тогда мы можем продолжить $\tilde{H}$ до гладкой функции $H: M \to \mathbb{R}$, определенной в окрестности подмногообразия $N: \tilde{H} = H|N$. В наших локальных координатах $\tilde{H} = \tilde{H}(y)$ и $H(y, w)$ — произвольная функция, такая, что $H(y, 0) = \tilde{H}(y)$. Пусть F — аналогичное продолжение функции $\tilde{F}: N \to \mathbb{R}$. Тогда по определению скобка Пуассона функций $\tilde{F}$ и $\tilde{H}$ на N получается ограничением на N скобки Пуассона функций F и H:

$$\{\tilde{F}, \tilde{H}\}_N = \{\tilde{F}, \tilde{H}\}|N.$$

В частности, при любом выборе $\tilde{F}$, $\tilde{H}$ скобка $\{F, H\}|N$ не может зависеть от конкретных продолжений F и H. Ясно, что это возможно, если и только если $\{F, H\}|N$ не содержит частных производных ни функции F, ни функции H по нормальным координатам w^i, так что

$$\{F, H\}|N = \sum_{i,j} J^{ij}(y, 0) \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{\partial H}{\partial y^j} \equiv \sum_{i,j} \tilde{J}^{ij}(y) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^i} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y^j}. \tag{6.21}$$

Но тогда гамильтоново векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_H$ при ограничении на N принимает вид

$$\hat{\mathbf{v}}_H|N = \sum_{i,j} \tilde{J}^{ij}(y) \frac{\partial H}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{6.22}$$

и, таким образом, всюду касается N.

Обратно, если для всех $y \in N$ выполняется условие касания $\mathscr{H}|_y \subset TN|_y$, то всякое гамильтоново векторное поле после ограничения на подмногообразие N должно быть линейной комбинацией лишь базисных касательных векторов $\partial/\partial y^i$ и, следовательно, иметь вид (6.22). Если $F(w)$ зависит только от w, то $\{F, H\} = \hat{\mathbf{v}}_H(F)$ должна поэтому обратиться в нуль при ограничении на N. В частности,

$$\{y^i, w^j\} = \{w^k, w^j\} = 0 \text{ на } N \text{ для всех } i, j, k,$$

и, следовательно, скобка Пуассона на N принимает вид (6.21), где $\tilde{J}^{ij}(y) = J^{ij}(y, 0) = \{y^i, y^j\}|N$. Тот факт, что структурные функции $\tilde{J}^{ij}(y)$ индуцированной скобки Пуассона на N удовлетворяют тождеству Якоби, легко следует из (6.15), поскольку при ограничении на N все члены, содержащие w, обращаются в 0. Таким образом, N является пуассоновым подмногообразием, и предложение доказано. Отметим, что ранг пуассоновой структуры на N в точке $y \in N$ совпадает с рангом пуассоновой структуры на M в той же точке. □

Пример 6.20. Для структуры Ли — Пуассона на $\mathfrak{so}(3)^*$ подпространство $\mathscr{H}|_u$ в точке $u \in \mathfrak{so}(3)^*$ порождено элементарными гамильтоновыми векторами $\hat{\mathbf{v}}_1 = u^3\partial_2 - u^2\partial_3$, $\hat{\mathbf{v}}_2 = u^1\partial_3 - u^3\partial_1$, $\hat{\mathbf{v}}_3 = u^2\partial_1 - u^1\partial_2$ $(\partial_i = \partial/\partial u^i)$, отвечающими координатным функциям u^1, u^2, u^3 соответственно. Если $u \neq 0$, эти векторы порождают двумерное подпространство в $T\mathfrak{so}(3)^*|_u$, совпадающее с касательным пространством к сфере $S^2_\rho = \{u: |u| = \rho\}$, проходящим через точку u: $\mathscr{H}|_u = TS^2_\rho|_u$, $|u| = \rho$. Из предложения 6.19 следует поэтому, что каждая такая сфера является симплектическим подмногообразием в $\mathfrak{so}(3)^*$. Чтобы вычислить скобку Пуассона двух функций $\tilde{F}(\theta, \varphi)$ и $\tilde{H}(\theta, \varphi)$ в сферических координатах $u^1 = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $u^2 = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $u^3 = \rho\cos\varphi$ на S^2_ρ, нужно продолжить эти функции на некоторую окрестность сферы S^2_ρ, положив, например, $F(\rho, \theta, \varphi) = \tilde{F}(\theta, \varphi)$, $H(\rho, \theta, \varphi) = \tilde{H}(\theta, \varphi)$, вычислить скобку Ли — Пуассона $\{F, H\}$ и затем ограничить ее на S^2_ρ. Однако в соответствии с (6.10) $\{\tilde{F}, \tilde{H}\} = \{\theta, \varphi\}(\tilde{F}_\theta\tilde{H}_\varphi - \tilde{F}_\varphi\tilde{H}_\theta)$, поэтому на самом деле нам нужно лишь вычислить скобку Ли — Пуассона сферических углов θ, φ:

$$\{\theta, \varphi\} = -u \cdot (\nabla_u\theta \times \nabla_u\varphi) = -1/\rho\sin\varphi.$$

Значит, индуцированная скобка Пуассона на $S^2_\rho \subset \mathfrak{so}(3)^*$ имеет вид

$$\{\tilde{F}, \tilde{H}\} = \frac{-1}{\rho\sin\varphi}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\theta}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\varphi} - \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\varphi}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\theta}\right).$$

Таким образом, если $N \subset M$ — пуассоново подмногообразие, то любое гамильтоново векторное поле $\hat{\mathbf{v}}_H$ на M всюду касается N и поэтому естественно ограничивается до гамильтонова векторного поля $\hat{\mathbf{v}}_{\tilde{H}}$ на N, где $\tilde{H} = H|N$ — ограничение функции H на N, и для вычисления $\hat{\mathbf{v}}_{\tilde{H}}$ мы пользуемся индуцированной пуассоновой структурой на N. Если нас интересуют только решения гамильтоновой системы, отвечающей функции H на M, с начальными условиями $x_0 \in N$, мы можем без потери информации ограничиться изучением гамильтоновой системы, соответствующей функции $\tilde{H}$ на N, понизив тем самым порядок системы. В частности, при нахождении частных решений данной гамильтоновой системы мы можем ограничить ее на *минимальное* пуассоново подмногообразие в M, на котором лежат начальные данные. Ввиду следующей теоремы эти подмногообразия всегда оказываются симплектическими, так что всякую гамильтонову систему можно свести к системе с симплектической скобкой Пуассона.

Теорема 6.21. *Пусть M — пуассоново многообразие. Система гамильтоновых векторных полей $\mathscr{H}$ на M интегрируема (т. е. через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное подмногообразие N системы $\mathscr{H}$, для которого $TN|_y = \mathscr{H}|_y$ в любой точке $y \in N$). Всякое интегральное подмногообразие является симплектическим подмногообразием в M, и в совокупности эти подмногообразия определяют* симплектическое слоение *пуассонова многообразия M. Кроме того, если H: $M \to \mathbb{R}$ — произвольный гамильтониан и $x(t) = \exp(t\hat{\mathbf{v}}_H)x_0$ — произвольное решение соответствующей гамильтоновой системы с начальными условиями $x_0 \in N$, то $x(t)$ остается в одном и том же интегральном подмногообразии N: $x(t) \in N$ для всех t.*

Доказательство. Теорема является прямым следствием принадлежащего Херману бесконечномерного обобщения теоремы Фробениуса 1.41. Инволютивность системы $\mathscr{H}$ следует из того, что скобка Ли двух гамильтоновых векторных полей снова является гамильтоновым векторным полем, см. (6.8). Инвариантность ранга системы $\mathscr{H}$ обеспечивается следствием 6.17. □

Таким образом, всякое пуассоново многообразие естественно расщепляется на четномерные симплектические подмногообразия — *слои* симплектического слоения. Размерность любого такого слоя N равна рангу пуассоновой структуры в произвольной точке $y \in N$. Поэтому, если ранг многообразия M не постоянен, размерность симплектических слоев будет различной. В случае $\mathfrak{so}(3)^*$, например, слоями являются в точности сферы S^2_ρ с центром в начале координат, а также особая точка $u = 0$. Всякая гамильтонова система на M естественно ограничивается на любой симплектический слой. Если нас интересует только динамика частных решений, мы можем ограничить внимание единственным симплектическим подмногообразием, на котором это решение лежит. Например, решения уравнений движения твердого тела (6.18) естественно располагаются на сферах $|u| = \rho$.

Теорема Дарбу

Если ограничиться рассмотрением областей, на которых ранг пуассоновой структуры постоянен (в частности, это так на открытом подмногообразии, на котором этот ранг достигает максимума), геометрическая картина симплектического слоения значительно упрощается. В действительности можно, как и в теореме Фробениуса 1.43 для случая постоянного ранга, ввести специальные локальные координаты, в которых слоение принимает особенно простой, канонический вид. В этом и состоит теорема Дарбу.

Теорема 6.22. *Пусть M — произвольное m-мерное пуассоново многообразие всюду постоянного ранга $2n \leqslant m$. В каждой точке $x_0 \in M$ существуют* канонические локальные координаты $(p, q, z) = (p^1, \ldots, p^n, q^1, \ldots, q^n, z^1, \ldots, z^l)$, $2n + l = m$, *в которых скобка Пуассона записывается в виде*

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right).$$

Слои симплектического слоения пересекают координатные карты по плоскостям $\{z^1 = c_1, \ldots, z^l = c_l\}$, определяемым отмеченными координатами z.

Доказательство. Если ранг пуассоновой структуры всюду равен 0, то доказывать нечего. Действительно, скобка Пуассона тривиальна: $\{F, H\} \equiv 0$ для всех F, H, и любой набор локальных координат $z = (z^1, \ldots, z^l)$, $l = m$, удовлетворяет условиям теоремы. В противном случае будем действовать индукцией по «полурангу» n.

Так как ранг в точке x_0 отличен от нуля, мы можем найти такие вещественнозначные функции F и P на M, скобка Пуассона которых отлична от нуля в точке x_0:

$$\{F, P\}(x_0) = \hat{\mathbf{v}}_P(F)(x_0) \neq 0.$$

В частности, $\hat{\mathbf{v}}_P|_{x_0} \neq 0$, и с помощью предложения 1.29 мы можем выпрямить поле $\hat{\mathbf{v}}_P$ в некоторой окрестности U точки x_0 и, таким образом, найти функцию $Q(x)$, для которой

$$\hat{\mathbf{v}}_P(Q) = \{Q, P\} = 1$$

при всех $x \in U$. (В обозначениях предложения 1.29 Q — это координата y^1.) Поскольку $\{Q, P\}$ — константа, из (6.8) и (6.13) следует, что

$$[\hat{\mathbf{v}}_P, \hat{\mathbf{v}}_Q] = \hat{\mathbf{v}}_{\{Q, P\}} = 0$$

для всех $x \in U$. С другой стороны, $\hat{\mathbf{v}}_Q(Q) = \{Q, Q\} = 0$, и поэтому $\hat{\mathbf{v}}_P$ и $\hat{\mathbf{v}}_Q$ образуют коммутирующую линейно независимую пару векторных полей на U. Теорема Фробениуса 1.43 позволяет нам дополннть пару функций $p=P(x)$, $q=Q(x)$ до системы локальных координат $(p, q, y^3, \ldots, y^m)$ в некоторой, возможно меньшей, окрестности $\tilde{U} \subseteq U$ точки x_0, где $\hat{\mathbf{v}}_p = \partial_q$, $\hat{\mathbf{v}}_q = -\partial_p$. Ввиду скобочных соотношений $\{p, q\} = 1$, $\{p, y^i\} = 0 = \{q, y^i\}$, $i = 3, \ldots, m$, структурная матрица принимает вид

$$J(p, q, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{J}(p, q, y) \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы $\tilde{J}$ равны $\tilde{J}^{ij} = \{y^i, y^j\}$, $i, j = 3, \ldots, m$. Докажем, наконец, что матрица $\tilde{J}$ в действительности не зависит от p и q и, следовательно, задает структурную матрицу для скобки Пуассона в переменных y, ранг которой на две единицы меньше ранга матрицы J, что и дает шаг индукции. Для доказательства этого воспользуемся просто тождеством Якоби и предыдущими скобочными соотношениями; например,

$$\frac{\partial \tilde{J}^{ij}}{\partial q} = \{\tilde{J}^{ij}, p\} = \{\{y^i, y^j\}, p\} = 0,$$

и аналогичное соотношение выполняется для p. □

Пример 6.23. Вычислим канонические координаты для скобки Ли — Пуассона на $\mathfrak{so}(3)^*$. Из доказательства теоремы Дарбу ясно, что нам достаточно найти функции $P(u)$, $Q(u)$, скобка Пуассона которых тождественно равна 1. Здесь функция $z = u^3$ порождает векторное поле вращения $\hat{\mathbf{v}}_3 = u^2\partial_1 - u^1\partial_2$, которое можно выпрямить с помощью полярного угла $\theta = \operatorname{arctg}(u^2/u^1)$ при $(u^1, u^2) \neq (0, 0)$. Имеем $\{\theta, z\} = \hat{\mathbf{v}}_3(\theta) = -1$, и поэтому θ и z образуют каноническую систему координат на симплектических сферах $S^2_\rho = \{|u| = \rho\}$. Действительно, простое вычисление показывает, что если мы перепишем функции $F(u)$ и $H(u)$ в координатах θ, z и ρ, скобка Ли — Пуассона будет записываться просто в виде $\{F, H\} = F_z H_\theta - F_\theta H_z$. Другими словами, несмотря на то что симплектические слои в $\mathfrak{so}(3)^*$ являются сферами, канонические координаты оказываются цилиндрическими!

Коприсоединенное представление

Индуцированиое симплектическое слоение для скобки Ли — Пуассона на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли имеет особенно замечательную интерпретацию в терминах представления, двойственного к присоединенному представлению группы Ли G на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. (См. § 3.3.)

Определение 6.24. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. *Коприсоединенным действием* элемента группы $g \in G$ называется линейное отображение $\mathrm{Ad}^* g$: $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ двойственного пространства, удовлетворяющее условию

$$\langle \mathrm{Ad}^* g(\omega) \colon \mathbf{w} \rangle = \langle \omega; \ \mathrm{Ad}\, g^{-1}(\mathbf{w}) \rangle \tag{6.23}$$

для всех $\omega \in \mathfrak{g}^*$, $\mathbf{w} \in \mathfrak{g}$. Здесь $\langle \ ; \ \rangle$ — естественное спаривание между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, а $\mathrm{Ad} g$ — присоединенное действие g на $\mathfrak{g}$.

Если отождествить касательное пространство $T\mathfrak{g}^*|_\omega$, $\omega \in \mathfrak{g}^*$, с самим пространством $\mathfrak{g}^*$ (и провести аналогичное отождествление для $\mathfrak{g}$), то можно получить инфинитезимальные образующие коприсоединенного действия дифференцированием равенства (6.23):

$$\langle \mathrm{ad}^* \mathbf{v}|_\omega; \ \mathbf{w} \rangle = -\langle \omega; \ \mathrm{ad}\, \mathbf{v}|_{\mathbf{w}} \rangle = \langle \omega; \ [\mathbf{v}, \ \mathbf{w}] \rangle \tag{6.24}$$

для $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}$, $\omega \in \mathfrak{g}^*$ (ср. (3.21)).

Коприсоединенное действие и скобка Ли — Пуассона связаны следующим фундаментальным утверждением.

Теорема 6.25. *Пусть G — связная группа Ли с коприсоединенным представлением $\mathrm{Ad}^* G$ на $\mathfrak{g}^*$. Тогда орбиты представления $\mathrm{Ad}^* G$ в точности совпадают со слоями симплектического слоения, индуцированного скобкой Ли — Пуассона на $\mathfrak{g}^*$. Кроме того, для каждого элемента $g \in G$ коприсоединенное отображение $\mathrm{Ad}^* g$ является пуассоновым и сохраняет слои этого слоения.*

Доказательство. Рассмотрим для элемента $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ линейную функцию $H(\omega) = H_{\mathbf{v}}(\omega) = \langle \omega, \mathbf{v} \rangle$ на $\mathfrak{g}^*$. Заметим, что для элемента $\omega \in \mathfrak{g}^*$ градиент $\nabla H(\omega)$, рассматриваемый как элемент пространства $T^*\mathfrak{g}^*|_\omega \simeq \mathfrak{g}$, совпадает с самим элементом $\mathbf{v}$. Используя инвариантное определение (6.17) скобки Ли — Пуассона, получаем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_H(F)(\omega) &= \{F, \ H\}(\omega) = \langle \omega; \ [\nabla F(\omega), \ \nabla H(\omega)] \rangle = \\ &= \langle \omega; \ [\nabla F(\omega), \ \mathbf{v}] \rangle = \langle \omega, \ \mathrm{ad}\, \mathbf{v}(\nabla F(\omega)) \rangle = \\ &= -\langle \mathrm{ad}^* \mathbf{v}(\omega); \ \nabla F(\omega) \rangle \end{aligned}$$

для любой функции F: $\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$. С другой стороны, поле

$$\hat{\mathbf{v}}_H(F)(\omega) = \langle \hat{\mathbf{v}}_H|_\omega; \ \nabla F(\omega) \rangle$$

однозначно определено своим действием на всех таких функциях. Мы заключаем, что гамильтоново векторное поле, задаваемое линейной функцией $H = H_{\mathbf{v}}$, совпадает с точностью до знака с инфинитезимальной образующей коприсоединенного представления, определенной вектором $\mathrm{v} \in \mathfrak{g}$: $\hat{\mathrm{v}}_H = -\mathrm{ad}^*\mathrm{v}$. Таким образом, соответствующие однопараметрические группы удовлетворяют условию

$$\exp(t\hat{\mathrm{v}}_H) = \mathrm{Ad}^*[\exp(-t\,\mathrm{v})].$$

Предложение 6.16 и обычные соображения связности показывают, что $\mathrm{Ad}^* g$ является пуассоновым отображением для каждого $g \in G$.

Кроме того, подпространство $\mathscr{H}|_\omega$, $\omega \in \mathfrak{g}^*$, порождено гамильтоновыми векторными полями $\hat{\mathrm{v}}_H$, соответствующими всем таким линейным функциям $H = H_\mathrm{v}$, $\mathrm{v} \in \mathfrak{g}$; следовательно, $\mathscr{H}|_\omega = \mathrm{ad}^*\mathfrak{g}|_\omega$ совпадает с пространством, порожденным соответствующими инфинитезимальными образующими $\mathrm{ad}^*\mathrm{v}|_\omega$. Так как $\mathrm{ad}^*\mathfrak{g}|_\omega$ в точности является касательным пространством к орбите коприсоединенного представления группы G, проходящей через точку ω, то ввиду связности этой орбиты мы немедленно заключаем, что она совпадает с соответствующим интегральным подмногообразием системы $\mathscr{H}$. □

Следствие 6.26. *Орбиты коприсоединенного представления группы G являются четномерными подмногообразиями в $\mathfrak{g}^*$.*

Пример 6.27. Для группы вращений SO(3) орбитами коприсоединенного представления являются сферы $S^2_\rho \subset \mathfrak{so}(3)^*$, определенные в примере 6.20. Действительно, согласно примеру 3.9, присоединенное действие матрицы вращения $R \in \mathrm{SO}(3)$ на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ совпадает с самим вращением R в стандартном базисе: $\mathrm{Ad}\,R(\mathrm{v}) = R\mathrm{v}$, $\mathrm{v} \in \mathfrak{so}(3)$. Таким образом, представляющая матрица коприсоединенного действия Ad^*R элемента R на $\mathfrak{so}(3)^*$ в соответствующем двойственном базисе на $\mathfrak{so}(3)^* \simeq \mathbb{R}^3$ имеет вид $\mathrm{Ad}^*R = (R^{-1})^T = R$, и поэтому коприсоединенное представление группы SO(3) совпадает с ее обычным действием на $\mathbb{R}^3$ при указанных отождествлениях. В частности, орбиты коприсоединенного действия в точности совпадают со сферами S^2_ρ, $\rho \geqslant 0$.

6.3. СИММЕТРИИ, ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Теорема Нётер описывает связь между однопараметрическими группами вариационных симметрий системы обыкновенных дифференциальных уравнений в лагранжевой форме, т. е. уравнений Эйлера — Лагранжа для некоторой вариационной задачи,